

Systemes linéaires et stabilité

Questions de cours :

- Définir un système linéaire continu et temporellement invariant.
- Déterminer l'allure du spectre d'un signal composé d'une somme ou d'un produit de plusieurs termes sinusoïdaux.
- Définir la fonction de transfert, la calculer pour un filtre passe-haut RLC en notation $j\omega$ et p , et déterminer alors l'équation différentielle reliant l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$.
- Expliciter l'expression mathématique de la réponse d'un filtre linéaire à un signal périodique. Sur un exemple simple de votre choix, prévoir l'allure du signal en sortie en s'appuyant sur une étude graphique (Bode ou gain linéaire, au choix).
- Sur un filtre d'ordre 1 (passe-bas ou passe-haut), proposer un circuit, effectuer l'analyse asymptotique pour justifier son rôle, déterminer la fonction de transfert, le diagramme de Bode avec les asymptotes et déterminer la bande-passante.
- Comportement intégrateur, dérivateur : préciser le montage adapté et la gamme de fréquences permettant un tel comportement.
- Stabilité des systèmes linéaires : définition, cas d'un système d'ordre 2 et conclusion générale.

Capacités exigibles du BO :

- Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (relation différentielle) ;
- Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 d'après les signes des coefficients de la relation différentielle ou de la fonction de transfert.

Les signaux physiques ont occupé une bonne part du programme de 1^{ère} année : signaux et propagation, phénomènes ondulatoires (oscillateurs harmoniques, amortis, en régime forcé), et la notion de filtrage. L'idée de ce chapitre est de résumer une partie de ces connaissances, compléter les éléments vus en PCSI mais pas en MPSI ou PTSI, et développer la notion de stabilité de certains types de systèmes, les systèmes linéaires et temporellement invariants (LTI).

I. Signaux et systèmes

I.1 Signaux

a) Signaux sinusoïdaux

Un signal sinusoïdal s'écrit $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ (ou $s(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$), avec

- $S_m = \sqrt{A^2 + B^2}$ l'amplitude du signal ;
- ω sa pulsation, donc $f = \frac{\omega}{2\pi}$ sa fréquence et $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ sa période temporelle ;
- $\cos \varphi = A/S_m$ et $\sin \varphi = -B/S_m$ permettant de calculer le déphasage à l'origine des temps φ .

La grandeur complexe $\underline{s}(t)$ associée à $s(t)$ est obtenue en remplaçant $\cos(\dots)$ par $e^{j\dots}$. Ainsi on peut écrire :

$$s(t) = \Re(\underline{s}(t)) \quad \text{et} \quad \underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S}_m e^{j\omega t} \quad (1.1)$$

avec $\underline{S}_m = S_m e^{j\varphi}$ l'**amplitude complexe**, de sorte que :

$$S_m = |\underline{S}_m| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg \underline{S}_m \quad (1.2)$$

L'intérêt d'introduire les complexes et de remplacer les opérations de dérivation et d'intégration par des opérations simples :

$$\frac{ds}{dt} = j\omega \underline{s} \quad \text{et} \quad \int \underline{s}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{s}(t) + \text{cste} \quad (1.3)$$

Néanmoins un signal sinusoïdal n'a pas vraiment de sens physique, mais c'est une brique de base : le fait de connaître la réponse d'un système à ce type d'excitation permet ensuite de généraliser à n'importe quel type de signal, via la notion de décomposition de Fourier.



L'utilisation des grandeurs complexes est à proscrire dès qu'on manipule des produits de fonctions ou des équations différentielles non linéaires !

b) Signal périodique

Dans le cas d'un signal périodique de période T quelconque, on peut introduire deux grandeurs importantes :

- la valeur moyenne

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) dt \quad (1.4)$$

où on intègre sur un intervalle de longueur T . $\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = 1/2$;

- la valeur efficace, reliée à des considérations énergétiques (calcul de puissance moyenne, par exemple) :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} s^2(t) dt} \quad (1.5)$$

$$\heartsuit \quad s_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}} \quad \text{pour} \quad s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi).$$

On peut décomposer tout signal périodique comme une somme de sinusoïdes. On parle de développement en **série de Fourier** :

On remplace $\sin(\dots)$ par $-je^{j\dots}$.

Propriété : développement en série de Fourier

Tout signal périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ se décompose de **manière unique** en une somme infinie de sinusoides de pulsation multiple de ω

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (1.6)$$

* où

- S_0 est la composante continue du signal, c'est sa **valeur moyenne** ;
- la composante $S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est l'**harmonique de rang n** , de pulsation multiple du fondamental $\omega_n = n\omega$;
- pour $n = 1$, on parle du **fondamental** du signal périodique.
- φ_n sont les déphasages à $t = 0$ pour chaque harmonique de rang n .

La valeur efficace suit le théorème de Parseval :

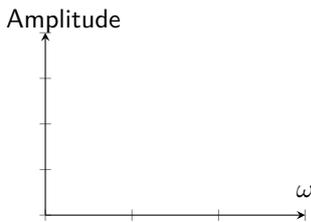
$$s_{\text{eff}}^2 = S_0^2 + \sum_n S_n^2/2.$$

On peut aussi l'écrire sous la forme $s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t))$, en explicitant même les coefficients :

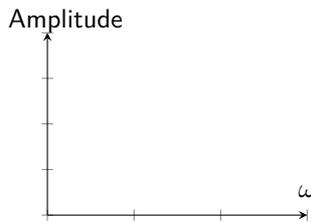
$$A_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \sin(n\omega t) dt \quad (1.7)$$

c) Spectre d'un signal

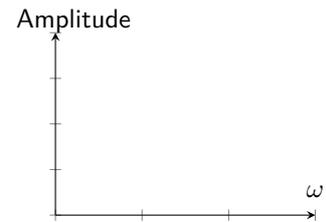
Caractériser un signal périodique revient à connaître les amplitudes et déphasages pour les fréquences mises en jeu. On peut le représenter graphiquement pour une meilleure lisibilité : on parle de **spectre en amplitude** (resp. en phase) lorsqu'on représente les valeurs C_n (resp. φ_n) en fonction de la pulsation $\omega_n = n\omega$ (ou tout simplement en fonction de n). Il est nécessairement **discret**. Par exemple :



Spectre d'un signal continu
 $s(t) = A$



Spectre d'un signal sinusoïdal
 $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$



Spectre d'un signal du type
 $s(t) = 1 + 3 \cos \omega t + 2 \sin(5\omega t + 1)$

Exercice

Déterminer et tracer l'allure du spectre du signal $s(t) = \cos^2(\omega t)(1 + \cos(\omega t))$.

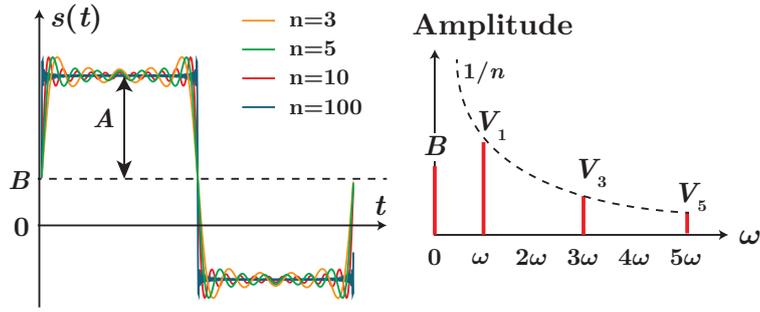
Le développement conduit à $s(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t)$

Un signal créneau de valeur moyenne B , d'amplitude A et de période $T = 2\pi/\omega$ se décompose comme suit :

$$s(t) = B + \frac{4A}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\omega t) \quad (1.8)$$

* c'est-à-dire que $C_n = 0$ si n est pair, sauf $C_0 = B$, $C_n = \frac{4A}{\pi(2p+1)}$ si n est impair. D'où le spectre :

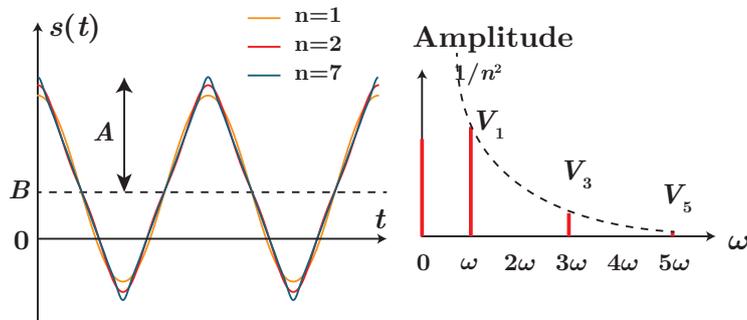
Il est difficile de retranscrire une discontinuité de signal, on assiste au **phénomène de Gibbs**, qui amplifie la discontinuité.



Un signal triangulaire de valeur moyenne B , d'amplitude A et de période $T = 2\pi/\omega$ se décompose comme suit :

$$s(t) = B - \frac{8A}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)\omega t) \quad (1.9)$$

* c'est-à-dire que $C_n = 0$ si n est pair, sauf $C_0 = B$, $C_n = -\frac{8A}{\pi^2(2p+1)^2}$ si n est impair. D'où le spectre :

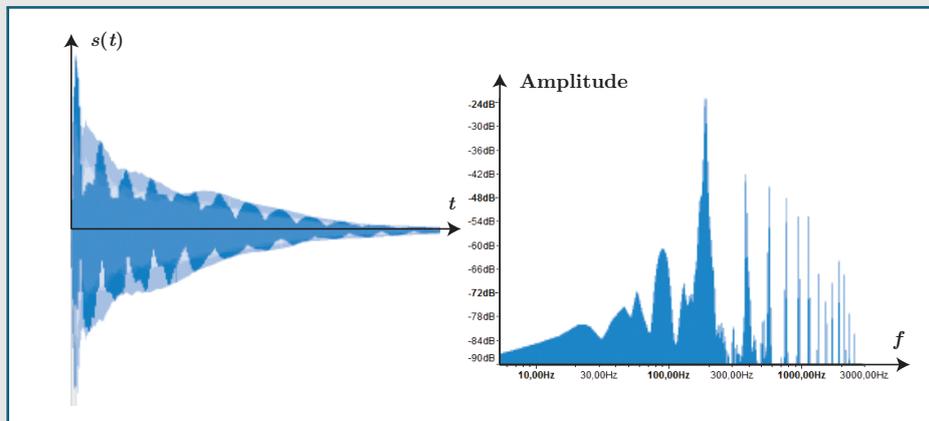


Notons que plus le signal présente des variations rapides dans le temps, plus les harmoniques d'ordre n grand sont importantes pour bien décrire le signal.

Pour un signal quelconque, il est possible d'effectuer un développement similaire à partir d'une intégrale :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \iff S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.10)$$

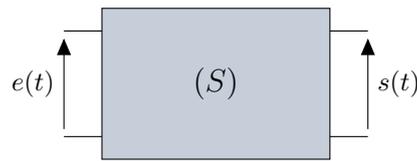
$S(\omega)$ est alors appelée la transformée de Fourier de $s(t)$. Par exemple le son produit par une guitare puis analysé par le logiciel Audacity renvoie le spectre en amplitude suivant :



1.2 Systèmes continu LTI

On va dans toute la suite s'intéresser à un système physique (S) établissant une relation entre deux signaux : un signal d'entrée $e(t)$ et signal de sortie $s(t)$. Ils s'expriment à l'aide d'une variable continue t . On parle alors de **système continu**.

Les systèmes continus sont à opposer aux systèmes numériques qui admettent comme variables d'entrée des grandeurs discrètes, de type binaire par exemple.



Par exemple :

- pour un oscillateur mécanique la grandeur d'entrée est la force excitatrice $F(t)$ et la sortie l'abscisse $x(t)$ du point M ;
- pour un micro, la grandeur d'entrée sera la position de la membrane $x(t)$ et la sortie sera le courant $i(t)$ produit par le phénomène d'induction.

La plupart des systèmes que l'on va étudier ensuite possèdent deux caractéristiques fondamentales que l'on énonce dans la suite.

a) Système linéaire

On dit qu'un système est **linéaire** si et seulement si on peut lui appliquer un principe de superposition : si un signal entrant $e_1(t)$ a en sortie $s_1(t)$, et qu'il en est de même pour le couple $(e_2(t), s_2(t))$, alors pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ quelconques, $\lambda e_1 + \mu e_2$ donne en sortie du système $\lambda s_1 + \mu s_2$. Citons par exemple :

*

- les systèmes tels que l'équation différentielle liant leur grandeur d'entrée et de sortie est linéaire, de la forme :

$$b_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{ds}{dt} + b_0 s(t) = a_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{de}{dt} + a_0 e(t) \quad (1.11)$$

- les systèmes permettant d'effectuer l'opération « retard pur », où $s(t) = e(t - \tau)$ (avec τ une constante).

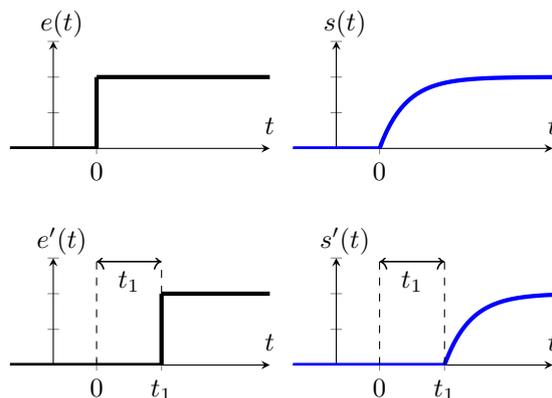
Notons qu'un système est généralement linéaire dans un domaine limité : par exemple la force de rappel élastique d'un ressort, qui conduit à une équation différentielle linéaire pour l'étude d'un oscillateur masse-ressort, n'est valide que si on reste dans le domaine élastique du matériau, c'est-à-dire pour de faibles forces.

Cette propriété permet de justifier l'étude de la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale de la forme $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$, pour toute pulsation ω . Ainsi, la réponse à un signal périodique sera la somme des réponses à chaque composante sinusoïdale obtenue dans la décomposition de Fourier en appliquant le théorème de superposition.

b) Système temporellement invariant

Un système est **temporellement invariant** si ses caractéristiques ne varient pas au cours du temps : une translation dans le temps sur la grandeur d'entrée se traduit par une translation temporelle identique sur la grandeur de sortie. C'est typiquement le cas de systèmes régis par des équations différentielles linéaires.

Concrètement, si $s(t)$ est la réponse à $e(t)$, la réponse à une entrée $e'(t) = e(t - t_1)$ temporellement translatée par rapport à $e(t)$ d'une durée t_1 est également translatée temporellement d'une même durée t_1 , à savoir $s'(t) = s(t - t_1)$:



D'un point de vue mécanique, cela revient à considérer que les composants mécaniques tels les ressorts ou vérins vont garder leurs propriétés mécaniques inchangées au cours du temps malgré leur utilisation pouvant être intensive. Il en est de même en électronique où certains composants subissent une certaine usure.

Bilan

Dans la suite on considérera des systèmes continus LTI, c'est-à-dire qu'ils sont Linéaires et Temporellement Invariants.

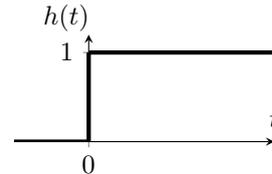
I.3 Différents types de régimes d'étude d'un système

a) Réponse indicielle

Il s'agit d'un type de réponse déjà étudié en 1ère année consistant à observer la réponse du système à une discontinuité finie du signal d'entrée :

- $e(t) = E_0 h(t)$ est relié à la fonction de Heaviside $h(t)$ définie par :

$$\begin{cases} h(t) = 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ h(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

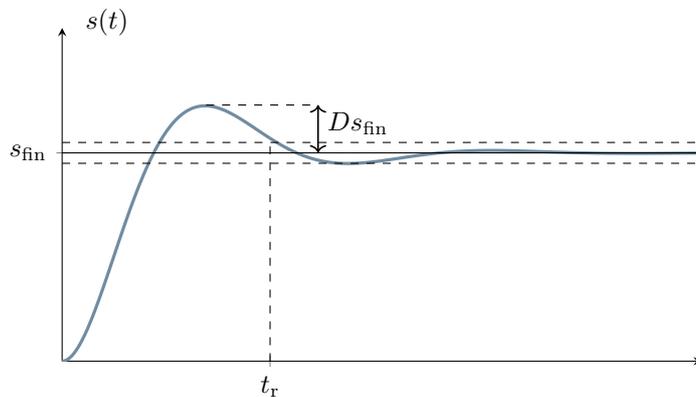


- On parle alors de réponse à un **échelon**, obtenu en pratique lorsque le signal d'entrée présente un temps de montée très court devant les temps caractéristiques du système à étudier ;
- Sauf instabilité (cf. plus loin), $s(t)$ tend alors vers un état indépendant du temps lorsque $t \rightarrow +\infty$: $s(t \rightarrow +\infty) = s_{\text{fin}}$.
- On mesure couramment deux grandeurs physiques associées à ce type de régime transitoire :
 - le **temps de réponse à 5%**, t_r , correspondant au temps t_r tel que

$$\forall t \geq t_r \quad |s(t) - s_{\text{fin}}| \leq 5\% s_{\text{fin}} \quad (1.12)$$

Ce temps est généralement optimisé pour être le plus court ;

- le **dépassement** D correspond à l'écart, en pourcentage, entre la valeur maximale et la valeur finale. On pourrait le définir comme $D = \frac{s_{\text{max}} - s_{\text{fin}}}{s_{\text{fin}}}$.



- En pratique, pour observer les réponses indicielles d'un système, on utilise le signal créneau (éventuellement avec un offset).

b) Réponse impulsionnelle

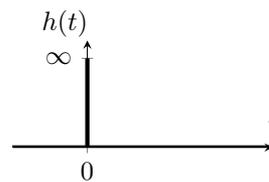
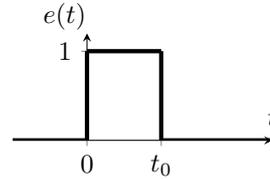
Manipulation

Allure d'une réponse impulsionnelle pour un 1^{er} ordre ou 2^e ordre

Si on applique au système une perturbation très brève, on peut également en étudier la réponse :

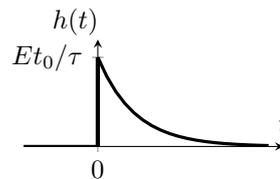
- $e(t)$ prend la forme d'un échelon, mais dont la valeur retombe à zéro au bout d'un temps t_0 « très bref » (c'est-à-dire faible devant le temps de réponse du système). On peut l'écrire $e(t) = (h(t) - h(t - t_0))$.
- La réponse d'un système linéaire et temporellement invariant s'écrit $s(t) = (s_h(t) - s_h(t - t_0))$, de sorte que si $t_0 \rightarrow 0$, $s(t) \rightarrow t_0 \frac{ds_h}{dt}$, c'est-à-dire la dérivée de la réponse à un échelon.
- On définit couramment l'**impulsion de Dirac** $\delta(t)$ comme suit :

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{pour } t \neq 0 & (1.13) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 & & (1.14) \end{cases}$$



Par exemple pour un circuit RC en charge soumis à une impulsion de temps $t_0 \ll \tau = RC$, on connaît la réponse indicielle $s_h(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$, on peut donc en déduire la réponse impulsionnelle $s_e(t)$:

$$s_e(t) = t_0 \frac{ds_h}{dt} = Et_0/\tau e^{-t/\tau} \quad (1.15)$$



d'où l'allure ci-contre.

c) Réponse harmonique

De manière générale pour un système régi par une équation différentielle linéaire, la solution se met sous la forme :

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t) \quad (1.16)$$

- où $s_h(t)$ est la solution de l'équation homogène (ou sans second membre) correspondant au régime libre, avec $s_h(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ si le système est stable (cf. plus loin) ;
- et $s_p(t)$ est la solution particulière correspondant au régime forcé ou permanent.

Dans le cas d'une entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos \omega t$, la solution particulière est aussi sinusoïdale de même pulsation $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$: **les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires stables.**

En réalité il ne peut y avoir de discontinuité de charge et donc de tension aux bornes du condensateur : ce n'est dû qu'à la modélisation, en réalité l'impulsion étant de durée finie $t_0 \ll \tau$, si on dilate l'échelle temporelle on observera une croissance entre 0 et Et_0/τ sur une durée de l'ordre de t_0 .

Manipulation

Circuit avec résistance et diode, avec un GBF : tracé de la caractéristique de la diode et allure du spectre en sortie.

- * Si la sortie d'un système soumis à une entrée sinusoïdale est différente d'une sinusoïde, cela signifie simplement que le système est non-linéaire. C'est typiquement le cas de la sortie d'un multiplieur, d'une diode, etc.

II. Fonction de transfert d'un système linéaire

II.1 Définitions

Il est parfois souhaitable de supprimer d'un signal des composantes indésirables (des harmoniques élevées, par exemple). On emploie alors des **filtres** mécaniques, électroniques voire numériques. Pour quantifier l'influence d'un filtre sur un signal de pulsation ω , on introduit le **gain**. Deux définitions sont utiles, en régime harmonique et avec des notations complexes :

- la **fonction de transfert** ou **transmittance** du système : on compare l'amplitude de sortie avec l'amplitude du signal d'entrée :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)} \quad (1.17)$$

- le **gain linéaire** $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$. S'il est plus grand que 1, le filtre amplifie la pulsation ω , s'il est plus petit que 1, il atténue (ou filtre) cette pulsation ;
- le **gain logarithmique** ou **gain en décibel** G_{dB} , dont l'unité est le décibel (dB), tel que

$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(\omega)| \quad (1.18)$$

Plusieurs valeurs sont à retenir :

- si le gain linéaire est multiplié par $\sqrt{2}$, on ajoute au gain logarithmique initial la quantité $20 \log(\sqrt{2}) = 10 \log(2) \simeq 3 \text{ dB}$;
- si le gain linéaire est multiplié par 10, on ajoute au gain logarithmique initial 20 dB.

À partir de l'équation différentielle d'un système linéaire :

$$b_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{ds}{dt} + b_0 s(t) = a_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{de}{dt} + a_0 e(t) \quad (1.19)$$

on peut établir en régime harmonique la fonction de transfert complexe correspondant :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^n b_k (j\omega)^k} = \frac{\underline{P}(\omega)}{\underline{Q}(\omega)} \quad (1.20)$$

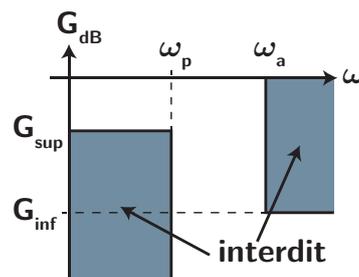
On appelle **ordre** du système le degré le plus élevé des polynômes \underline{P} et \underline{Q} .

II.2 Notion de gabarit

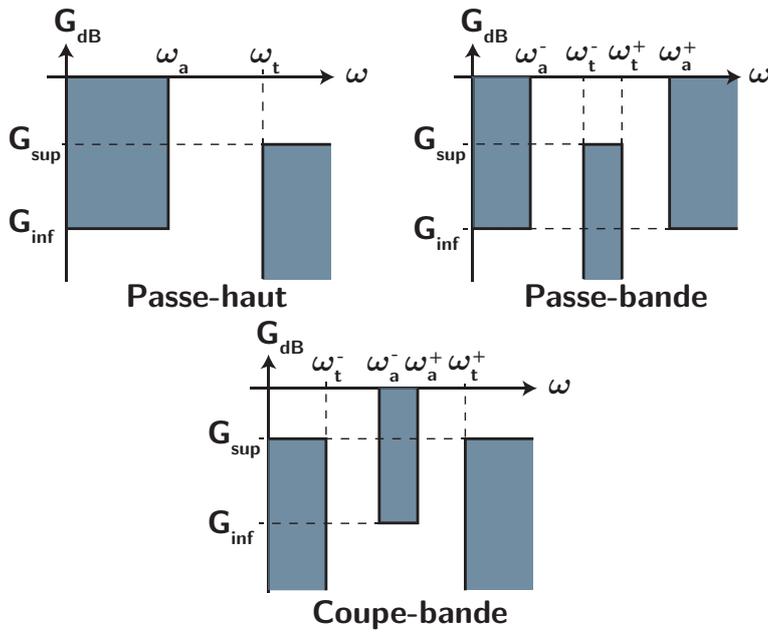
Avant la mise en place d'un filtre, il faut définir le **cahier des charges**, c'est-à-dire les critères choisis pour le filtrage. Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas, laissant passer uniquement les basses fréquences. On fixe pour objectif que :

- pour $0 < \omega < \omega_p$ le signal doit être assez peu atténué, ce qui implique un gain en décibel suffisamment grand, soit $G_{dB} > G_{sup}$;
- pour $\omega > \omega_a$ le signal doit atténuer suffisamment, ce qui implique un gain suffisamment petit, soit $G_{dB} < G_{inf}$ avec évidemment $G_{inf} < G_{sup}$.

Le gabarit est alors la représentation graphique des zones autorisées ou interdites pour le gain du filtre en fonction de la pulsation (ou la fréquence), soit ici :



De la même façon, on peut définir d'autres types de gabarits eu égard à leur fonction :



II.3 Notation de Laplace

En lien avec le cours de Sciences Industrielles, on introduit la notation p plutôt que $j\omega$, relatif à la transformée de Laplace (un peu plus générale que le passage en notation complexe). On utilise alors les équivalences

$$p \longleftrightarrow j\omega \longleftrightarrow \frac{d}{dt} \quad (1.21)$$

On introduit alors la fonction de transfert de Laplace :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (1.22)$$

quel que soit le régime d'étude (harmonique ou autre). On rappelle alors les expressions des impédances usuelles :

$$Z_R = R \quad , \quad Z_C = \frac{1}{Cp} \quad \text{et} \quad Z_L = Lp \quad (1.23)$$

On se passe parfois de la notation \underline{H} ou \underline{S} , etc.

Exercice

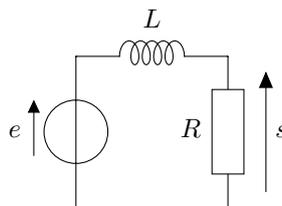
Déterminer en notation de Laplace la fonction de transfert d'un circuit RLC en sortie sur L .

$$\underline{s} = \frac{eLp}{Lp + R + 1/(Cp)} \quad \text{donc} \quad \underline{H}(p) = \frac{LCp^2}{1 + RCp + LCp^2}$$

II.4 Étude d'un filtre (à lire)

a) Représentation du diagramme de Bode

Étudions un circuit RL ci-dessous où la sortie est aux bornes de la résistance. Une étude asymptotique montre qu'il s'agit d'un filtre passe-bas.



La fonction de transfert s'obtient à l'aide de la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L} e = \frac{R}{R + jL\omega} e \quad (1.24)$$

soit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + \tau p} \quad (1.25)$$

en posant $\tau = L/R$. On peut alors calculer le gain logarithmique et le déphasage :

$$G_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \right) = -10 \log(1 + \omega^2\tau^2) \quad (1.26)$$

et

$$\varphi = \arg \left(\frac{1}{1 + j\omega\tau} \right) = -\arg(1 + j\omega\tau) = -\arctan(\omega\tau) \quad (1.27)$$

Le diagramme de Bode est représenté FIG. 1.1, l'échelle horizontale étant une échelle logarithmique, pour $\tau = 0,1$ s.

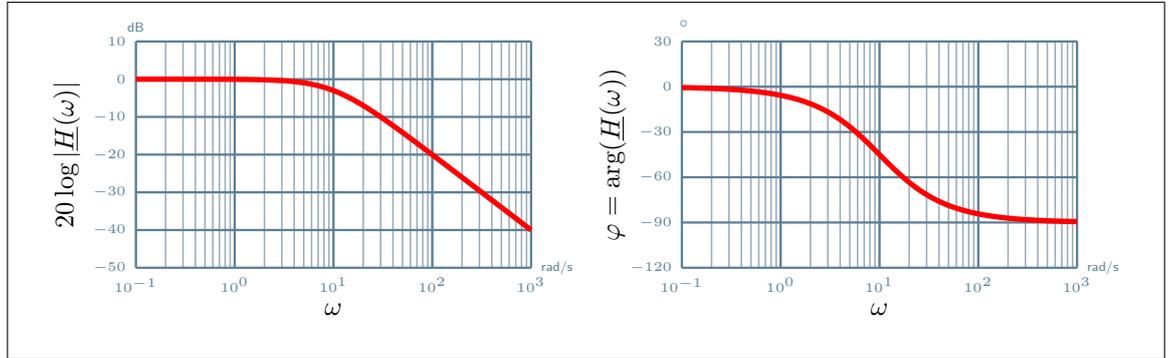


Figure 1.1 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas pour $\tau = 0,1$ s

b) La bande-passante et la pulsation de coupure

On cherche à définir un critère indiquant si un signal est atténué ou non par le filtre. Ce critère est arbitraire et définit la bande-passante d'un filtre (et donc la pulsation de coupure pour un passe-bas ou passe-haut)

Définition : bande-passante

On définit la **bande-passante à -3 dB** comme étant l'ensemble des pulsations ω vérifiant :

$$G_{dB}(\omega) \geq G_{dB,max} - \underbrace{10 \log 2}_{\approx 3} \Leftrightarrow |H|(\omega) \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad (1.28)$$

où $G_{dB,max} = 20 \log(H_{max})$ correspond au gain logarithmique maximal. On parle alors de **pulsation(s) de coupure** lorsqu'on vérifie l'égalité.

Ici, on montre que $H_{max} = |H(\omega = 0)| = 1$ et donc la bande-passante est telle que

$$|H|(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2\tau^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.29)$$

d'où finalement

$$1 + \omega^2\tau^2 \leq 2 \quad \text{impliquant} \quad \omega \leq \frac{1}{\tau} = \omega_c \quad (1.30)$$

Ainsi les signaux dont la pulsation est supérieure à ω_c sont notablement atténués, et on dit que ω_c est la pulsation de coupure de ce filtre.

c) Diagramme de Bode asymptotique

On peut chercher à simplifier l'expression (1.25) de H afin d'en déduire celle de G_{dB} et φ pour différentes gammes de fréquences. Ici on va distinguer deux cas :

- lorsque $\omega \ll \omega_c$, soit $\omega\tau \ll 1$, $H(\omega) \simeq 1$:

$$G_{dB} \simeq -20 \log(1) \simeq 0 \quad \text{et} \quad \varphi \simeq 0 \quad (1.31)$$

- lorsque $\omega \gg \omega_c$, soit $\omega\tau \gg 1$, $H(\omega) \simeq 1/j\omega\tau$, donc le gain logarithmique devient

$$G_{dB} \simeq 20 \log(1/\omega\tau) \simeq -20 \log(\omega\tau) \simeq -20 \log \tau - 20 \log \omega \quad (1.32)$$

L'échelle logarithmique revient à tracer en fonction de $\log(\omega)$, mais les valeurs indiquées sur l'axe sont celles de ω .

Cette définition de la bande-passante traduit le fait qu'au-delà la puissance fournie en sortie est au moins divisée par deux par rapport à la puissance d'entrée.

correspondant à une droite de pente passant par $(\omega_c = 1/\tau, 0\text{dB})$ de pente -20 avec une échelle horizontale logarithmique. On parle alors d'une pente de -20dB par décade, car si on multiplie la pulsation par un facteur 10 (une décade), on diminue le gain de 20 dB. De même, la phase vaut

$$\varphi = -\arctan(\omega\tau) \simeq -\frac{\pi}{2} \tag{1.33}$$

Les expressions limites que l'on a obtenues pour $\omega \ll \omega_c$ et $\omega \gg \omega_c$ permettent de représenter le **diagramme de Bode asymptotique** FIG. 1.2.

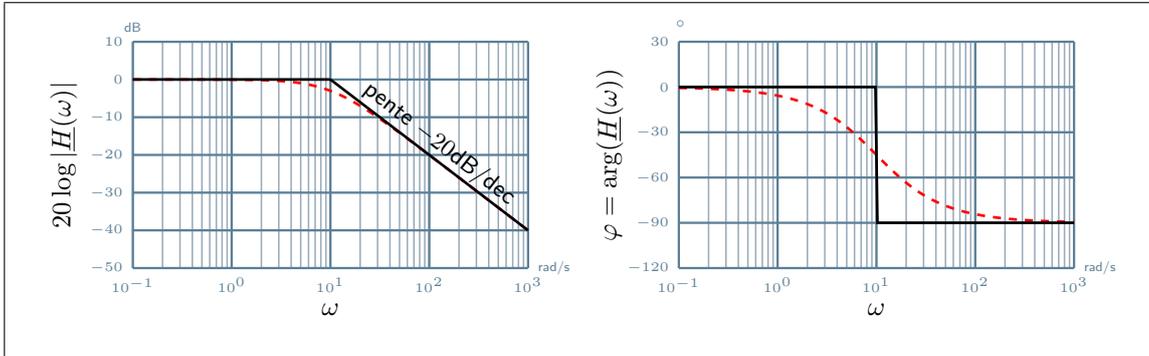
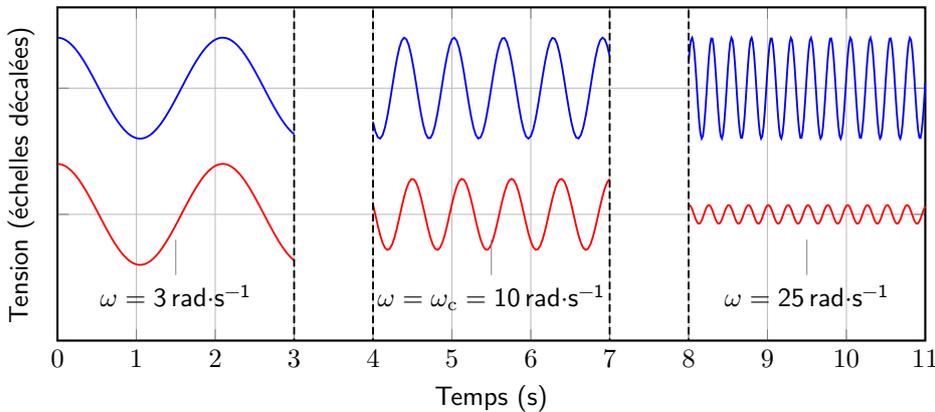


Figure 1.2 – Diagramme de Bode du filtre précédent (en pointillés) et le diagramme asymptotique correspondant (traits pleins)

d) Conséquences sur le signal de sortie

Pour des pulsations faibles devant $1/\tau = 10\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, le gain en décibel est proche de 0 et le déphasage également : le **signal en sortie est inchangé par rapport au signal en entrée**. Pour des pulsation élevées ($\omega \gg \omega_c$), le gain est très faible et le déphasage tend vers -90° : **le signal sera fortement atténué**, comme illustré ci-après dans les cas où $\omega \ll \omega_c$, $\omega = \omega_c$ et $\omega \gg \omega_c$.



On peut enfin écrire l'expression du signal de sortie à partir de la fonction de transfert pour un signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \psi)$:

$$s(t) = \text{Re}(\underline{s}(t)) = \text{Re}(\underline{H}(\omega) \cdot \underline{e}(t)) = \text{Re}(|\underline{H}(\omega)| e^{j\varphi} E_0 e^{j(\omega t + \psi)}) \tag{1.34}$$

$$= \text{Re}(|\underline{H}(\omega)| E_0 e^{j(\omega t + \psi + \varphi)}) = |\underline{H}(\omega)| E_0 \cos(\omega t + \psi + \varphi) \tag{1.35}$$

$$= |\underline{H}(\omega)| E_0 \cos(\omega t + \psi + \arg(\underline{H}(\omega))) \tag{1.36}$$

11.5 Quelques exemples de filtres

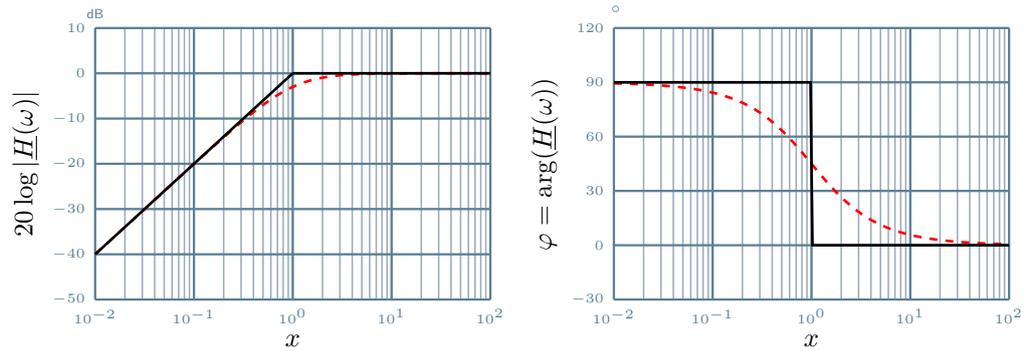
a) Filtre passe-haut d'ordre 1

La fonction de transfert associée à ce filtre est de la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{H_0 \tau p}{1 + \tau p} \tag{1.37}$$

On pose souvent $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \omega\tau$ avec $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ la pulsation de coupure.

Exemples : circuit RL avec la sortie aux bornes de L, circuit RC avec la sortie aux bornes de R.

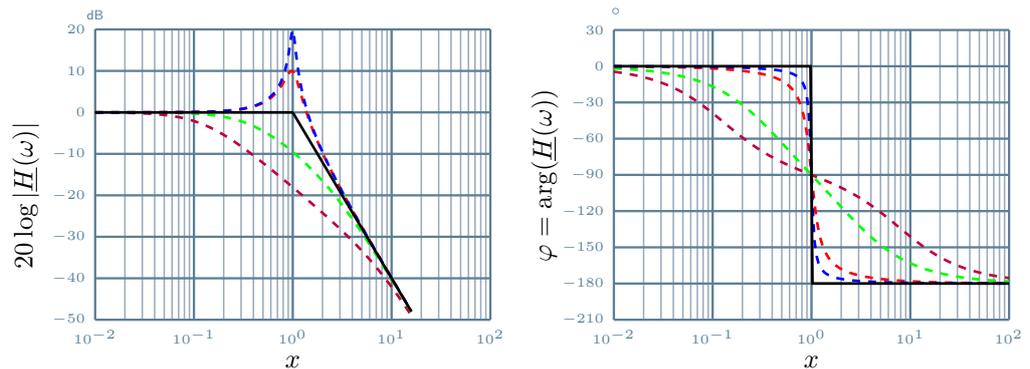


b) Passe-bas d'ordre 2

La fonction de transfert associée à ce filtre est de la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{H_0}{1 + 2\sigma\tau p + \tau^2 p^2} \quad (1.38)$$

Exemple : circuit RLC avec la sortie aux bornes de C.

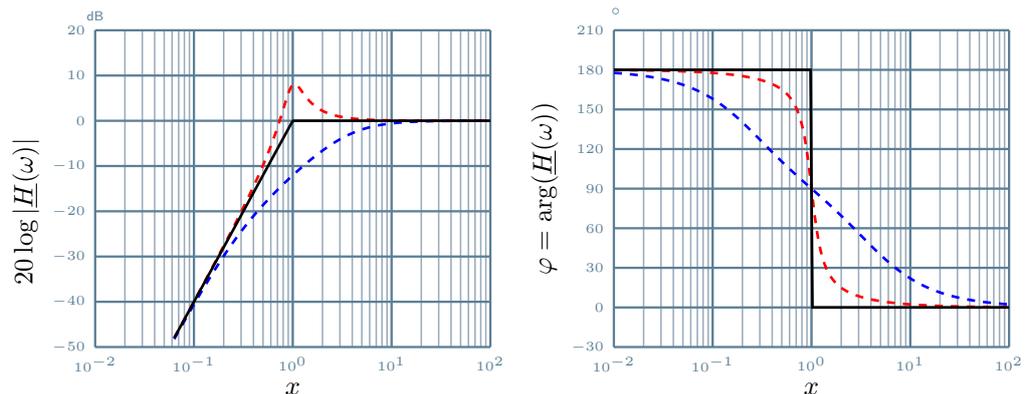


c) Passe-haut d'ordre 2

La fonction de transfert associée à ce filtre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{H_0\tau^2 p^2}{1 + 2\sigma\tau p + \tau^2 p^2} \quad (1.39)$$

Exemple : circuit RLC, sortie en L.



Vous avez déjà rencontré la fonction de transfert dans le cadre de l'étude de la résonance en tension : elle ne se produit que si $Q > 1/\sqrt{2}$.

d) Passe-bande d'ordre 2

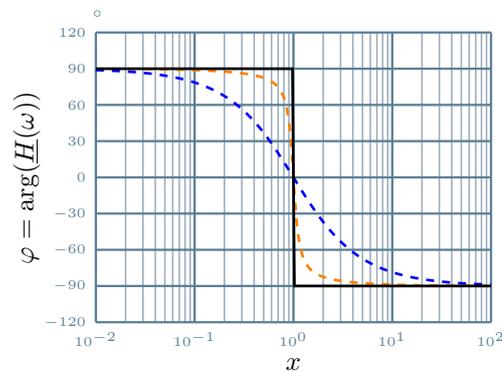
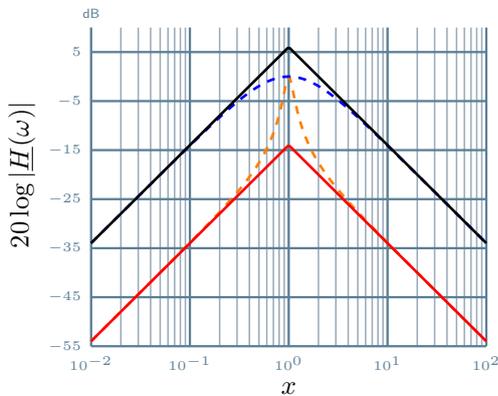
La fonction de transfert associée à ce filtre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{H_0 2\sigma\tau p}{1 + 2\sigma\tau p + \tau^2 p^2} \quad (1.40)$$

Exemple : circuit RLC, sortie en R.

Quelques propriétés à connaître :

- largeur de bande-passante à -3 dB : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ avec ω_0 la pulsation centrale du passe-bande ;
- aux basses fréquences, pour $\omega \ll \omega_0$, on a $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$, c'est-à-dire un comportement **dérivateur** ;
- aux hautes fréquences, pour $\omega \gg \omega_0$, on a $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{\omega_0}{jQ\omega}$, c'est-à-dire un comportement **intégrateur**.



II.6 Action d'un filtre sur un signal périodique

a) Expression mathématique

Considérons un signal périodique de décomposition de Fourier suivante :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (1.41)$$

Pour chaque harmonique $e_n(t) = E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$, la grandeur complexe associée est $\underline{e}_n(t) = E_n e^{j(n\omega t + \varphi_n)}$ et la sortie correspondante est

$$\underline{s}_n(t) = \underline{H}(n\omega) \times \underline{e}_n = |H|(n\omega) e^{j \arg(\underline{H}(n\omega))} E_n e^{j(n\omega t + \varphi_n)} \quad (1.42)$$

$$= (|H|(n\omega) E_n) e^{j(n\omega t + \varphi_n + \arg(\underline{H}(n\omega)))} \quad (1.43)$$

Et par linéarité du filtre on aboutit à : $\underline{s}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{s}_n(t)$ soit en prenant la partie réelle :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} |H(n\omega)| E_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \arg(\underline{H}(n\omega))) \quad (1.44)$$

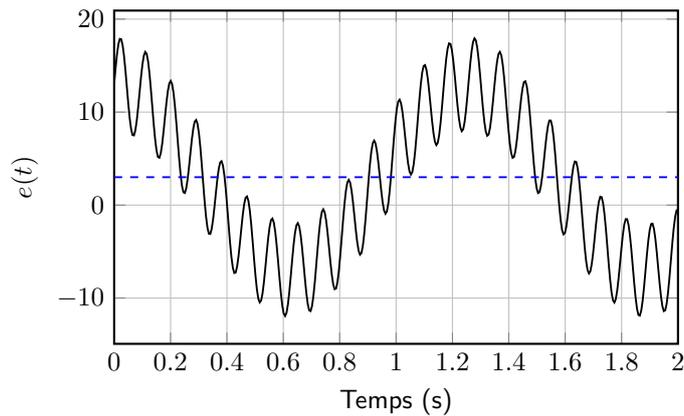
b) Raisonnement graphique

Raisonnons sur quelques exemples, sachant que l'on peut souvent conduire des raisonnements graphiques à l'aide de la superposition :

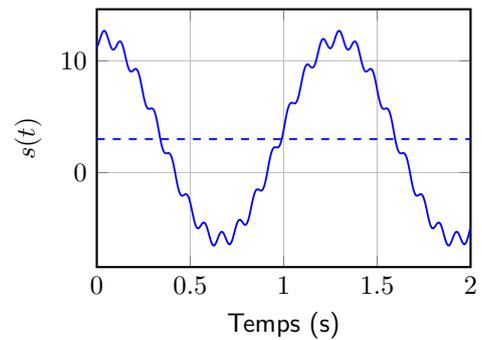
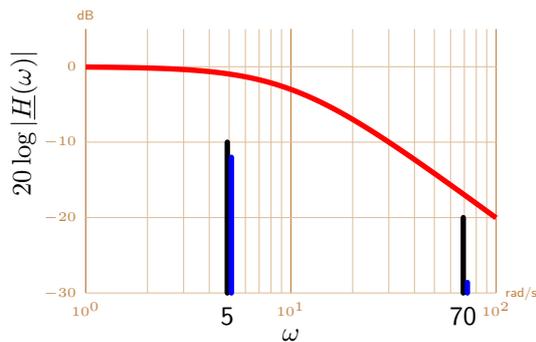
- du spectre en amplitude du signal entrant ;
- du diagramme de Bode en amplitude (ou du module de la fonction de transfert)

Il ne faut pas oublier l'effet du filtre sur la composante continue, pour $n = 0$!

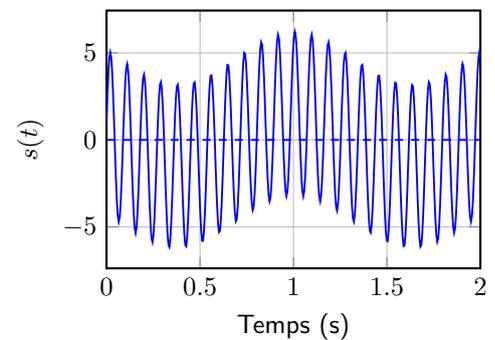
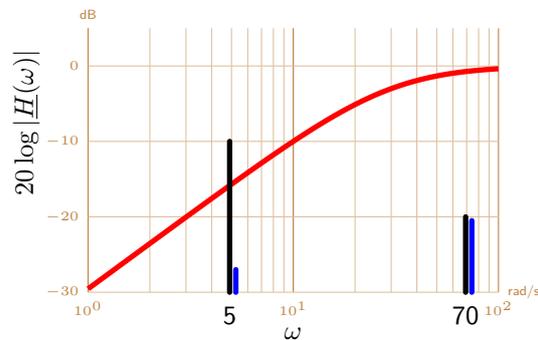
Considérons dans un premier temps la somme de trois signaux $e(t) = 3 + 10 \cos(5t) + 5 \sin(70t)$ avec t en seconde représenté ci-dessous :



- avec un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, le signal en sortie sera majoritairement celui continu auquel s'ajoute celui de pulsation $\omega = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ très peu modifié, même si ce n'est pas encore parfait pour supprimer la composante haute fréquence ;

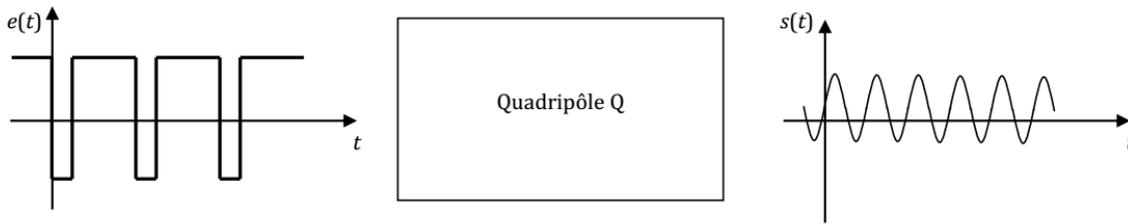


- avec un filtre passe-haut de pulsation de coupure $\omega_c = 30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, le signal en sortie sera majoritairement celui à haute fréquence auquel s'ajoute une partie de celui de pulsation $\omega = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ atténué et déphasé. Par contre la composante continue a été complètement supprimée. L'allure est donc la suivante :



On constate bien que l'on effectue des allers-retours entre l'espace fréquentiel et temporel d'un signal. À noter qu'il est parfois plus parlant d'utiliser la représentation du gain linéaire plutôt que logarithmique pour comprendre ce qui est conservé ou filtré, comme illustré ci-après.

ANALYSE TEMPORELLE



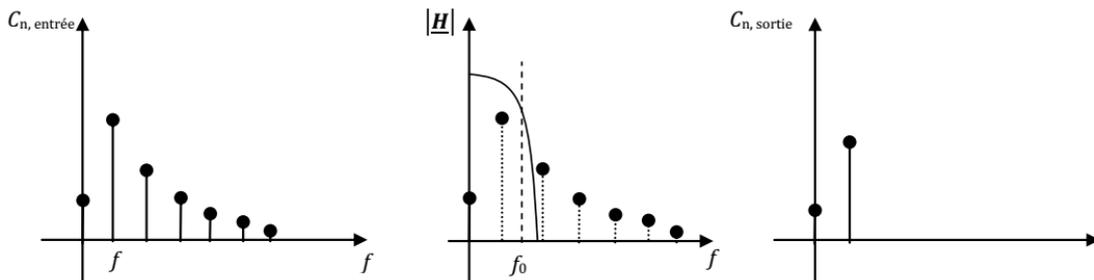
Equation différentielle régissant le
Comportement du quadripôle Q :

$$D_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + D_1 \frac{ds(t)}{dt} + D_0 = N_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + N_1 \frac{de(t)}{dt} + N_0$$

Analyse de Fourier

Synthèse de Fourier

Fonction de transfert $H(j\omega)$



ANALYSE FREQUENTIELLE

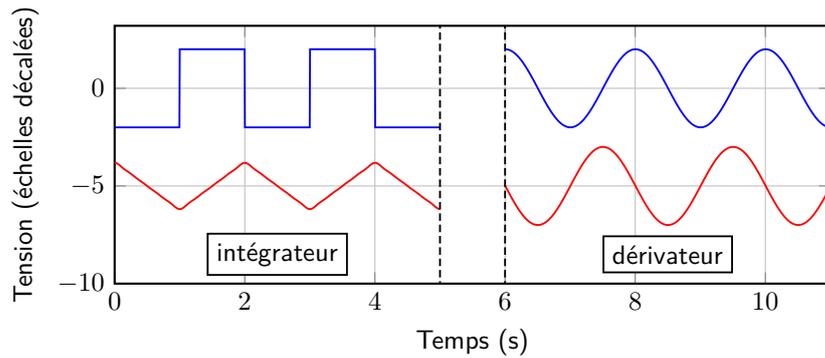
II.7 Quelques comportements à retenir

Manipulation

Passes-bas du premier ordre RC avec un signal carré pour un fonctionnement intégrateur et moyennneur ; passe-haut RC pour illustrer la dérivation et la contrainte plus forte sur le choix de la fréquence de coupure.

On va distinguer enfin quelques opérations qui sont utiles sur les signaux périodiques, et donc à connaître :

- Comportement **intégrateur** lorsque $\underline{s} \propto \frac{\underline{e}}{j\omega}$ car alors $s(t) \propto \int e(t)dt$. On le réalise avec un filtre passe-bas, lorsque la fréquence du fondamental est supérieure à la fréquence de coupure du filtre : toutes les composantes du spectre du signal d'entrée se trouvent dans la pente à -20 dB/décade.
- * ▪ Comportement **dérivateur** lorsque $\underline{s} \propto j\omega \underline{e}$ car alors $s(t) \propto \frac{de}{dt}$. Exemple : filtre passe-haut, lorsque la fréquence du fondamental est très petite devant la fréquence de coupure du filtre et que la plupart des composantes du spectre du signal d'entrée se trouvent dans la pente à +20 dB/décade.
- **Moyennneur** lorsqu'on ne garde que la composante continue du signal périodique : on utilise un filtre passe-bas tel que la fréquence du fondamental est très grande devant la fréquence de coupure.



II.8 Mise en cascade de filtres

Lorsqu'on conçoit des filtres complexes, on associe souvent plusieurs quadripôles pour respecter un gabarit. On aimerait bien qu'avec deux quadripôles de fonction de transfert \underline{H}_1 et \underline{H}_2 connectés l'un à l'autre, la fonction de transfert globale soit $\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$. Ce n'est bien souvent pas vrai, car la fonction de transfert d'un quadripôle est calculée à vide, c'est-à-dire pour un dipôle non connecté à un autre circuit, *i.e.* sans courant de sortie : $\underline{i}_s = 0$.

a) Modélisation d'un quadripôle

Définitions : impédances d'entrée et de sortie

Vu depuis l'extérieur, on peut modéliser un quadripôle électrique représenté FIG. 1.3 défini par sa fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \underline{s}/\underline{e}$ de la manière suivante :

- au niveau des bornes d'entrée, le quadripôle seul est modélisé par une **impédance d'entrée** \underline{Z}_e ;
- au niveau des bornes de sortie, le quadripôle est modélisé par une source réelle de tension de **force électromotrice** $\underline{H}\underline{e}$ et d'**impédance de sortie** \underline{Z}_s .

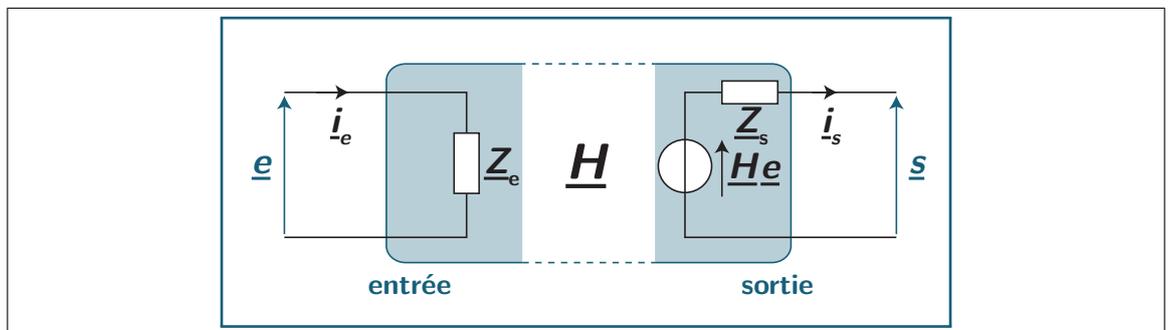


Figure 1.3 – Modélisation d'un quadripôle électrique

Pour \underline{Z}_e , il suffit de calculer $\underline{Z}_e = \underline{e}/\underline{i}_e$, tout en ne branchant rien à sa sortie. Pour l'impédance de sortie, nous avons

$$\underline{s} = \underline{H} \cdot \underline{e} - \underline{Z}_s \cdot \underline{i}_s \quad (1.45)$$

Ainsi en imposant $e = 0$, c'est-à-dire concrètement en reliant les deux bornes d'entrée par un fil, la sortie est simplement constituée de l'impédance \underline{Z}_s et on calcule $\underline{Z}_s = -\underline{s}/\underline{i}_s$.

Sur l'exemple d'un filtre passe-haut RL , déterminons les impédances d'entrée et de sortie à l'aide de FIG. 1.4.

L'impédance d'entrée correspond simplement à l'association de deux dipôles en série, donc

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + jL\omega \quad (1.46)$$

- * Court-circuitons désormais l'entrée, les deux dipôles se retrouvent ainsi connectés en dérivation, et l'impédance de sortie traduit cette association :

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} \quad (1.47)$$

Lorsque $\underline{i}_s = 0$, le système est en sortie ouverte et on retrouve bien $\underline{H}(\omega) = \underline{s}/\underline{e}$.

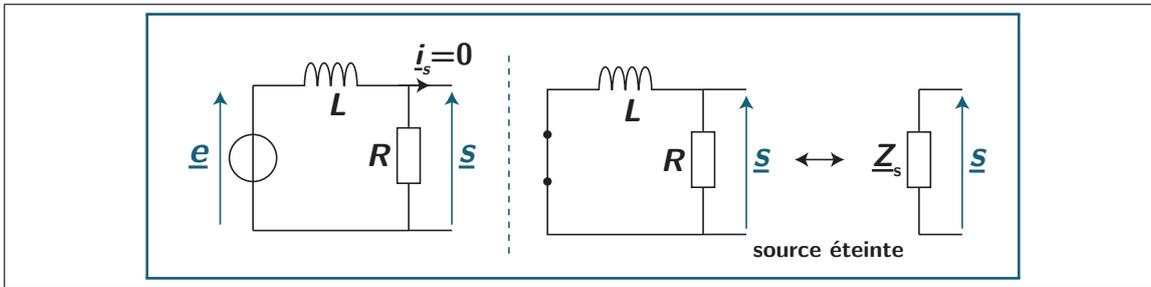


Figure 1.4 – Détermination de l'impédance d'entrée d'un circuit RL (à gauche) et de son impédance de sortie (à droite)

Voyons en quoi ces notions sont importantes lorsqu'on cherche à mettre en place une chaîne de filtrage complexe associant plusieurs filtres en cascade.

b) Mise en cascade

On considère la mise en cascade de deux quadripôles, illustrée FIG. 1.5. On cherche à déterminer la fonction de transfert de l'ensemble, $\underline{H} = s_2/e_1$.

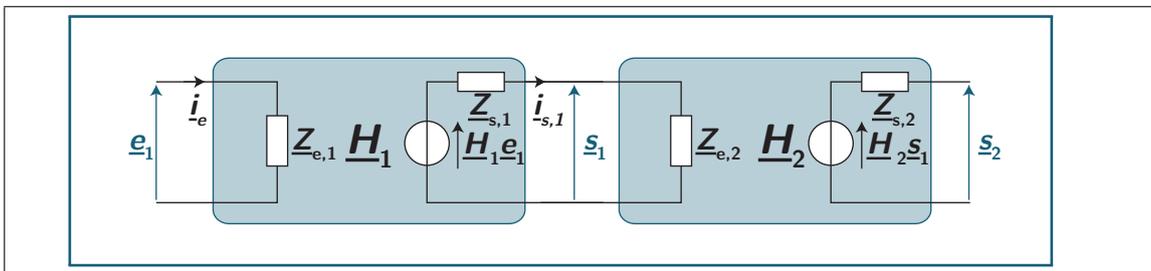


Figure 1.5 – Mise en cascade de deux filtres à partir de leur modélisation à l'aide d'impédances

On souhaiterait que $\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$, de sorte que l'on puisse additionner les courbes des diagrammes de Bode individuels. Déterminons à quelle condition c'est vérifié :

$$s_1 = \underline{H}_1 \cdot e_1 \frac{Z_{e,2}}{Z_{e,2} + Z_{s,1}} \quad (1.48)$$

* via un pont diviseur de tension, d'où :

$$\underline{H} = \frac{s_2}{e_1} = \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{s_1}{e_1} = \underline{H}_2 \underline{H}_1 \frac{Z_{e,2}}{Z_{e,2} + Z_{s,1}} \quad (1.49)$$

Pour que $\underline{H} \simeq \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$, il faut vérifier $\frac{Z_{e,2}}{Z_{e,2} + Z_{s,1}} \simeq 1$ soit que $|Z_{e,2}| \gg |Z_{s,1}|$.

Propriété : association de quadripôles

Lorsqu'on relie deux quadripôles de fonction de transfert \underline{H}_1 et \underline{H}_2 , la fonction de transfert de l'ensemble s'écrit $\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ sous réserve que **l'impédance d'entrée du second quadripôle soit très grande devant l'impédance de sortie du premier quadripôle.**

Qualitativement, on comprend donc que pour que l'on puisse effectuer le produit des fonctions de transfert, il faut minimiser le courant de sortie par un choix d'impédances approprié.

Concrètement, il est souvent nécessaire de placer entre deux filtres un circuit appelé suiveur, ayant la particularité d'avoir une impédance d'entrée infinie, une impédance de sortie nulle, et de fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = 1$.

III. Stabilité des systèmes linéaires

III.1 Définition

Soit un système comportant un signal d'entrée $e(t)$ et un signal de sortie $s(t)$ reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Stabilité

* On dit qu'un tel système est stable si la solution générale de l'équation différentielle homogène tend vers 0

$$s_h(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (1.50)$$

Il existe d'autres définitions, pas forcément équivalentes, par exemple $e(t)$ borné $\Rightarrow s(t)$ bornée ; ou la réponse impulsionnelle tend vers 0, etc.

III.2 Stabilité d'un système d'ordre 1

Un système d'ordre 1 est régi par une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants :

$$\frac{ds}{dt} + as(t) = be(t) + c \frac{de}{dt} \iff (j\omega + a)\underline{s} = (b + j\omega c)\underline{e} \quad (1.51)$$

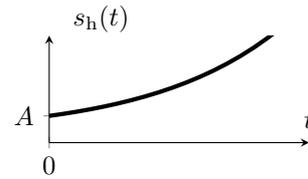
* dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(p) = \frac{b + cp}{a + p} \quad (1.52)$$

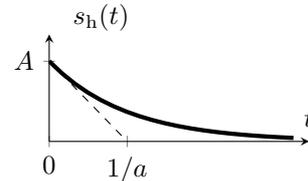
Remarquons que le pôle de $\underline{H}(p)$ correspondant à la valeur de p qui annule le dénominateur de \underline{H} est simplement $p = -a$.

La solution de l'équation homogène s'écrit simplement $s_h(t) = Ae^{-at}$:

Si $a < 0$, $s_h(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, on obtient une solution divergente.



Si $a > 0$, $s_h(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $s(t)$ finit par tendre vers la solution particulière.



Par exemple, un circuit RC avec la sortie en C est toujours stable car $\frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}s(t) = \frac{e}{RC}$.

III.3 Stabilité d'un système d'ordre 2

Refaisons la même chose mais avec un système régi par une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + a \frac{ds}{dt} + bs(t) = c \frac{d^2e}{dt^2} + d \frac{de}{dt} + fe(t) \quad (1.53)$$

dont on peut écrire la fonction de transfert associée :

$$\underline{H}(p) = \frac{cp^2 + dp + f}{p^2 + ap + b} \quad (1.54)$$

* dont les pôles sont cette fois-ci complexes, vérifient $p^2 + ap + b = 0$ avec les solutions :

$$p_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{si } \Delta = a^2 - 4b > 0 \quad (1.55)$$

$$p_{\pm} = \frac{-a \pm j\sqrt{4b - a^2}}{2} \quad \text{si } \Delta = a^2 - 4b < 0 \quad (1.56)$$

$$(1.57)$$

Étudions les solutions de l'équation homogène, en passant par la résolution du polynôme caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, qui conduit aux mêmes solutions que les pôles de $\underline{H}(p)$ en changeant r en p . Trois cas sont possibles :

Même avec des conditions initiales nulles $s(0) = 0$ et aucun signal d'entrée $e(t) = 0$, il y a toujours des petites fluctuations qui font que $s(0)$ n'est pas rigoureusement nul. On a par contre besoin d'une source d'énergie.

- si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles, la solution homogène s'écrit $s_h(t) = Ae^{p_+t} + Be^{p_-t}$ et tend vers zéro si les deux racines sont négatives. Donc le produit des racines du polynôme est positif et la somme des racines doit être négative, ce qui impose par identification avec les coefficients du polynôme :

$$p_+ \times p_- = b > 0 \quad (1.58)$$

$$p_+ + p_- = -a < 0 \quad (1.59)$$

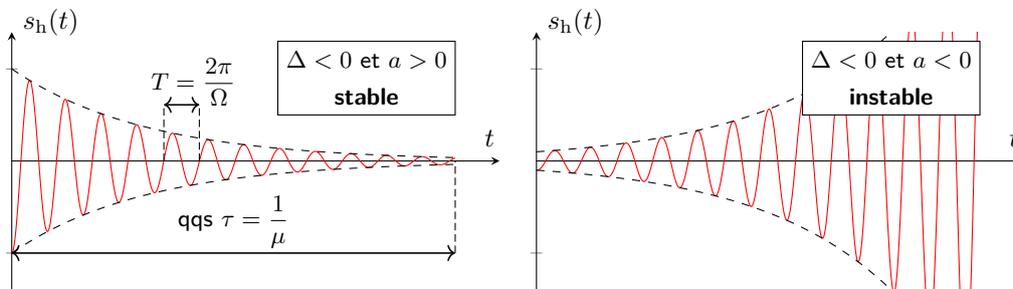
donc l'ensemble des coefficients de l'équation homogène doivent être positifs, ou plus généralement du même signe.

*

- si $\Delta = 0$, on a une racine double réelle $p = -a/2$ qui doit elle aussi être négative, donc $a > 0$ et $a^2 = 4b$ impose $b > 0$, donc même conclusion ;
- si $\Delta < 0$, la solution de l'équation homogène s'écrit :

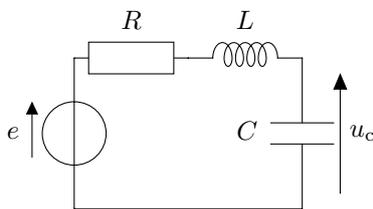
$$s_h(t) = Ae^{-at/2} \cos(\sqrt{-\Delta}/2t + \varphi) = Ae^{-\mu t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (1.60)$$

où, comme la fonction cosinus est bornée, il faut que $a > 0$ pour que le système soit stable, et avec $a^2 - 4b < 0$, $b > 0$ également.



Notons le cas particulier où $a = 0$, cas de l'oscillateur harmonique : il faut alors toujours que $b > 0$ pour avoir une solution homogène bornée (mais elle ne vérifie pas strictement le critère de stabilité énoncé... bien que ce ne soit pas physiquement raisonnable d'avoir un oscillateur harmonique sans aucun amortissement).

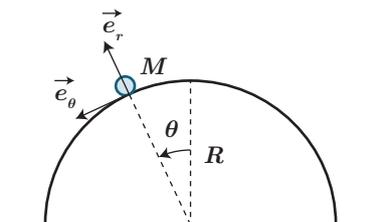
Exemples :



Circuit RLC série : l'équation différentielle sur u_c est

$$\ddot{u}_c + R/L\dot{u}_c + u_c/LC = e(t)/LC \quad (1.61)$$

le système est donc stable quelles que soient les valeurs de L , R et C , toutes des grandeurs positives ;



Chute d'une bille sur un demi-cylindre sans frottements : l'application de la LQM conduit en projection selon \vec{e}_θ à $mR\ddot{\theta} = +mgsin\theta$, soit pour le début du mouvement où $\theta \ll 1$ rad

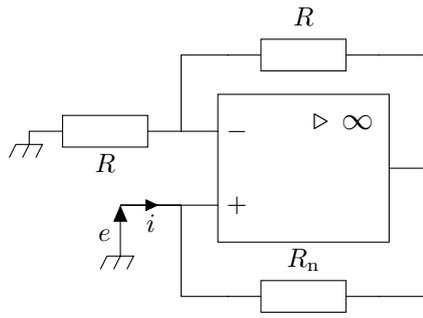
$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\theta = 0 \quad (1.62)$$

ce qui constitue une situation instable.

Manipulation

Instabilité d'un RLC avec résistance négative. L'équation différentielle se mettant sous la forme

$$\ddot{u}_c + (R - R_n)/L\dot{u}_c + 1/LCu_c = 0$$



III.4 Bilan

Soit un système caractérisé par sa fonction de transfert $\underline{H}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ (ou de manière équivalente par son équation différentielle linéaire à coefficients constants).

Stabilité des systèmes d'ordre 1 ou 2

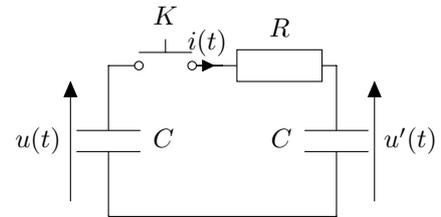
- * Pour un système d'ordre 1 ou 2, le système est stable si tous les coefficients du polynôme $Q(p)$ ont le même signe, ou de manière équivalente si tous les coefficients de l'équation différentielle homogène ont le même signe.

Notons que les pour les systèmes d'ordre supérieur, cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Plus généralement, un système est stable si tous les pôles de $\underline{H}(p)$ sont à partie réelle négative (ce que l'on a obtenu pour les systèmes d'ordre 1 ou 2).

Électricité : révisions de sup

1. 1 Décharge d'un condensateur dans un autre

Dans le circuit suivant, les deux condensateurs ont même capacité C . Pour $t < 0$, le condensateur situé à gauche est chargé sous la tension $u = U_0$ et le condensateur de droite est déchargé. On ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$. On pose $\tau = RC$.



1. Quelle est la charge portée par chacune des armatures des condensateurs pour $t < 0$? Comment va-t-elle évoluer après $t = 0$?
2. Quelles sont les valeurs de $u(t = 0^+)$, $u'(t = 0^+)$ et $i(t = 0^+)$?
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction de τ et de U_0 .
4. En déduire les expressions de $u(t)$ et de $u'(t)$. Tracer leur allure sur un même graphique.
5. À partir d'un bilan énergétique, déterminer l'énergie \mathcal{E}_{res} dissipée par la résistance au cours du régime transitoire.

-
1. $q_0 = CU_0$ et $q'_0 = 0$. q décroît et q' croît et tend à ce que $q = q'$ (en régime permanent, $u = u'$).
 2. $u(t = 0^+) = U_0$, $u'(t = 0^+) = 0$ (continuité de la tension / charge d'un condensateur); et $u(t = 0^+) = Ri(t = 0^+)$ donc $i(t = 0^+) = U_0/R$.
 3. Loi des mailles $u = Ri + u'$. avec $i = -C \frac{du}{dt} = C \frac{du'}{dt}$. Soit avec la relation précédente ou conservation de la charge, $u + u' = U_0 \iff q + q' = q_0$. À partir de ces relations : $u = -RC \frac{du}{dt} + U_0 - u$ soit

$$\frac{du}{dt} + 2/RCu = U_0/RC \quad (1.63)$$

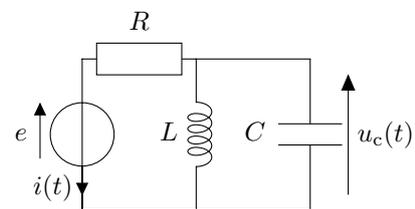
4. Après résolution on trouve $u(t) = U_0/2 (1 - e^{-t/\tau})$ et $u'(t) = U_0/2 (1 + e^{-t/\tau})$ avec $\tau = RC/2$.
5. $i(t) = -U_0/Re^{-t/\tau}$ donc $\mathcal{P}_{\text{res}} = U_0^2/Re^{-2t/\tau}$ puis

$$\mathcal{E}_{\text{res}} = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_{\text{res}} dt = \frac{CU_0^2}{4} \quad (1.64)$$

1. 2 Circuit RLC parallèle

On considère le circuit RLC ci-contre, alimenté par une tension $e(t) = E \cos(\omega t)$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_c . Comparer la pulsation propre et le facteur de qualité avec le cas du circuit RLC série. On donne $R = 50 \Omega$, $L = 0,1 \text{ mH}$, $C = 10 \text{ nF}$.
2. Étudier la résonance en intensité i et en tension u_c du circuit.
3. Établir l'expression de $u_c(t)$ sachant qu'à $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur et le courant traversant la bobine sont nuls.



-
1. Une façon assez rapide : utilisation des complexes. On regroupe les deux impédances en parallèle : $\underline{Y}_{\text{eq}} = jC\omega + 1/(jL\omega)$, et $\underline{u}_c = e/(1 + R\underline{Y}_{\text{eq}})$. On aboutit en repassant en réel à :

$$\ddot{u}_c + 1/RC\dot{u}_c + 1/LCu_c = 1/RCe \quad (1.65)$$

donc $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = R\sqrt{C/L}$: même pulsation propre que le circuit RLC série, mais Q inverse. Plus R est grand, plus on se rapproche d'un oscillateur harmonique car on isole électriquement le couple $L - C$.

2. En passant en notations complexes, il y a toujours une résonance en tension pour $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. On pose $e = Ee^{j\omega t}$ et l'amplitude complexe aux bornes du condensateur vaut :

$$u_{c,m} = \frac{Ej\omega\omega_0/Q}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\omega_0/Q} = \frac{E}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (1.66)$$

possédant en module un maximum pour $\omega = \omega_0$. Pour la résonance en intensité, par une loi des mailles $\underline{e} = (R + \underline{Z}_{eq})\underline{i}$, soit

$$i_m = \frac{E}{R} \frac{jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (1.67)$$

qui tend vers E/R pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$ mais vaut 0 en $\omega = \omega_0$: on parle couramment d'anti-résonance.

3. $Q = 1/2$ donc régime critique. Solution de la forme :

$$u_c(t) = ((At + B)e^{-\omega_0 t}) + U_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.68)$$

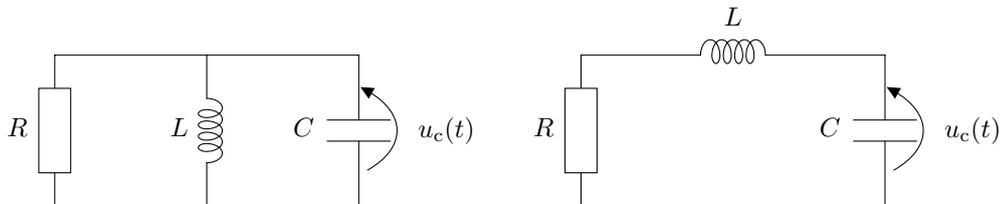
en posant $U_m = \frac{E}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ et $\varphi = \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$. Comme à $t = 0$, $u_c(t = 0) = 0$, et la loi des mailles et des nœuds conduit à :

$$i(t = 0) = \frac{e(0) - u_c(0)}{R} = \frac{E}{R} = i_C + i_L = i_C = C \frac{du_c}{dt} \quad (1.69)$$

En appliquant ces conditions initiales, on trouve $B = -U_m \cos \varphi$ et $A = E/RC - U_m(\omega_0 \cos \varphi + \omega \sin \varphi)$.

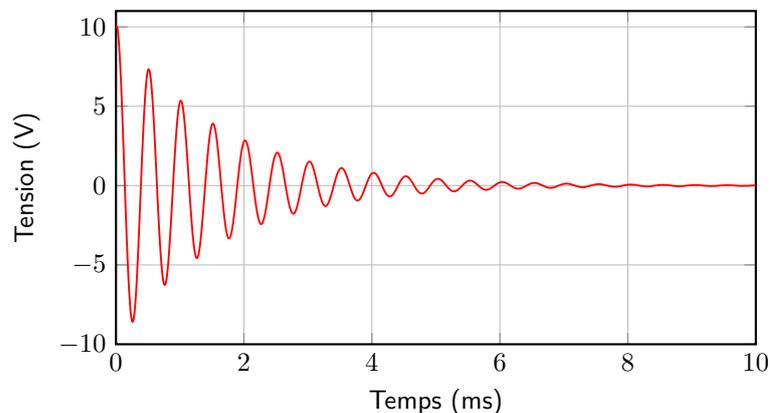
1. 3 Détermination d'un circuit à l'aide d'acquisitions

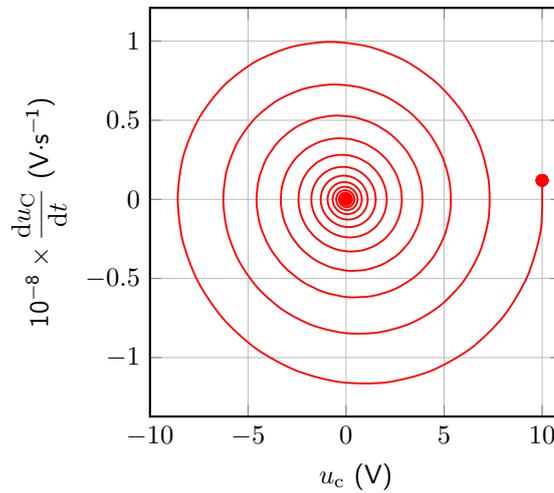
Un circuit comportant une résistance $R = 25 \Omega$, une bobine idéale d'inductance L et un condensateur de capacité C sont reliés tous les trois, soit en parallèle (circuit 1), soit en série (circuit 2). On donne l'allure de la tension aux bornes du condensateur $u_c(t)$ en régime transitoire, après avoir initialement chargé le condensateur sous une tension de 10 V. On suppose que la bobine n'a pas d'énergie stockée à $t = 0$. Déterminer le **seul** montage ainsi que la valeur de L et de C permettant d'obtenir une telle allure. La stratégie de résolution choisie devra être clairement expliquée.



Circuit 1

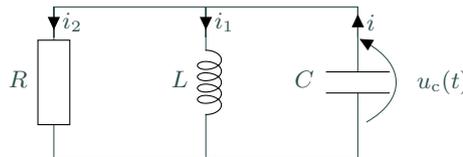
Circuit 2





On observe que la position initiale correspond au point du graphique a pour coordonnées $(10; 1,5 \cdot 10^7)$. Et donc que $\frac{du_c}{dt}(t = 0^+) \neq 0!$

Or, cette condition initiale ne peut être obtenue via le circuit 2, car la bobine impose la continuité du courant, donc $i(t = 0^-) = 0 = i(t = 0^+)$ et la présence du condensateur dans cette branche induit que $i(t = 0^+) = C \frac{du_c}{dt}(t = 0^+)$. Ainsi seul le **circuit 1 convient**.



Justifions-le : à $t = 0^+$, on a d'après les notations du circuit ci-dessus $i_1(t = 0^+) = 0$ (continuité pour la bobine), $u_c(t = 0^+) = 10V = E$ et $Ri_2(t = 0^+) = E$ soit $i_2(t = 0^+) = E/R$. Enfin la loi des nœuds permet d'écrire $i = i_1 + i_2$ soit à $t = 0^+$,

$$i(t = 0^+) = C \frac{du_c}{dt}(t = 0^+) = i_2(t = 0^+) = \frac{E}{R} \neq 0 \quad (1.70)$$

compatible avec le portrait de phase.

Ensuite pour déterminer les valeurs de composants, il suffit d'étudier le régime transitoire, qui est pseudo-périodique. On sait que Q est approximativement le nombre d'oscillations si $Q > 3$, soit ici $Q \simeq 12$ et $\Omega \simeq \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ avec $T \simeq \frac{5 \cdot 10^{-3}}{10} = 5 \cdot 10^{-4}$ s en comptant 10 périodes. Donc

$$\omega_0 \simeq \frac{2\pi}{5 \cdot 10^{-4}} = 4\pi \cdot 10^3 = 1,2 \cdot 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad (1.71)$$

Enfin il faut déterminer les expressions de ω_0 et Q en fonction de R , L et C pour le circuit 1. Par des lois des mailles et des nœuds ou l'utilisation des complexes :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0 \quad (1.72)$$

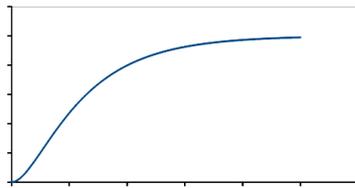
d'où $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$, différent du circuit RLC série !

$$\text{Ainsi } C = \frac{Q}{\omega_0 R} \simeq 40 \mu\text{F} \text{ et } L = \frac{1}{C\omega_0^2} \simeq 0,2 \text{ mH.}$$

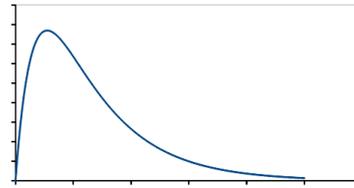
Systemes lineaires et stabilite

1. 4 Identification de la nature des filtres à partir de leur réponse indicielle

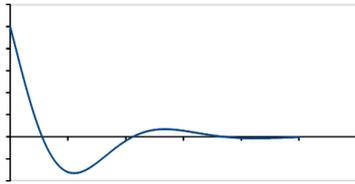
Chaque graphe ci-dessous représente la réponse indicielle (réponse à un échelon, à une fonction de Heaviside) d'un système donné. Préciser pour chacun si ce sont des passe-bas, passe-bande ou passe-haut, et s'ils sont du 1^{er} ou du 2nd ordre.



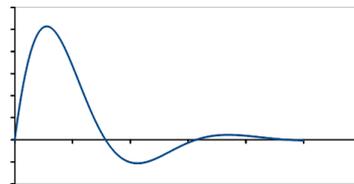
Système 1



Système 2



Système 3



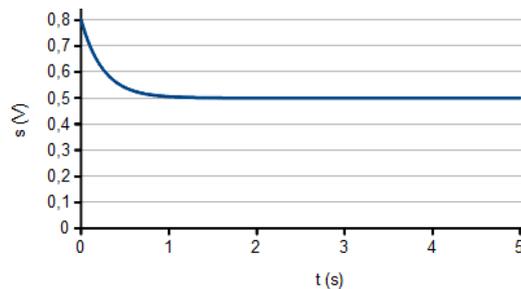
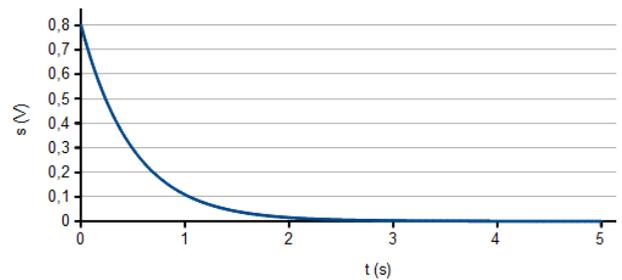
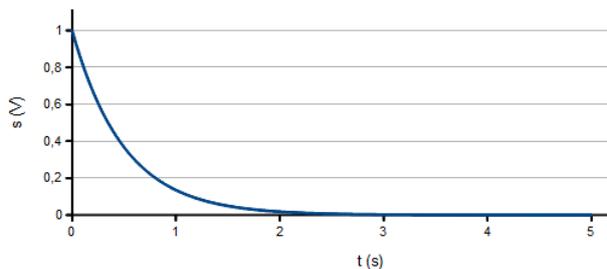
Système 4

- Système 1 : inflexion et tangente à l'origine qui semble nulle : filtre d'ordre 2 ! Ensuite, en régime permanent le signal tend vers une constante non nulle : **passé-bas d'ordre 2** en régime apériodique.
- Système 2 : toujours ordre 2. Ensuite pour un passe-bande $s(0) = 0$ alors que pour un passe-haut, $s(0) = e(0)$ (on peut s'en convaincre en raisonnant sur des circuits RLC avec sortie en R ou L). Donc **passé-bande** en régime apériodique ou critique. On peut aussi considérer que la discontinuité à $t = 0$ n'est pas conservée : or pour décrire une discontinuité, il faut des harmoniques élevées, ce que permet seulement un passe-haut.
- Système 3 : par le même raisonnement, c'est un **passé-haut d'ordre 2** en régime pseudo-périodique.
- Système 4 : passe-bande d'ordre 2 en régime pseudo-périodique.

1. 5 Identification d'un filtre à partir de sa réponse indicielle

Les graphes ci-dessous représentent la réponse $s(t)$ de 3 circuits du premier ordre à un échelon de tension unité (entrée de 1 V).

1. Dédurre des graphes la fonction de transfert $H(p)$ et l'équation différentielle entre la sortie $s(t)$ et l'entrée $e(t)$ (pour une entrée quelconque).
2. Proposer des circuits à base uniquement de résistors et de condensateurs pour chaque système.

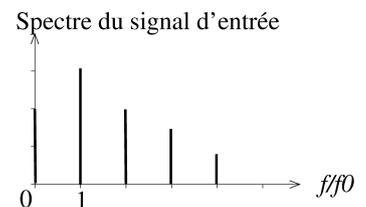


Comme on n'a que des condensateurs et résistances, notons deux faits :

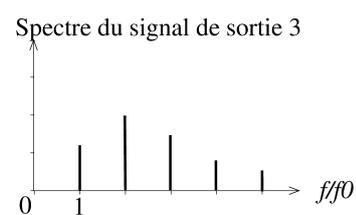
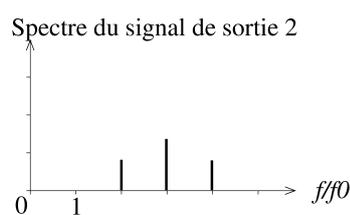
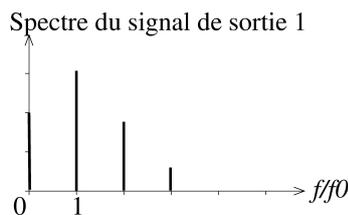
- $H(\omega \rightarrow 0) = s(t \rightarrow +\infty)$ car être en régime permanent indépendant du temps revient à prendre $w \rightarrow 0$;
 - $H(p \rightarrow +\infty) = s(t = 0)$, venant du théorème $s(t = 0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pH(p)E(p)$, avec $E(p) = \frac{1}{p}$ pour un échelon de tension.
- Graphe 1 : il s'agit d'un passe-haut, du type $H(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$ avec $\tau = 0,5$ s (tangente à l'origine), de sorte qu'en régime permanent, $H(0) = 0$ et qu'à $t = 0$, $H(+\infty) = 1$. ED : $\tau \dot{s} + s = e$;
 - Graphe 2 : passe-haut avec $H(p) = \frac{H_0 \tau p}{1 + \tau p}$ de sorte que $H_0 = 0,8$ et $\tau = 0,5$ s. Donc $\tau \dot{s} + s = H_0 e$;
 - Graphe 3 : circuit quelconque où $H(0) = 0,5$, $H(+\infty) = 0,8$. Comme circuit du premier ordre, on peut nécessairement mettre la fonction de transfert sous la forme $H(p) = \frac{a + bp}{1 + dp}$. $a = 0,5$ et $b/d = 0,8$. En notant $d = \tau$: $H(p) = \frac{0,5 + 0,8\tau p}{1 + \tau p}$. Alors $\tau \dot{s} + s = 0,5e + 0,8\dot{e}$
 - 2. Graphe 1 : RC série avec sortie en R et $RC = 0,5$ s ; graphe 2 : R_1CR_2 avec sortie aux bornes de R_2 de sorte à avoir un pont diviseur à $t = 0$ et $R_2/(R_1 + R_2) = 0,8$; graphe 3 : circuit $R_1 \parallel C_1$ en série avec $R_2 \parallel C_2$. En écrivant la fonction de transfert, il faut imposer $R_2/(R_1 + R_2) = 0,5$ et $C_1/(C_1 + C_2) = 0,8$. On peut aussi proposer d'autres circuits (comme $R_1 + C_1 + R_2 + C_2$ en série, avec la sortie sur l'association $R_2 + C_2$).

1.6 Linéarité et caractéristiques d'un filtre

On considère un signal $e(t)$, dont le spectre est donné ci-contre. Ce signal est envoyé à l'entrée de 3 filtres 1, 2 et 3. On donne ci-dessous les spectres obtenus à la sortie de chaque filtre.



1. Préciser pour chaque filtre s'il est linéaire ou non linéaire.
2. Préciser le type de chaque filtre et un ordre de grandeur des fréquences de coupure.



1. Seul le 3e est non-linéaire, car il y a apparition de nouvelles fréquences dans le spectre de sortie.
2. Filtre 1 : passe-bas car la composante continue n'est pas filtrée, les hautes fréquences atténuées, $f_c \simeq 2 - 3f_0$. Filtre 2 : passe-haut ou passe-bande et $f_c \simeq 3f_0$, mais sans doute un ordre élevé ou Q grand pour filtrer aussi efficacement la fréquence f_0 . Filtre 3 : on ne peut rien dire, c'est non-linéaire.

1.7 Filtrage de la tension d'une alimentation continue

Pour réaliser une alimentation continue, on redresse le signal fournie par une alimentation sinusoidale. La tension obtenue est modélisé par l'expression $u(t) = U_0 + U_1 \cos(2\pi ft)$ avec $f = 100$ Hz, $U_0 = 10$ V et $U_1 = 1$ V. On filtre donc cette tension avec un quadripôle de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}jx - x^2}$, où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

1. Quelle est la nature du filtre ?
2. Tracer le diagramme de Bode en amplitude.
3. Comment faut-il choisir ω_0 pour avoir en sortie un fondamental 1000 fois plus faible que la composante continue ?

1. Il s'agit d'un passe-bas d'ordre 2, comme $\underline{H}(0) = 1$ et $\underline{H}(+\infty) = 0$.
2. Classique, avec ici pas de résonance car $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Asymptote en $-40 \log(x)$ pour $x \gg 1$.
3. On cherche donc ω_0 tel que

$$|\underline{H}|(x)U_1 < \frac{U_0}{1000} \iff 10^4 < 2x^2 + (1 - x^2)^2 \iff 10^4 < x^4 + 1 \iff x > (10^4 - 1)^{1/4} \quad (1.73)$$

$$\iff \omega_0 < \frac{2\pi f}{(10^4 - 1)^{1/4}} = 62,8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad (1.74)$$

1. 8 Stabilité d'un système mécanique

On note $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg la masse du soleil, $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg la masse de la terre, et $d = 1,5 \cdot 10^{11}$ m la distance terre-soleil, supposée constante. On donne la constante de gravitation universelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³/kg/s².

On se place dans un référentiel où le centre de la Terre est fixe par rapport au soleil et on suppose pour simplifier que ce référentiel est galiléen.

1. Exprimer la résultante des forces s'exerçant sur un système de masse m située dans l'axe Terre-Soleil.
2. Montrer qu'il existe un point où ce système est à l'équilibre.
3. Établir une équation différentielle linéaire en se limitant à de petits déplacements autour de ce point le long de l'axe Soleil-Terre et en déduire que cette position est instable.

1. Deux forces s'exercent sur la masse, correspondant aux interactions avec le Soleil ou la Terre.

$$\vec{F} = -\frac{GM_S m}{x^2} \vec{e}_x + \frac{GM_T m}{(d-x)^2} \vec{e}_x \quad (1.75)$$

en notant $x = SM$ la distance masse-Soleil.

2. Il existe une position d'équilibre telle que $\vec{F} = \vec{0}$, en $x = x_{\text{eq}} = \frac{d}{\sqrt{M_T/M_S + 1}}$.

3. En posant $y = x - x_{\text{eq}} > 0$, avec $y \ll x_{\text{eq}}$ et $y \ll (d - x_{\text{eq}})$, un développement limité à l'ordre 1 de la force conduit à :

$$F(x) = F(x_{\text{eq}}) + \frac{dF}{dx}(x_{\text{eq}})(x - x_{\text{eq}}) = 0 + 2Gm \left(\frac{M_S}{x_{\text{eq}}^3} + \frac{M_T}{(d - x_{\text{eq}})^3} \right) y \quad (1.76)$$

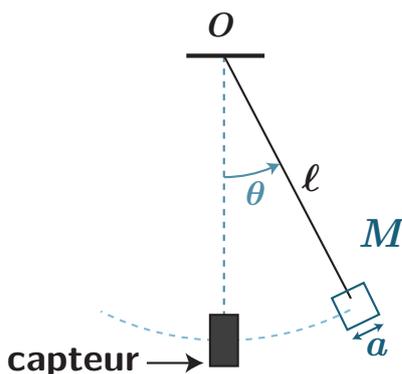
et donc à l'équation différentielle, après simplification :

$$\ddot{y} - \frac{2GM_S}{x_{\text{eq}}^3} \left(1 + \sqrt{\frac{M_S}{M_T}} \right) y = 0 \quad (1.77)$$

Le signe des coefficients de cette ED n'est pas le même, c'est donc un système instable, ce qui veut bien dire que la position d'équilibre est instable.

1. 9 Problème : le capteur de position

On considère une masse cubique de côté $a = 1$ cm, accrochée à un fil de sorte à réaliser un pendule simple (le schéma n'est pas à l'échelle) dont la pulsation du mouvement est $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ avec g l'intensité de l'accélération de la pesanteur.



On place un capteur infra-rouge au niveau de $\theta = 0$, de sorte qu'il puisse intercepter le mouvement de la masse. Il délivre en sortie une tension électrique telle que :

- en l'absence d'obstacle, $U_c = 0$;
- tant que l'obstacle est dans le champ du capteur $U_c = U_0 = 5,0$ V.

1. (a) Représenter l'évolution temporelle du signal $U_c(t)$ en sortie du capteur. On notera ΔT le temps pendant lequel la masse est dans le champ du capteur.

- (b) Placer sur le schéma la période d'oscillation du pendule T_0 . Quel est le lien entre la période T du signal électrique et T_0 ?
2. Pour déterminer le temps ΔT , on peut modéliser le mouvement de la masse à l'approche du capteur par un mouvement de translation. Exprimer la vitesse au niveau du capteur en fonction de θ_0 , l'angle depuis lequel on lâche initialement le pendule.
3. Montrer alors que le signal en sortie du capteur possède une valeur moyenne s'écrivant :

$$U_{c,m} = \frac{U_0 a}{\pi \ell \theta_0} \quad (1.78)$$

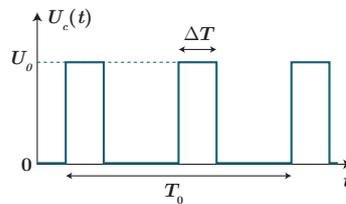
4. Pour obtenir la valeur moyenne à partir du signal périodique, on va réaliser une opération de filtrage. Pour choisir convenablement ses caractéristiques, il convient de noter que la sortie du filtre donnant la valeur moyenne va être reliée à un convertisseur analogique-numérique qui délivre un signal codé sur 8 bits (soit 2^8 valeurs possibles) entre 0 et 5,0V.

- (a) Exprimer littéralement le plus petit écart mesurable en tension $\Delta U_{c,m}$.
- (b) Proposer un filtre permettant de répondre à la problématique, employant une résistance R et un condensateur de capacité C . On précisera bien les branchements.
- (c) Calculer la fonction de transfert du filtre ainsi proposé et la pulsation de coupure à -3 dB en fonction de R et C .
- (d) On précise que le signal périodique issu du capteur s'exprime sous la forme d'une décomposition en série de Fourier :

$$U_c(t) = U_{c,moy} + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(4\pi \frac{t}{T_0}\right) \quad (1.79)$$

En ne raisonnant que sur la composante harmonique de plus basse fréquence, déterminer la condition littérale sur le produit RC pour que l'oscillation autour de la valeur moyenne en sortie du filtre soit inférieure à $\Delta U_{c,m}$.

5. Cherchons enfin la précision sur le capteur en sortie de la chaîne de mesure.
- (a) On note $\Delta\theta_{0,m}$ le plus petit écart angulaire mesurable à partir de la valeur moyenne. Exprimer le lien entre $\Delta U_{c,m}$, $\Delta\theta_{0,m}$, θ_0 et $U_{c,m}$.
- (b) Exprimer alors $\Delta\theta_{0,m}$ en fonction de θ_0 , ℓ , et a . Effectuer l'application numérique (1 chiffre significatif) en considérant $\theta_0 \sim 0,1$ rad.



1. (a)

- (b) La masse passe deux fois devant le capteur pendant une oscillation donc $T = \frac{T_0}{2}$.

2. On peut déterminer $\theta(t)$ pour un pendule simple lâché sans vitesse initiale depuis un angle θ_0 :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad (1.80)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$. La vitesse s'écrit alors

$$\vec{v} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta = -\ell \omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t) \vec{e}_\theta \quad (1.81)$$

donc la norme de la vitesse lorsqu'on passe en $\theta = 0$ (correspondant aux instants t où $|\sin(\omega_0 t)| = 1$) :

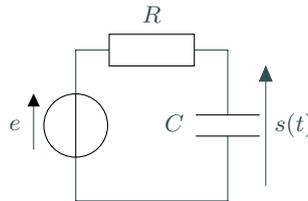
$$v_m = \ell \omega_0 \theta_0 \quad (1.82)$$

3. Le temps pendant lequel la masse passe devant le capteur est alors $\Delta T = \frac{a}{v_m} = \frac{a}{\ell\omega_0\theta_0}$. La valeur moyenne de $U_c(t)$ s'écrit :

$$U_{c,m} = \frac{1}{T} \int_0^T U_c(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\Delta T} U_0 dt = \frac{2}{T_0} U_0 \Delta T = \frac{U_0 a}{\pi \ell \theta_0} \quad (1.83)$$

en remplaçant T_0 par $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

4. (a) On code entre 0 et $2^8 = 256$, soit 255 intervalles, donc $\Delta U_{c,m} = \frac{U_0}{255} \simeq 20 \text{ mV}$.
 (b) On cherche à réaliser un moyenneur, le plus simple est d'utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure suffisamment basse. On peut donc utiliser un circuit RC série, où la sortie est aux bornes du condensateur de capacité C et l'entrée aux bornes de l'association série R-C.



- (c) On obtient simplement $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$. La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$ d'après le cours.
 (d) On veut que le signal sinusoïdal de fréquence $\frac{2}{T_0}$ et pulsation $\frac{4\pi}{T_0}$ correspondant au fondamental ($n = 0$), soit suffisamment atténué, c'est-à-dire que son amplitude en sortie du filtre soit inférieure à $\Delta U_{c,m}$. Or l'amplitude en sortie A_s s'exprime à partir de la fonction de transfert par :

$$A_s = |\underline{H}| \left(\omega = \frac{4\pi}{T_0} \right) \times \frac{2U_0}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(RC \frac{4\pi}{T_0} \right)^2}} \frac{2U_0}{\pi} < \Delta U_{c,m} \quad (1.84)$$

où $2U_0/\pi$ est l'amplitude du signal à la pulsation $4\pi/T_0$. Ainsi :

$$\frac{1}{1 + \left(RC \frac{4\pi}{T_0} \right)^2} < \left(\frac{\pi \Delta U_{c,m}}{2U_0} \right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2U_0}{\pi \Delta U_{c,m}} \right)^2 < 1 + \left(RC \frac{4\pi}{T_0} \right)^2 \quad (1.85)$$

d'où finalement

$$RC > \frac{T_0}{4\pi} \sqrt{\left(\frac{2U_0}{\pi \Delta U_{c,m}} \right)^2 - 1} \quad (1.86)$$

Cela semble cohérent, il faut que le filtre ait une fréquence d'autant plus faible (et donc RC d'autant plus grand), que $\Delta U_{c,m}$ est petit.

5. (a) La valeur moyenne se met sous la forme $U_{c,m} = K/\theta_0$ donc :

$$\frac{\Delta U_{c,m}}{U_{c,m}} = \frac{\Delta \theta_0}{\theta_0} \quad (1.87)$$

- (b) Alors

$$\Delta \theta_0 = \theta_0 \frac{\Delta U_{c,m}}{U_{c,m}} = \theta_0 \frac{U_0}{\frac{255}{U_0 a}} = \frac{\pi \ell \theta_0^2}{255 a} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (1.88)$$

Amplificateurs linéaires intégrés

Sommaire

2.1	Présentation de l'ALI	2
2.1.1	Le composant	2
2.1.2	Fonctionnement linéaire de l'ALI	3
2.1.3	Fonctionnement saturé de l'ALI	3
2.1.4	Défauts et limitations	4
2.1.5	Modèle de l'ALI idéal de gain infini	4
2.2	Montage amplificateur non inverseur	5
2.2.1	Schémas électrique et fonctionnel	5
2.2.2	Fonction de transfert	5
2.2.3	Produit gain \times bande-passante	6
2.3	Comparateur à hystérésis inverseur	7
2.3.1	Schémas électrique et fonctionnel	7
2.3.2	Cycle d'hystérésis	8
2.4	Montages usuels dans le cas d'un ALI idéal de gain infini	9
2.4.1	Généralités	9
2.4.2	Montages en régime linéaire	9
2.4.3	Montages en régime saturé	12

Questions de cours :

- Donner le schéma électrique de l'ALI, la caractéristique statique et les ordres de grandeur associés. Préciser les résistances d'entrée et de sortie.
- Décrire le modèle de l'ALI dans son comportement dynamique (fonction de transfert, allure du diagramme de Bode), ainsi que les limitations de l'ALI.
- Sur l'exemple du montage amplificateur non inverseur, montrer qu'une rétroaction négative suggère un régime de fonctionnement linéaire, et augmente la bande-passante. Montrer que le produit gain \times bande-passante est constant.
- Décrire le modèle de l'ALI idéal à gain infini et ses conséquences.
- Sur l'exemple de l'amplificateur inverseur, déterminer la relation entrée-sortie et les impédances d'entrée et de sortie.
- Présenter le comparateur à hystérésis non inverseur : montage, cycle d'hystérésis, exemple d'utilisation.

Capacités exigibles du BO :

- Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse.
- Représenter sur le montage amplificateur non inverseur les relations entre les tensions d'entrée et de sortie par un schéma fonctionnel associant un soustracteur, un passe-bas du premier ordre et un opérateur proportionnel.
- Analyser la stabilité du régime linéaire du montage amplificateur non inverseur.
- Établir la conservation du produit gain-bande passante du montage non inverseur.
- Identifier la manifestation de la vitesse limite de balayage d'un ALI dans un montage.
- Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de probable stabilité du régime linéaire.
- Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur.
- Exprimer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt d'une forte impédance d'entrée et d'une faible impédance de sortie pour une association en cascade.
- Identifier l'absence de rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction sur la borne non inverseuse comme l'indice d'un probable comportement en saturation.
- Établir la relation entrée-sortie d'un comparateur simple. Pour une entrée sinusoïdale, faire le lien entre la non linéarité du système et la génération d'harmoniques en sortie.
- Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis.
- Décrire le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de fonction mémoire.

Théorème de Millman (HP)

Soit un noeud N où arrivent n branches d'impédances Z_k (admittances $Y_k = 1/Z_k$), chacune soumise à une différence de potentiel $V_k - V_N$. Alors le potentiel au point N s'écrit :

$$V_N = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k V_k}{\sum_{k=1}^n Y_k} \quad (2.1)$$

Attention, cette formule doit être modifiée s'il y a des sources de courant.



Démonstration

On part de la loi des nœuds $\sum_{k=1}^n i_k = 0$. Or la tension au niveau d'une branche s'écrit : $V_k - V_N = Z_k i_k$ soit $i_k = Y_k (V_k - V_N)$. En réinjectant dans la loi des nœuds :

$$\sum_k Y_k V_k - \left(\sum_k Y_k \right) V_N = 0 \iff V_N = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k V_k}{\sum_{k=1}^n Y_k} \quad (2.2)$$



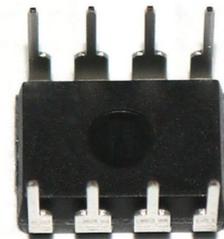
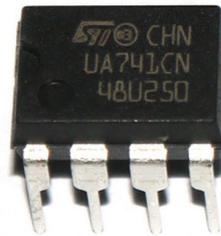
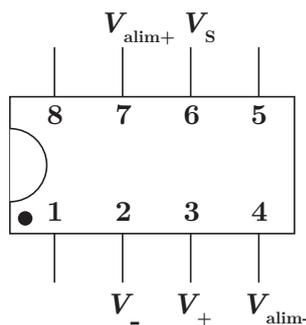
Mise en garde : cette loi, hors programme, reste beaucoup utilisée pour son côté pratique et synthétique. Néanmoins la loi des nœuds en termes de potentiels (première étape de (2.2)) est ce qui est recommandé officiellement.

I. Présentation de l'ALI

Des circuits intégrés ont été développés afin de réaliser certaines opérations sur des signaux (amplification, filtrage, addition, soustraction). Nous allons dans ce chapitre étudier l'un d'entre eux : l'amplificateur linéaire intégré, encore appelé amplificateur opérationnel (AO).

I.1 Le composant

Ci-dessus est représenté le composant et le schéma de câblage. Généralement on l'utilise sous la forme d'un composant à 8 broches.



Il en existe d'autres : par exemple le TL084 comporte 16 broches tout en contenant l'équivalent de 4 ALI.

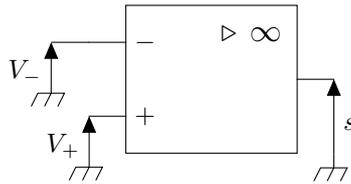


Manipulation

Montrer avec le logiciel Fritzing comment le placer sur la platine et rappeler quelques conseils.

- il y a déjà deux broches, 4 et 7, liées à l'alimentation continue $\pm 15V$: l'ALI est un composant **actif** ;
- deux entrées V_- et V_+ (broches 2 et 3) appelées entrées inverseuse et non inverseuse ;
- la sortie s (broche 6) sera liée aux deux bornes d'entrée ;
- les broches 1 et 5 servent enfin à corriger un défaut de l'ALI que l'on rencontrera peu après. La broche 8 est inutilisée.

Le symbole du composant est représenté ci-dessous, les tensions indiquées correspondent aux potentiels au niveau des broches d'entrée et de sortie, que l'on mesure concrètement en prenant la différence de potentiel entre le potentiel de la broche et la masse du circuit.



On n'indique jamais les tensions d'alimentation, mais elles sont indispensables pour le bon fonctionnement du composant.

On va, via la datasheet du composant TL081 fournie en annexe, décortiquer les éléments essentiels de ce composant.

1.2 Fonctionnement linéaire de l'ALI

* Dans certaines conditions, on a un fonctionnement dit linéaire pour l'ALI, c'est-à-dire que la tension de sortie s est reliée à l'écart à l'entrée $\varepsilon = V_+ - V_-$ par une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = \mu_0 \varepsilon \quad (2.3)$$

Il s'agit d'une bonne approximation pour les gammes de fréquences utilisées en TP.

Fonction de transfert d'un ALI

La fonction de transfert qui relie l'entrée différentielle $\underline{\varepsilon}$ à la sortie \underline{s} , notée couramment $\underline{\mu}(\omega)$ vaut :

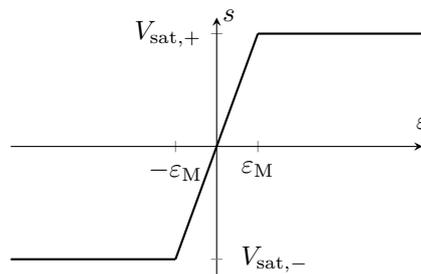
$$\underline{H}(\omega) = \underline{\mu}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{\varepsilon}} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} = \frac{\mu_0}{1 + \tau p} \quad (2.4)$$

* avec $\mu_0 \simeq 10^5$ et $\tau \simeq 10^{-2}$ s.

Cela correspond à un passe-bas de fréquence de coupure $f_0 = \frac{2\pi}{\tau} \simeq 10$ Hz. En régime continu, on a donc $s = \mu_0 \varepsilon$, c'est-à-dire une très grande amplification du signal d'entrée.

1.3 Fonctionnement saturé de l'ALI

* La tension en sortie est limitée : $V_{\text{sat},-} \leq s \leq V_{\text{sat},+}$ avec $V_{\text{sat},+} \simeq -V_{\text{sat},-} \simeq V_{\text{alim}}$ (de l'ordre de 15V). D'où l'allure globale de la caractéristique entrée-sortie en statique :



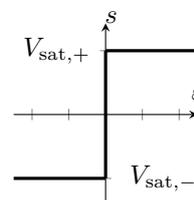
Conséquence, en régime linéaire :

$$|\varepsilon| < \varepsilon_M = \frac{V_{\text{sat}}}{\mu_0} = \frac{15}{10^5} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V} = 0,15 \text{ mV} \quad (2.5)$$

C'est une très faible valeur, ce qui sous-entend que l'ALI fonctionne *a priori* majoritairement en régime saturé lorsqu'on l'utilise seul. Nous verrons dans la suite qu'il est possible de se placer en régime linéaire malgré tout.

Signalons enfin une modélisation courante, consistant à dire que le gain statique est infini ($\mu_0 \rightarrow +\infty$), c'est-à-dire, avec une sortie s bornée, que

$$\varepsilon = 0 \quad \text{soit} \quad V_+ = V_- \quad (2.6)$$



I.4 Défauts et limitations

a) Saturation en courant

Outre la tension de sortie, limitée par l'alimentation, le courant de sortie est aussi limité :

$$|i_S| \leq i_{\text{sat}} \simeq 40 \text{ mA} \quad (2.7)$$

Cette limitation apparaît quand on branche un dipôle de faible impédance en sortie. Par exemple avec une résistance $R = 10 \Omega$, on aura une saturation dès que $Ri_S = 400 \text{ mV}$

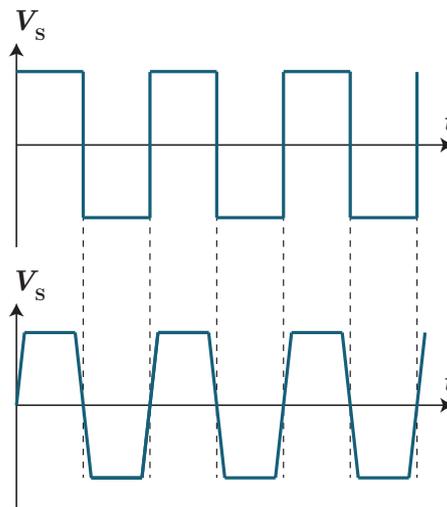
b) Vitesse de balayage (slew rate)

Un élément crucial (d'ailleurs en première page de la caractéristique fournie pour l'ALI) est la **vitesse de balayage** ou **slew rate**, qui correspond à la vitesse maximale à laquelle le signal de sortie peut varier :

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| < \sigma \simeq 10^6 \text{ à } 10^7 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1} \quad (2.8)$$

Ici la datasheet nous permet de lire $\sigma = 16 \text{ V}\cdot\mu\text{s}^{-1} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1}$.

Par exemple pour un signal créneau d'assez haute fréquence en sortie d'un ALI :



Il existe évidemment d'autres défauts, dont un appelé **tension de décalage** : la caractéristique de l'ALI ne passe pas exactement par $(0, 0)$, et on appelle V_d la tension à appliquer en entrée pour avoir $s = 0$. On peut la régler en insérant un potentiomètre entre les bornes 1 et 5.

I.5 Modèle de l'ALI idéal de gain infini

- * L'ALI possède une impédance d'entrée très grande, typiquement $R_e = 10^{12} \Omega$, et une impédance de sortie faible $R_s \simeq 10^1 \text{ à } 10^2 \Omega$.

Modèle de l'ALI idéal de gain infini

On approxime souvent l'ALI à un composant idéal dont :

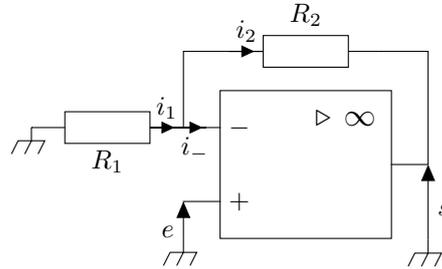
- les **impédances d'entrées sont infinies**, impliquant $i_+ = 0 = i_-$;
- * ▪ l'**impédance de sortie est nulle**, impliquant que la tension de sortie ne dépend pas de l'intensité du courant de sortie ;
- le **gain statique est considéré comme infini** de sorte qu'en **régime linéaire** $\varepsilon = 0$ ou $V_+ = V_-$ remplace la fonction de transfert de l'ALI.

Il faut alors se demander si l'ALI utilisé dans un circuit fonctionne en régime linéaire ou saturé, c'est-à-dire encore, si le système est stable et la sortie ne diverge pas ou instable et alors la sortie est limitée par la non-linéarité du composant. Les deux exemples qui suivent sont emblématiques car ils montrent les deux types de comportement au travers de systèmes dits bouclés, car possédant une boucle de rétroaction entre la sortie et au moins l'une des entrées.

II. Montage amplificateur non inverseur

II.1 Schémas électrique et fonctionnel

On considère dans la suite un ALI idéal. Le circuit amplificateur non-inverseur est représenté ci-dessous, avec une **rétroaction négative**, c'est-à-dire qu'un composant relie l'entrée inverseuse V_- et la sortie s :



Pour étudier le circuit, on détermine deux équations :

- la fonction de transfert de l'ALI $\underline{\mu}(\omega)$;
- une relation reliant ε aux tensions d'entrée, de sortie et des impédances des dipôles du montage.

Pour la deuxième équation, on exprime d'abord le potentiel au niveau de chaque borne. De manière évidente $\underline{V}_+ = \underline{e}$, quant à \underline{V}_- , plusieurs méthodes sont possibles et sont listées ci-dessous.

- la loi des nœuds réécrite avec des potentiels : $i_1 = i_2 + i_-$ et comme $i_- = 0$ pour un ALI idéal

$$i_1 = i_2 \iff \frac{0 - \underline{V}_-}{R_1} = \frac{\underline{V}_- - \underline{s}}{R_2} \iff \underline{V}_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} \quad (2.9)$$

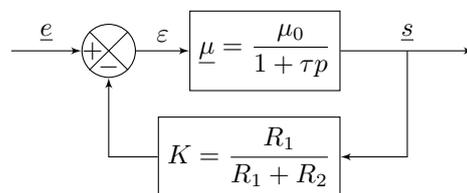
- dans le cas présent un pont diviseur de tension est possible, du fait que le courant traversé par les deux résistances est le même (comme $i_- = 0$) et la tension aux bornes de l'ensemble est s ;
- on peut enfin utiliser le théorème de Millman :

$$\underline{V}_- = \frac{\frac{\underline{s}}{R_2} + \frac{0}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} \quad (2.10)$$

On a donc finalement les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{s} = \frac{\mu_0}{1 + \tau p} \underline{\varepsilon} & (2.11) \\ \underline{\varepsilon} = \underline{e} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} & (2.12) \end{cases}$$

pouvant être retranscrit par le schéma-bloc suivant :



Le comparateur renvoie en sortie $+e - Ks = \varepsilon$, la **chaîne directe** (actionneur) relie la valeur de $\underline{\varepsilon}$ à \underline{s} , tandis que la **chaîne de retour** (ou boucle de rétroaction, ou capteur) va permettre la stabilité du montage en diminuant la valeur de ε .

II.2 Fonction de transfert

Avec la boucle de rétroaction, la fonction de transfert du montage est à distinguer de celle en boucle ouverte $\underline{\mu}$:

$$\underline{s} = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \underline{\varepsilon} = \underline{e} - K \underline{s} \quad (2.13)$$



Exercice

Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ et la mettre sous la forme $\frac{H_0}{1 + \tau'p}$ en précisant les expressions de H_0 et τ' .

$$\underline{s} = \underline{\mu}(\underline{e} - K\underline{s}) \quad (2.14)$$

conduisant à

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{\mu}}{1 + \underline{\mu}K} \quad (2.15)$$

ainsi en utilisant l'expression de $\underline{\mu}(p)$:

$$\underline{H}(p) = \frac{\frac{\mu_0}{1 + \tau p}}{1 + K \frac{\mu_0}{1 + \tau p}} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 K + \tau p} = \frac{H_0}{1 + \tau' p} \quad (2.16)$$

en posant $H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 K}$ et $\tau' = \frac{\tau}{1 + \mu_0 K}$.

* On reconnaît la fonction de transfert d'un passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = 1/\tau'$. On constate également que le rôle du circuit est bien d'amplifier aux basses fréquences car $H_0 \simeq \frac{1}{K} = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} > 1$. Notons que tous les coefficients au dénominateur de \underline{H} sont positifs, donc **le système est stable**.

Stabilité d'un ALI

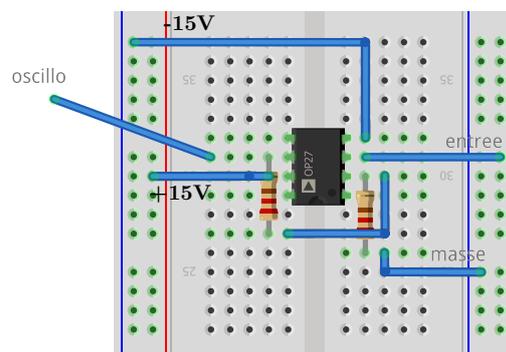
Lorsqu'un ALI possède une rétroaction sur la borne inverseuse uniquement, le système est stable et fonctionne en général dans son domaine linéaire.

II.3 Produit gain \times bande-passante



Manipulation

Représenter le diagramme de Bode (en affichage automatique) pour différentes valeurs de $1/K = 1 + R_2/R_1$, afin de montrer que l'allure est la même, mais la bande-passante change.



On vient de voir que le circuit permettait d'amplifier le signal d'entrée \underline{e} , car il a un **gain statique** (pour $p = 0 \iff \omega = 0$) $H_0 > 1$. Néanmoins avec un comportement de passe-bas, il n'amplifie sans déformation que pour des pulsations comprises dans la bande-passante $[0; \omega_c]$ de largeur $\Delta\omega = \omega_c = 1/\tau'$. On constate par ailleurs que :

$$H_0 \Delta\omega = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 K} \times \frac{1 + \mu_0 K}{\tau} = \frac{\mu_0}{\tau} = \text{cste} \quad (2.17)$$

Produit gain × bande-passante

Pour un montage amplificateur non inverseur, le produit du gain statique par la largeur de la bande-passante du filtre est une constante reliée aux paramètres de l'ALI :

$$* \quad H_0 \times \Delta\omega = \frac{\mu_0}{\tau} (\simeq 10^7 \text{ Hz}) \quad (2.18)$$

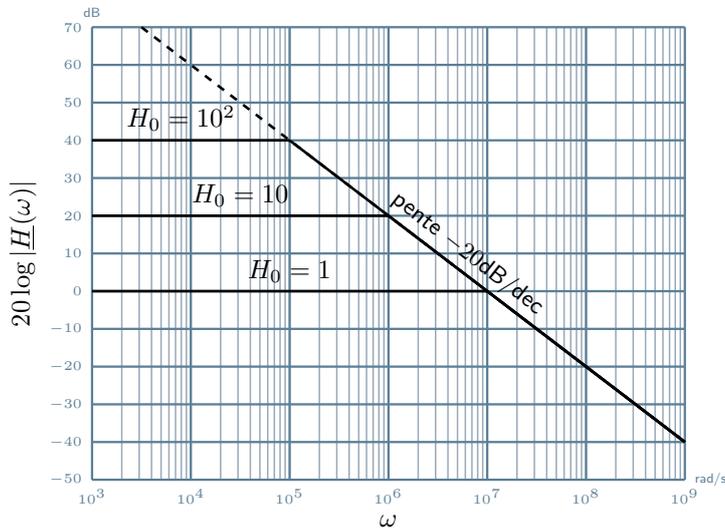
Par conséquent si on veut augmenter le gain statique, on diminue la bande-passante et *vice versa*, un compromis est donc souvent nécessaire.

Exercice

Déterminer l'allure du diagramme de Bode pour H_0 valant 1, 10 et 100.

On peut chercher les asymptotes du diagramme de Bode selon la valeur de $1/K$:

- à basse fréquence, $\underline{H} \simeq H_0 \simeq 1/K$ soit $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log(1/K)$;
- à haute fréquence, $\underline{H} \simeq H_0/j\omega\tau' = \mu_0/j\omega\tau$ soit $G_{\text{dB}} = 20 \log(\mu_0/\tau) - 20 \log(\omega)$, indépendant de la valeur de K

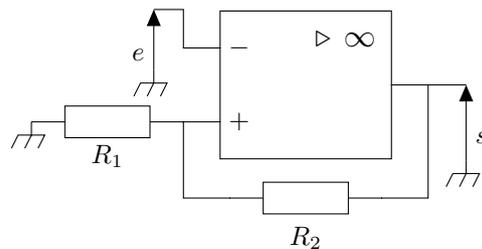


Dans la datasheet, on lit que le *gain bandwidth product* vaut 4 MHz, donc avec $\mu_0 = 2 \cdot 10^5$, $\tau = \frac{\mu_0}{H_0 \times \Delta\omega} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, conforme aux ordres de grandeurs énoncés.

III. Comparateur à hystérésis inverseur

III.1 Schémas électrique et fonctionnel

À la différence du montage amplificateur inverseur, la rétroaction s'effectue sur la borne positive.

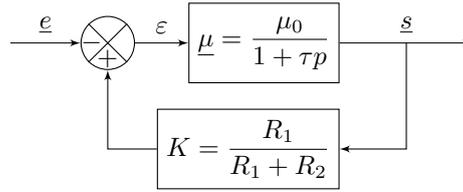


Cela revient à inverser les résultats obtenus aux bornes + et - :

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{\mu_0}{1 + \tau p} \varepsilon \end{array} \right. \quad (2.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s - e \end{array} \right. \quad (2.20)$$

pouvant être retranscrit par le schéma-bloc suivant :



et donc la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{\mu(p)}{1 - \mu(p)K} = \frac{\mu_0}{\mu_0 K - 1 - \tau p} \quad (2.21)$$

Avec $\mu_0 \gg 1$, $\mu_0 K - 1 > 0$, donc les signes du dénominateur de la fonction de transfert sont différents, le système est instable. La tension de sortie va, en valeur absolue, croître exponentiellement, mais du fait de la saturation, on obtient $s = \pm V_{\text{sat}}$: l'ALI fonctionne en **régime saturé**.

Instabilité d'un ALI

Lorsqu'un ALI possède uniquement une rétroaction sur la borne non inverseuse, il fonctionne en régime saturé.

- *
 - Si $V_+ > V_-$, soit $\varepsilon > 0$: $s = +V_{\text{sat}}$;
 - si $V_+ < V_-$, soit $\varepsilon < 0$: $s = -V_{\text{sat}}$.

Précisons également qu'un ALI sans rétroaction ne sera pas stable non plus

III.2 Cycle d'hystérésis



Manipulation

Montrer le parcours du cycle d'hystérésis d'un montage comparateur à hystérésis inverseur

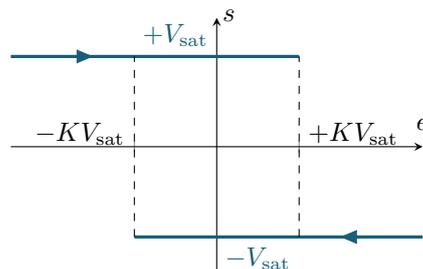
On constate expérimentalement un effet dit d'hystérésis : en effet, la réponse du circuit à certaines valeurs de tensions dépend de l'état antérieur du système, on parle parfois de fonction mémoire. Montrons-le théoriquement en partant de

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s - e = Ks - e \quad (2.22)$$

- * L'ALI fonctionnant en régime saturé, on distingue deux cas :
 - on part de $s = +V_{\text{sat}}$ et on cherche le basculement vers $s = -V_{\text{sat}}$. Cela se produit pour $\varepsilon < 0$ soit

$$e > Ks = KV_{\text{sat}} \quad (2.23)$$
 - on part de $s = -V_{\text{sat}}$, on recherche le basculement vers $s = +V_{\text{sat}}$, il se produit pour $\varepsilon > 0$, soit après calcul, $e < -KV_{\text{sat}}$.

- * Ainsi pour $e \in [-KV_{\text{sat}}; +KV_{\text{sat}}]$, la valeur de s dépend du basculement qui a été opéré : on a deux valeurs de sortie possibles selon l'évolution précédente du signal d'entrée, d'où la fonction de mémoire. La caractéristique entrée-sortie prend alors la forme suivante :



IV. Montages usuels dans le cas d'un ALI idéal de gain infini

IV.1 Généralités

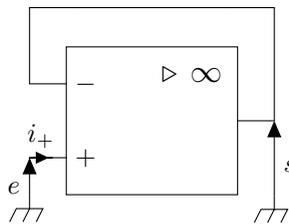
Dans toute la suite, on se place dans le modèle de l'ALI idéal de gain infini. On considère donc que :

- *
 - en régime linéaire $\varepsilon = 0$ (remplace la fonction de transfert du passe-bas) ;
 - en régime saturé $s = \pm V_{\text{sat}}$ selon le signe de ε ;
 - les courants entrants sont nuls, et la tension en sortie ne dépend pas du courant en sortie.
- Pour savoir dans quel régime l'ALI fonctionne, on généralise ce qui a été vu précédemment :
- *
 - si la rétroaction se fait sur l'entrée non inverseuse ou s'il n'y a pas de rétroaction, le régime est saturé ;
 - si la rétroaction se fait sur l'entrée inverseuse, l'ALI est probablement stable, donc régime linéaire (sauf en cas de saturation car s dépasse $\pm V_{\text{sat}}$ ou si le courant en sortie est trop grand) ;
 - s'il y a deux rétroactions, il est nécessaire d'effectuer une étude de stabilité en utilisant la fonction de transfert de l'ALI sans considérer $\mu_0 \rightarrow +\infty$. Un exercice traitera de ce cas en TD.

IV.2 Montages en régime linéaire

a) Suiveur

Nous avons évoqué dans le chapitre précédent la difficulté de mettre en cascade deux filtres. L'idée peut alors être de découpler la sortie d'un quadripôle et l'entrée d'un autre quadripôle via un circuit possédant une impédance d'entrée très grande et une impédance de sortie quasi-nulle : c'est le rôle du suiveur, représenté ci-dessous.



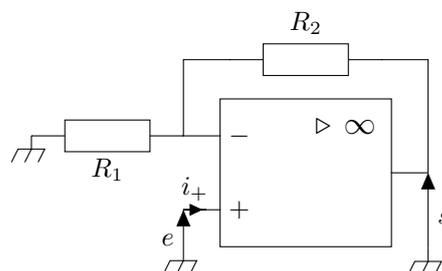
Du fait de la rétroaction négative, on est en régime linéaire, et $s = V_- = V_+ = e$: l'entrée est égale à la sortie. On vérifie également que ce circuit répond aux exigences de la mise en cascade de quadripôles :

- l'impédance d'entrée vaut $R_e = \frac{e}{i_+} \rightarrow +\infty$ comme le courant au niveau de l'entrée e est $i_+ = 0$;
- l'impédance de sortie de l'ALI est nulle.

C'est par exemple un moyen efficace de « transformer » un générateur de Thévenin en générateur idéal, vu que $i_+ = 0$ et donc $e = E - ri_+ = E$.

b) Amplificateurs

On a déjà étudié le **montage amplificateur non inverseur**. Rappelons juste les résultats, en considérant le cas d'un ALI idéal de gain infini :



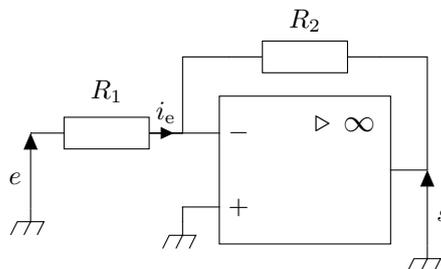
Avec $V_+ = e$, $V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$, et $\varepsilon = 0 \iff V_+ = V_-$, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (2.24)$$

On retrouve bien la valeur de H_0 du II, quand $\mu_0 \rightarrow +\infty$.

Comme pour le montage précédent, l'impédance d'entrée est infinie et l'impédance de sortie est nulle.

Il existe un **montage amplificateur inverseur**, de schéma :



Exercice

Déterminer la fonction de transfert de l'amplificateur inverseur.

Régime linéaire car la rétroaction est négative, donc

$$V_+ = 0 = V_- = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \implies R_2 e + R_1 s = 0 \implies \underline{H} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (2.25)$$

On comprend la signification du nom du montage : le signe implique l'inversion, et si $R_2 > R_1$, alors l'amplitude de sortie est plus grande que l'amplitude d'entrée.

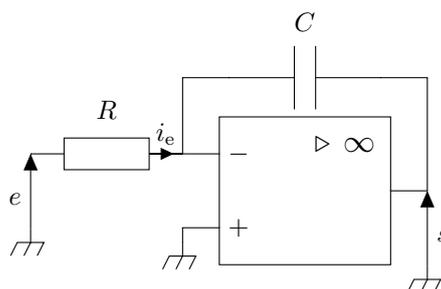
- * Concernant l'impédance d'entrée, $R_e = \frac{e}{i_e}$, et comme $V_- = V_+ = 0$, $e = R_1 i_e$ donc $R_e = R_1$.
L'impédance de sortie est toujours nulle.



Le fait que l'impédance d'entrée ne soit pas infinie indique donc qu'il faut faire attention si on place différents éléments en cascade avec l'amplificateur inverseur : il faudra que R_1 soit très grand devant l'impédance de sortie du circuit branché à la place de e .

c) Intégrateur

Le montage intégrateur inverseur est représenté ci-dessous.



Pour déterminer sa fonction de transfert, remarquons déjà qu'il y a une rétroaction négative, signe de stabilité. D'autre part il est judicieux d'employer le théorème de Millman (ou le pont diviseur de tension en notations complexes) :

$$\underline{V}_- = \frac{\frac{e}{R} + jC\omega s}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \underline{V}_+ = 0 \quad (2.26)$$

* donc

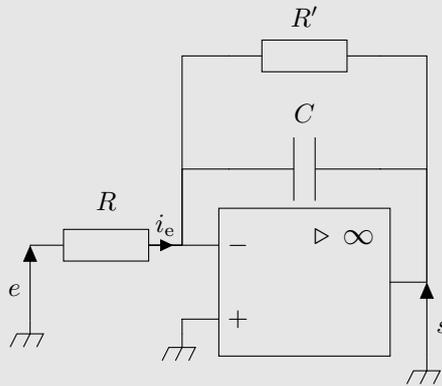
$$\underline{s} = \frac{-e}{jRC\omega} \iff \underline{H}(\omega) = \frac{-1}{jRC\omega} \quad (2.27)$$

correspondant à la fonction de transfert d'un intégrateur pur. Ainsi

$$s(t) - s(0) = \frac{-1}{RC} \int_0^t e(t) dt \quad (2.28)$$

L'impédance d'entrée est encore $R_e = \frac{e}{i_e} = R$, et l'impédance de sortie est toujours nulle.

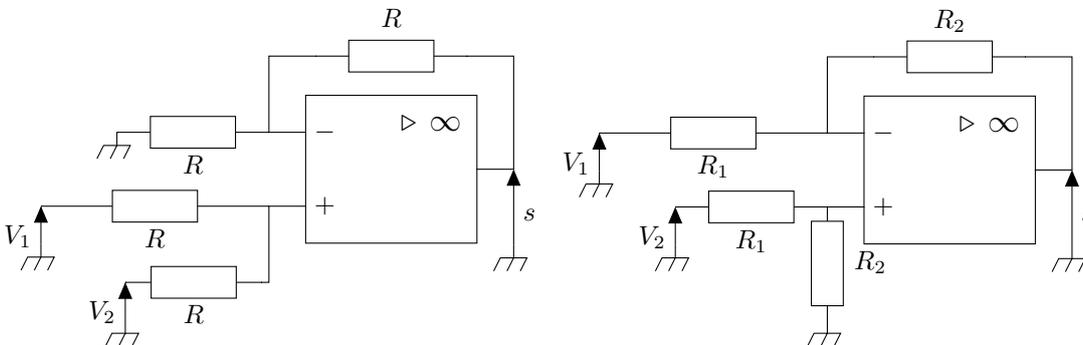
Notons tout de même un gros défaut de ce montage : si le signal en entrée présente une tension continue, même infime, son intégration conduit à la saturation de l'ALI assez rapidement. On lui préfère alors le montage suivant :



qui n'intègre que sur une plage limitée en pulsation $\omega \gg \frac{1}{R'C}$.

d) Additionneur / soustracteur

Ce n'est pas au programme, mais cela peut toujours servir : ci-dessous deux montages, le premier permet d'additionner deux signaux, le second de les soustraire.



Exercice

Déterminer l'expression de s dans les deux circuits.

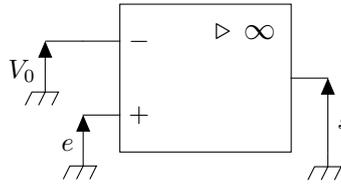
Pour celui de gauche, Millman permet d'écrire que $V_+ = \frac{V_1/R + V_2/R}{1/R + 1/R} = \frac{V_1 + V_2}{2}$, ainsi que $V_- = \frac{s}{2}$. D'où en régime linéaire $s = V_1 + V_2$.

De la même façon on trouve $s = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1)$ avec $V_- = \frac{V_1/R_1 + s/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = V_+ = \frac{V_2/R_1}{1/R_1 + 1/R_2}$.

IV.3 Montages en régime saturé

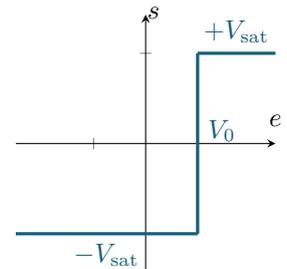
a) Comparateur simple

Pour comparer deux signaux, rien de plus simple :



Comme il n'y a pas de rétroaction, l'ALI fonctionne en régime saturé. Ainsi :

- si $e > V_0$, $s = +V_{\text{sat}}$;
- si $e < V_0$, $s = -V_{\text{sat}}$.



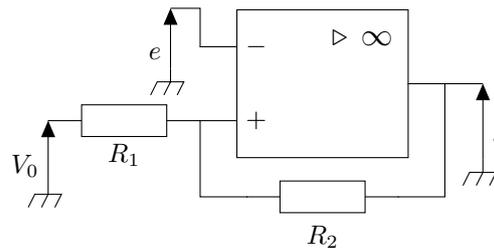
Manipulation

Montrer sur ce montage, avec une entrée sinusoïdale que la génération d'harmoniques est signe d'un fonctionnement non-linéaire.

- * On observe, avec une entrée sinusoïdale une sortie en créneaux, et donc un spectre en sortie contenant des harmoniques : c'est bien le signe d'un comportement non-linéaire du montage. On peut imaginer une utilisation dans un circuit de thermostat d'un radiateur, où e serait la sortie d'un capteur de température et V_0 la tension de consigne fixée par l'utilisateur. La sortie du comparateur commanderait un relais déclenchant la mise en route du chauffage. Néanmoins la problématique est que, autour de la consigne de température, les fluctuations impliqueraient des mises en route et arrêts intempestifs du chauffage, ce qui provoquerait son usure prématurée.

b) Comparateur à hystérésis

Pour résoudre ce problème, on utilise un comparateur à deux seuils, que l'on a rencontré précédemment. Précisons chacun des montages et les cycles d'hystérésis associés :



Exercice

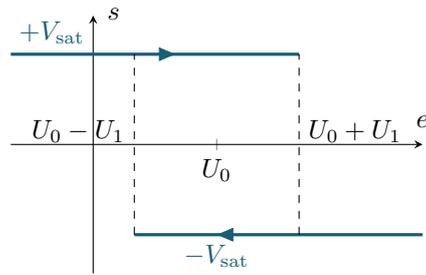
Déterminer le cycle d'hystérésis de ce comparateur en fonction de V_0 , V_{sat} , R_1 et R_2 .

Via Millman, on a $V_+ = \frac{\frac{V_0}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{V_0 R_2 + s R_1}{R_1 + R_2}$, et $V_- = e$. En partant de $s = +V_{\text{sat}}$, $V_+ < V_-$

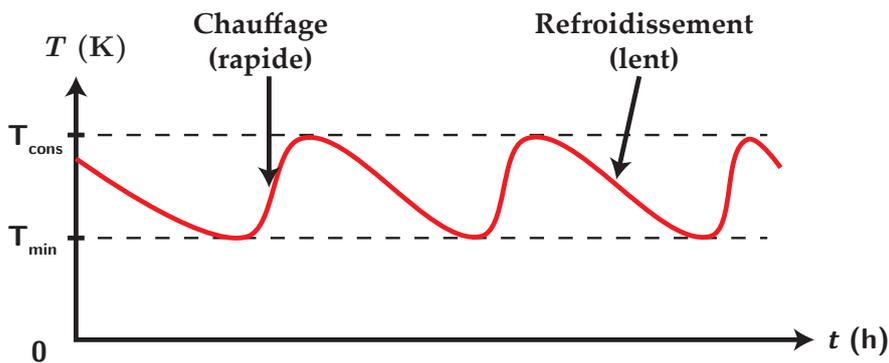
lorsque

$$\frac{V_0 R_2 + V_{\text{sat}} R_1}{R_1 + R_2} < e \iff e > U_0 + U_1 \quad (2.29)$$

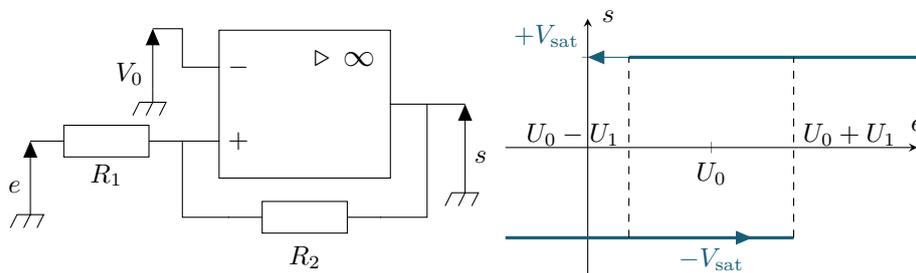
en posant $U_0 = \frac{V_0 R_2}{R_1 + R_2}$ et $U_1 = \frac{V_{\text{sat}} R_1}{R_1 + R_2}$. On fait de même dans l'autre cas et on trouve $e < U_0 - U_1$ pour basculer à $+V_{\text{sat}}$. L'allure du cycle d'hystérésis est donc la même que précédemment, mais décalée horizontalement de U_0 .



Ainsi pour reprendre l'exemple du chauffage précédent, on imagine que l'on a une consigne pour $U_0 + U_1$ correspondant à la température idéale. Dès qu'on dépasse ce seuil de tension (et donc de température), le chauffage s'arrête, et ne se redéclenche que lorsqu'on a redescendu « suffisamment » (régulé par U_1) en température. La courbe de température prendra l'allure suivante au cours du temps :



Le comparateur à hystérésis non inverseur prend quant à lui la forme suivante :



Pour déterminer l'expression de $U_0 + U_1$ en fonction de V_{sat} , V_0 , R_1 et R_2 , on écrit le potentiel V_+ via Millman :

$$V_+ = \frac{e/R_1 + s/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \quad (2.30)$$

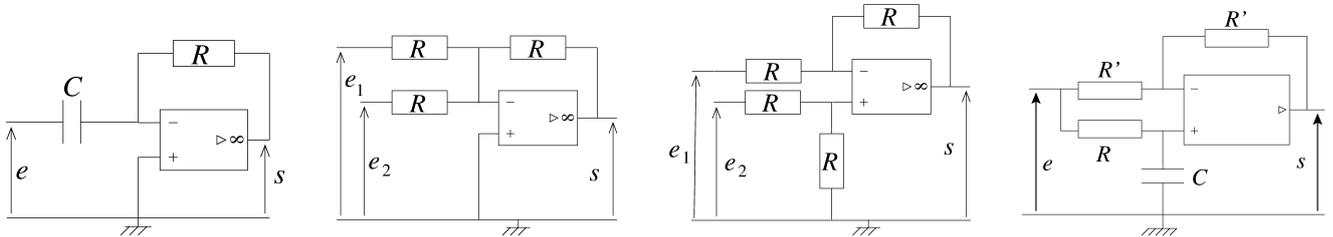
Supposons qu'on soit à $s = -V_{sat}$. Il y a basculement lorsque

$$V_+ > V_- \iff \frac{e/R_1 - V_{sat}/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} > U_0 \iff e > \frac{R_1}{R_2} V_{sat} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} V_0\right) \quad (2.31)$$

En particulier si $V_0 = 0$, les basculements se produisent pour $e = \pm \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

Exercices

2. 1 Quelques montages classiques à AO



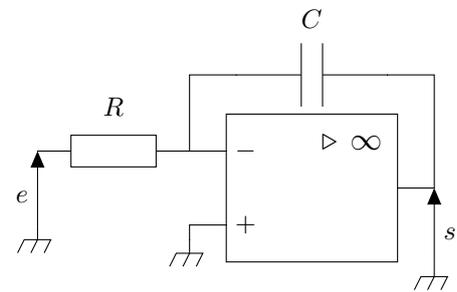
À quoi peuvent servir ces 4 circuits ?

2. 2 Montage intégrateur

On considère le montage intégrateur vu en cours. La valeur moyenne de la tension d'entrée n'est jamais rigoureusement nulle, on pose donc $v_e(t) = v_0 + v_1 \cos \omega t$ (avec $v_0 \ll v_1$)

1. Que vaut dans ce cas la tension de sortie ? Quel problème se pose ?

Pour y remédier, on ajoute une résistance $R' \gg R$ en parallèle avec le condensateur.

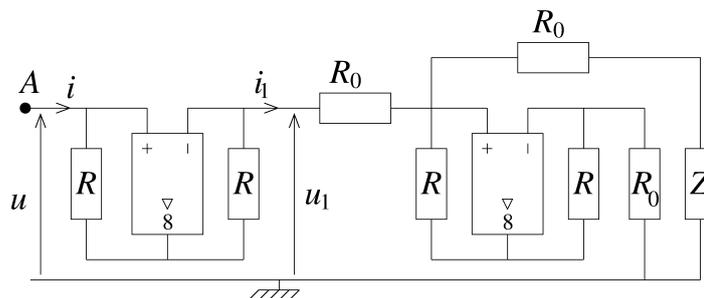


2. Déterminer la nouvelle fonction de transfert H' de ce filtre. Montrer que ce circuit présente alors un comportement intégrateur seulement dans un domaine de pulsations que l'on précisera littéralement et numériquement. On donne $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R' = 100 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \mu\text{F}$.

3. On considère le signal d'entrée $v_e(t) = v_0 + v_1 \cos(\omega t)$, tel que $R' C \omega \gg 1$. Déterminer le signal de sortie $v_s(t)$.

2. 3 Simulation d'inductance pure

On étudie le montage représenté ci-dessous où les AO sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

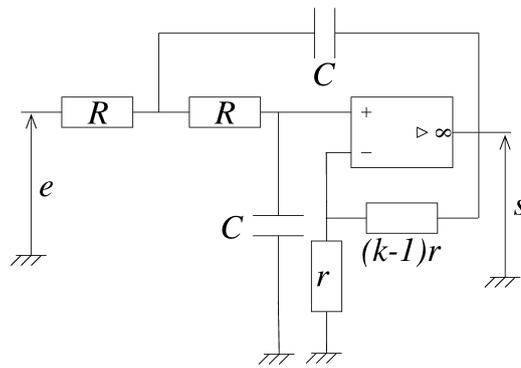


1. Déterminer la relation entre les tensions u et u_1 d'une part et entre les courants i et i_1 d'autre part.

2. Déterminer l'impédance vue entre la borne A et la masse.

3. Quelle est la nature du dipôle équivalent si Z est une capacité ?

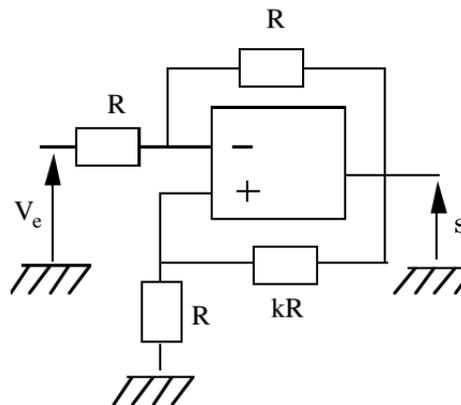
2. 4 Stabilité d'un filtre actif



On étudie un filtre actif réalisé à l'aide d'un amplificateur intégré, supposé idéal. On a $k > 1$.

1. Déterminer la fonction de transfert et la mettre sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$
2. De quel type de filtre s'agit-il ?
3. Retrouver sans calcul la valeur du gain statique.
4. Quelle condition sur k assure la stabilité du circuit ?

2. 5 Étude d'une double rétroaction

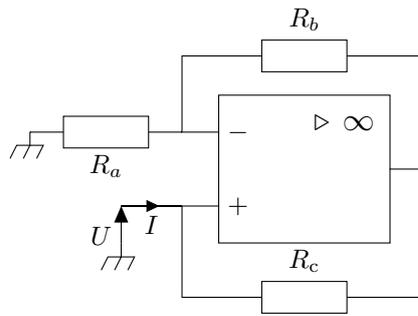


Dans le dispositif ci-contre, l'AO est idéal en tout point sauf en ce qui concerne son gain différentiel, que l'on suppose être un passe-bas du premier ordre.

1. Représenter ce système sous la forme du schéma fonctionnel classique avec un comparateur, une chaîne directe (appelée actionneur) et une chaîne de retour (appelée capteur).
2. Étudier la stabilité de ce montage selon la valeur de k .
3. Dans le cas où le montage est stable et pour l'AO supposé idéal, exprimer le gain s/V_e . Que devient-il lorsque k tend vers la valeur limite de stabilité ?
4. Mêmes questions en inversant les entrées inverseuse et non inverseuse de l'AO.

2. 6 Résistance négative

On considère le dipôle situé entre V_+ et la masse. On note U la tension à ses bornes.



1. Établir la relation entre U et I en supposant que l'Amplificateur Opérationnel fonctionne dans son domaine linéaire.
2. Même question lorsque l'AO est saturé.
3. Tracer la caractéristique (I, U) du dipôle.
4. On remplace la résistance d'un circuit RLC série par le dipôle de tension U . Étudier la réponse en courant du circuit ainsi obtenu à une petite perturbation de tension aux bornes du générateur d'entrée. On n'effectuera pas l'ensemble des calculs, mais une allure de la courbe de $i(t)$ est attendue.

1. On suppose que l'AOI fonctionne en régime linéaire. Ainsi $V_+ = U = V_-$. Or en reconnaissant un pont diviseur de tension :

$$V_- = \frac{sR_a}{R_a + R_b} \quad (2.32)$$

Au niveau de la résistance R_c , comme $i_+ = 0$, on a $U - s = R_c I$. En utilisant l'ensemble des équations il vient

$$U - U \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right) = R_c I \iff U = -\frac{R_c R_a}{R_b} I \quad (2.33)$$

c'est-à-dire une relation courant-tension de la forme d'une résistance $R = -R_c R_a / R_b$ négative !

2. En régime saturé, on a toujours $V_+ = U$, $V_- = \frac{sR_a}{R_a + R_b}$ et $s = U - R_c I$. On a donc :

$$\begin{cases} U = R_c I + V_{\text{sat}} & \text{si } s = +V_{\text{sat}} \\ U = R_c I - V_{\text{sat}} & \text{si } s = -V_{\text{sat}} \end{cases} \quad (2.34)$$

$$(2.35)$$

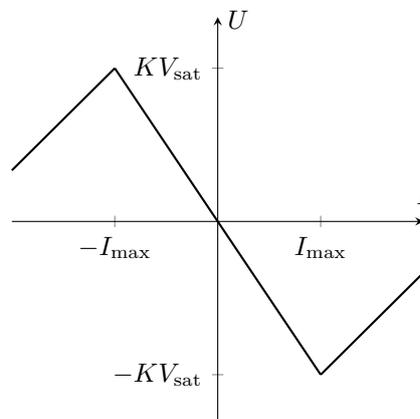
$$(2.36)$$

La saturation positive se produit lorsque $R_c I + V_{\text{sat}} = -\frac{R_c R_a}{R_b} I$, c'est-à-dire pour $I = \frac{-V_{\text{sat}}}{R_c(1 + R_a/R_b)} = -I_{\text{max}}$

donc pour $U = \frac{V_{\text{sat}}}{1 + \frac{R_b}{R_a}} = KV_{\text{sat}}$. De la même façon, la saturation négative se produit lorsque $s = -V_{\text{sat}}$, soit pour

$$U = -KV_{\text{sat}}$$

3. L'allure de la caractéristique est représentée ci-dessous. Elle est constituée de trois portions de droite : les deux en fonctionnement saturé, et celle en fonctionnement linéaire :



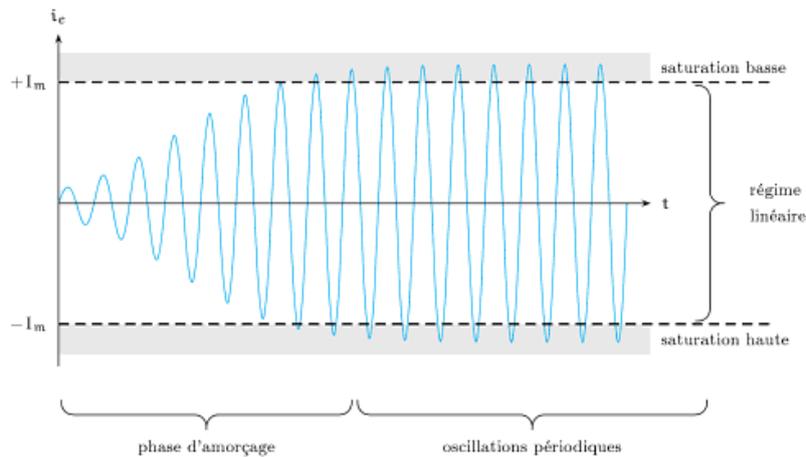
4. Si on écrit l'équation différentielle associée, on a :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt} \quad (2.37)$$

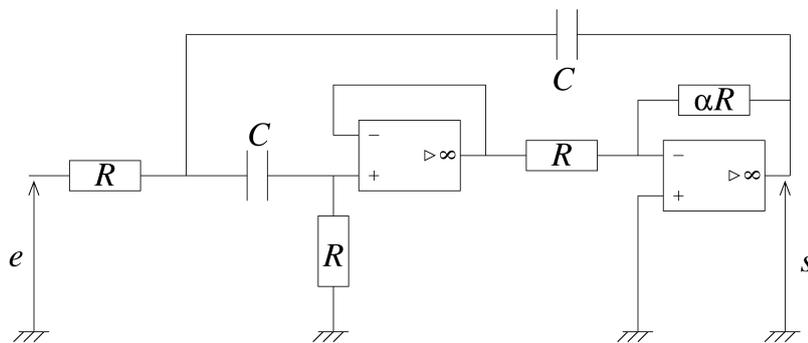
avec $e(t)$ la tension aux bornes du générateur. Étant donné que les coefficients de l'équation différentielle ne sont pas tous positifs, il y a une instabilité, on va observer des oscillations qui s'amplifient exponentiellement, tant que l'ALI n'est pas saturé. Dès qu'il devient saturé, on doit remplacer la tension aux bornes du dipôle par $U = R_c i \pm V_{\text{sat}}$, d'où :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_c}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt} \quad (2.38)$$

ce qui permet d'avoir un amortissement important, tel que i en valeur absolue décroisse et que l'on retourne en régime linéaire. De fait, on a donc un oscillateur presque sinusoïdal, étudié plus en détail au prochain chapitre.



2. 7 Filtre actif à deux ALI



1. Examiner rapidement le comportement basse fréquence et haute fréquence du système représenté ci-dessus.

2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{s}{e}$. On la mettra sous la forme canonique $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$

Quelles sont les expressions et les significations des termes H_0 , ω_0 et Q ?

Donner l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$.

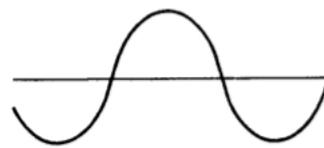
3. Tracer le diagramme de Bode correspondant pour $\alpha = 8$.

4. $e(t)$ est un signal triangulaire de valeur moyenne nulle, d'amplitude $2E_0$ et de période T .

On observe les réponses suivantes pour $\alpha = 8$. Interpréter ces deux résultats ($T_0 = 2\pi/\omega_0$)



en BF ($T = 10 T_0$)



en HF ($T = 0,1 T_0$)

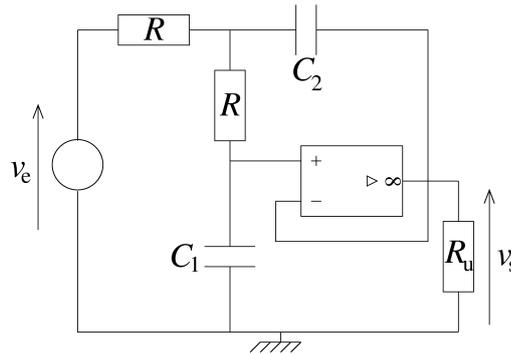
5. On considère maintenant en entrée un signal créneau de période $T = 2\pi/\omega$, d'amplitude $A = 1$ V et de valeur moyenne $B = 2$ V dont on donne la décomposition en série de Fourier :

$$e(t) = B + \frac{4A}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\omega t) \quad (2.39)$$

- (a) On veut sélectionner l'harmonique 3 de cette décomposition, que doit vérifier la période f de $e(t)$?
 (b) Déterminer la valeur moyenne du signal de sortie ainsi que l'amplitude du fondamental et des harmoniques 3, 5 et 7. Conclure.

2. 8 Filtre de Butterworth

On considère le montage ci-dessous dans lequel l'amplificateur opérationnel utilisé est supposé parfait.



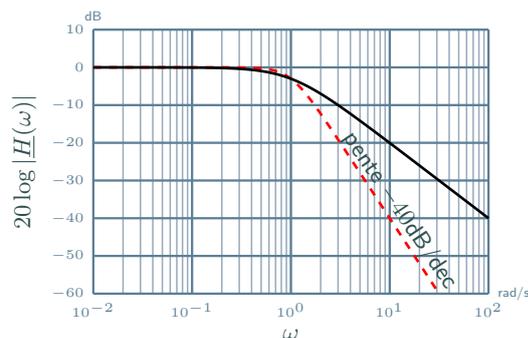
1. Montrer sans faire de calcul quel type de filtre constitue ce montage.
2. Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e}$ de ce montage.
3. Comment choisir C_2 pour que le module de la fonction de transfert soit égal à $|\underline{H}(j\omega)| = \left(1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$? Quelle est alors la valeur de ω_0 en fonction de R et C_1 ? Quelle est la pulsation de coupure ω_c du montage ?
4. Tracer les diagrammes de Bode superposés de ce montage et d'un passe-bas du premier ordre de même pulsation de coupure.

-
1. Par des équivalents basse et haute fréquence, on trouve dans le premier cas $\underline{H} = 1$ et $\underline{H} = 0$ dans le second. C'est donc un passe-bas.

2. On trouve $\underline{V}_+ = \frac{V_A}{1 + jx_1}$ avec $x_1 = RC_1\omega$, $\underline{V}_- = \underline{s}$ et $\underline{V}_A = \frac{e + V_+ + sjx_2}{2 + jx_2}$ avec $x_2 = RC_2\omega$. D'où finalement

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jRC_1\omega - R^2C_1C_2\omega^2} \quad (2.40)$$

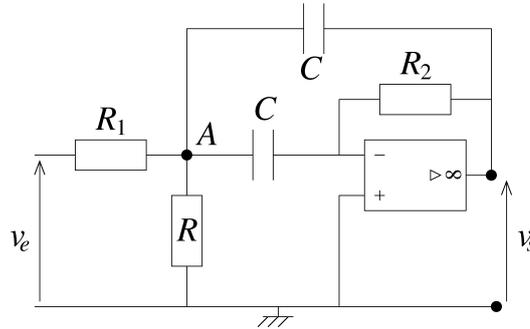
3. En calculant le module, on obtient la bonne forme à condition que $4x_1^2 = 2x_1x_2 \iff C_2 = 2C_1$. On trouve alors $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC_1}$. $|\underline{H}|$ est maximal pour $\omega = 0$ et vaut 1. On cherche alors ω_c tel que $|\underline{H}|(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $\omega_c = \omega_0$.
4. Pour le filtre de Butterworth, c'est un filtre d'ordre 2, dont l'asymptote oblique est simplement d'équation $G_{dB} = 40 \log(\omega_0) - 40 \log \omega$ donc de pente -40 dB/dec. D'où l'allure ci-dessous :



2.9 Filtre de Rauch

On considère le montage ci-dessous dans lequel l'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire. On pourra poser $R' = \frac{RR_1}{R + R_1}$.

Données : $C = 1 \mu\text{F}$, $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$, $V_0 = 0,5 \text{ V}$.



- Représenter les schémas équivalents à haute et basse fréquence et en déduire la nature du filtre.
 - Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{v_s}{v_e}$ de ce filtre et la mettre sous la forme $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$ où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Préciser les expressions de H_0 , ω_0 et Q en fonction de R_1 , R_2 , R' et C .
 - Tracer le diagramme de Bode dans les deux cas $Q \ll 1$ et $Q \gg 1$.
 - Calculer numériquement H_0 , Q , ω_0 et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.
 - Définir et calculer la bande passante à -3 dB . On donnera les valeurs numériques des fréquences de coupure.
- On considère que la tension d'entrée v_e est une tension en créneaux de période T , telle que

$$v_e(t) = \begin{cases} V_0 & \text{pour } 0 \leq t < T/2 \\ -V_0 & \text{pour } T/2 \leq t < T \end{cases}$$

Son développement en série de Fourier est

$$v_e(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\left((2p+1) \frac{2\pi}{T} t\right)$$

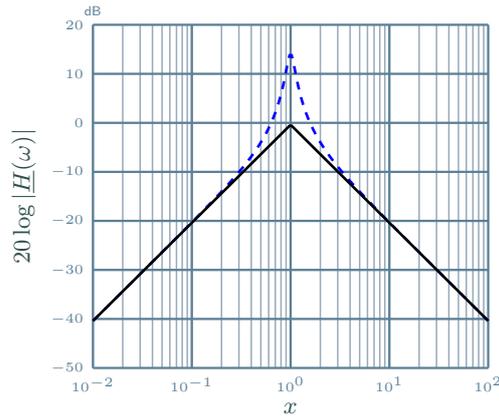
- Quelle doit être la fréquence $f = \frac{1}{T}$ de v_e pour que f_0 corresponde à l'harmonique de rang $n = 3$ de la décomposition ?
- Quelles seront dans ce cas les amplitudes du fondamental et des harmoniques de rang $n = 2, 3, 4$ et 5 des signaux v_e et v_s ? Faire les calculs littéraux et numériques et tracer les spectres en fréquence de v_e et v_s jusqu'à $n = 5$. Conclure.

- On trouve qu'en basse fréquence ET haute fréquence $s = 0$, on a donc un filtre passe-bande.
 - (d) Avec un ALI idéal de gain infini, $V_+ = 0 = V_- = \frac{V_A jC\omega + V_s/R_2}{\dots}$ soit $V_A = -V_s/jR_2C\omega$. De plus $V_A = \frac{V_e/R_1 + V_s jC\omega}{1/R_1 + 1/R + 2jC\omega}$. On aboutit finalement à

$$\underline{H} = \frac{-\frac{R_2}{2R_1}}{1 + jR_2C\omega/2 + \frac{1}{2jR'C\omega}} \quad (2.41)$$

d'où l'on pose $H_0 = -R_2/2R_1 = -5$, $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R'}} = 5,24$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R' C}} = 10,5 \cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $f_0 = 1,67 \text{ kHz}$.

(c) Diagramme de Bode d'un passe-bande avec $x = \omega/\omega_0$



(e) On cherche les valeurs de pulsation vérifiant $|H|(\omega) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{2} \iff Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \iff Q \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1 \quad (2.42)$$

ce qui revient à résoudre les polynômes $x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$ de solutions

$$x = \frac{\pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{1/Q^2 + 4}}{2} \iff f_c = \frac{f_0}{2Q} \left(\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}\right) \quad (2.43)$$

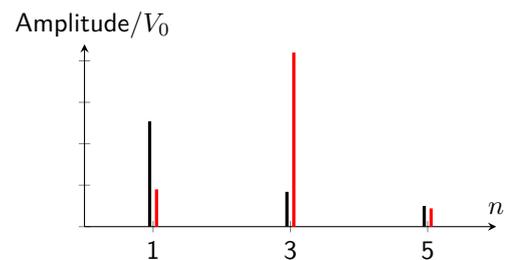
Les deux seules solutions possibles sont alors

$$f_{c,1} = \frac{f_0}{2Q} \left(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right) = 1,52 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f_{c,2} = \frac{f_0}{2Q} \left(+1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right) = 1,84 \text{ kHz} \quad (2.44)$$

D'où une bande-passante de $\Delta f = 3,2 \cdot 10^2 \text{ Hz} = \frac{f_0}{Q}$.

2. (a) Il faut que $3f = f_0$.
 (b) On calcule le module de la fonction de transfert pour les différentes harmoniques. Il faut évidemment calculer les amplitudes d'entrée également.

n	1	2	3	4	5
v_e/V_0	1,27	0	0,42	0	0,25
v_s/V_0	0,45	0	2,1	0	0,22



Électronique numérique

Sommaire

3.1 Introduction	2
3.1.1 Distinction analogique-numérique	2
3.1.2 Intérêt de la conversion analogique-numérique	2
3.2 Échantillonnage	2
3.2.1 Principe de l'échantillonnage	2
3.2.2 Mise en évidence de l'importance du choix de la fréquence d'échantillonnage	3
3.2.3 Spectre du signal échantillonné	4
3.2.4 Critère de Nyquist-Shannon	5
3.2.5 Quelques exemples sonores	6
3.2.6 Fréquence apparente	6
3.2.7 Influence de la durée d'acquisition sur le spectre	6
3.3 Quantification	7
3.3.1 Choix du nombre de bits	7
3.3.2 Pas de quantification	7
3.3.3 Conclusion	8
3.4 Filtrage numérique	9

Questions de cours :

- Présenter le principe de la conversion analogique-numérique : échantillonnage et quantification, critères pour avoir un bon signal numérisé.
- Présenter le phénomène de repliement de spectre, la notion de fréquence apparente, et la façon de conserver le spectre d'un signal après numérisation.

Capacités exigibles du BO :

- Décrire le mouvement apparent d'un segment tournant observé avec un stroboscope.
- Expliquer l'influence de la fréquence d'échantillonnage.
- Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.
- Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.
- Réaliser un filtrage numérique passe-bas d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.



Manipulation

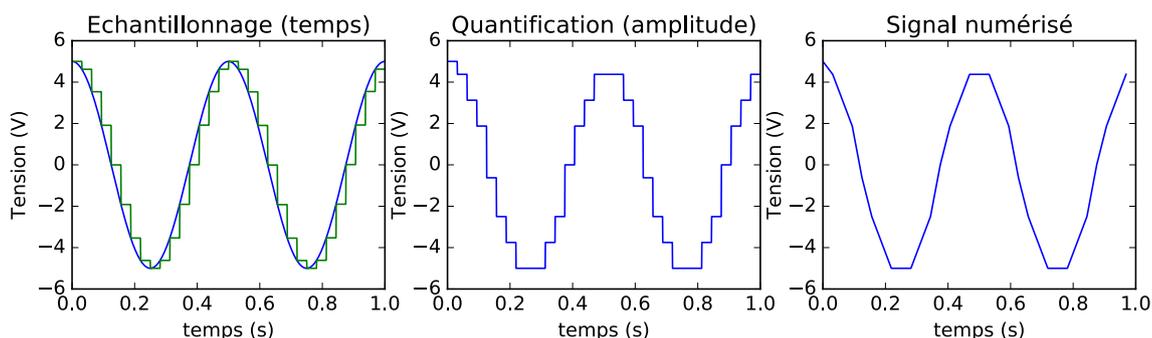
Montrer la vidéo de l'hélico où les pales ne bougent quasiment pas, et demander une explication aux élèves, en lien avec le TP d'élec qu'ils auront fait.

I. Introduction

I.1 Distinction analogique-numérique

Un signal **analogique** est un signal continu en temps et en amplitude.

Un signal **numérique** est un signal discret en temps et en amplitude : il est échantillonné et quantifié.



I.2 Intérêt de la conversion analogique-numérique

La plupart des signaux physiques (la tension aux bornes d'un dipôle ou le son émis par un instrument de musique par exemple) sont par nature analogiques. Cependant, depuis une trentaine d'années¹, le traitement numérique supplante petit à petit l'analogique.

Les transmissions numériques permettent d'augmenter la quantité d'informations stockées ou transmises et la qualité de transmission de l'information en réduisant les problèmes liés aux conditions de propagation notamment la sensibilité au bruit (on ne transmet que des 0 ou des 1). De plus elle nécessite une plus faible puissance d'émission. Par ailleurs, la numérisation permet des traitements numériques variés (filtrage par exemple) et facilement modifiables : pas besoin de changer ou d'ajouter des composants comme en électronique analogique, une modification de l'algorithme de traitement suffit.

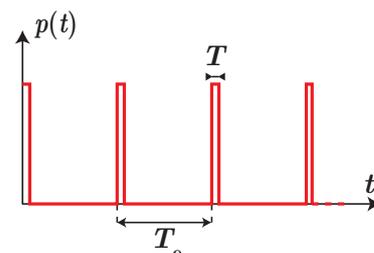
Pour réaliser un traitement ou une transmission numériques, il faudra donc dans un premier temps convertir le signal analogique en signal numérique. Cette conversion analogique-numérique (CAN, nom aussi donné au convertisseur) s'effectue en général en deux étapes :

- une discrétisation en temps, appelée **échantillonnage** ;
- une discrétisation en valeur, appelée **quantification**.

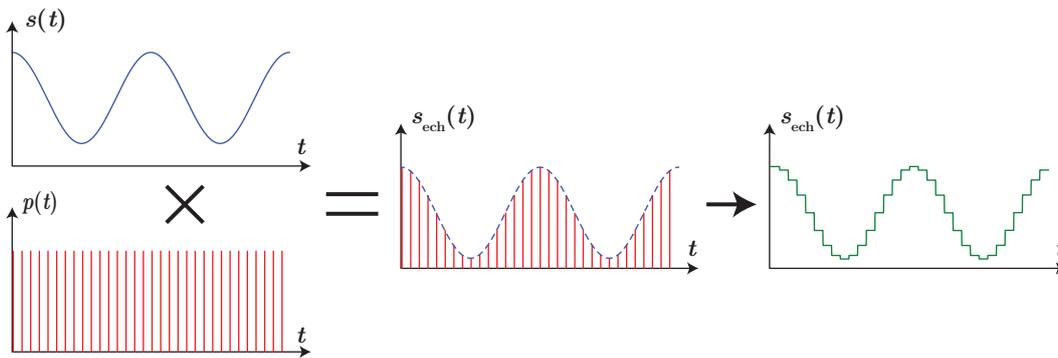
II. Échantillonnage

II.1 Principe de l'échantillonnage

On considère un signal analogique $s(t)$. L'idée consiste à utiliser un interrupteur parfait que l'on ferme pendant un intervalle de temps très court puis que l'on ouvre pendant T_e . On prélève ainsi les valeurs $s(nT_e)$, $n \in \mathbb{Z}$. Si l'on considère pour simplifier que l'intervalle de temps T nécessaire au prélèvement est faible devant T_e , cela revient mathématiquement à multiplier $s(t)$ par la fonction "peigne" de Dirac $p(t)$:



1. Quelques dates : 1982 commercialisation des premiers CD (Compact Disc), remplaçant les disques vinyles. Décembre 1995 : commercialisation des premiers DVD, remplaçant les vidéocassettes (et les CD). 30 novembre 2011 : fin de la transmission de la télévision analogique en France, remplacée par la TNT. Futur (expérimentations en cours) : remplacement de la radio analogique par la radio numérique.



Le signal échantillonné s_{ech} peut donc être considéré comme une suite de valeurs discrètes de $s(t)$. Avant de voir quelles valeurs binaires on peut associer à s_{ech} (voir Quantification), étudions le spectre de ce signal. Ce point est particulièrement important :

Un échantillonnage bien réalisé ne doit pas détériorer le signal. En particulier il doit conserver le spectre de $s(t)$ et il doit permettre de restituer ce spectre en fin d'opérations.

II.2 Mise en évidence de l'importance du choix de la fréquence d'échantillonnage

a) Expérience préliminaire

On considère un disque blanc avec un rayon noir ; le disque tourne dans le sens horaire à la fréquence $f = 1/T$. On éclaire au stroboscope ce disque à la fréquence f_e , i.e. on l'éclaire périodiquement (période T_e) avec des flashes très courts (de durée $\ll T_e$).

	0	T											t	
$f_e = 6f :$														
$f_e = 3f :$														
$f_e = 2f :$														
$f_e = 3f/2 :$														
$f_e = 6f/5 :$														
$f_e = f :$														
$f_e = 6f/7 :$														

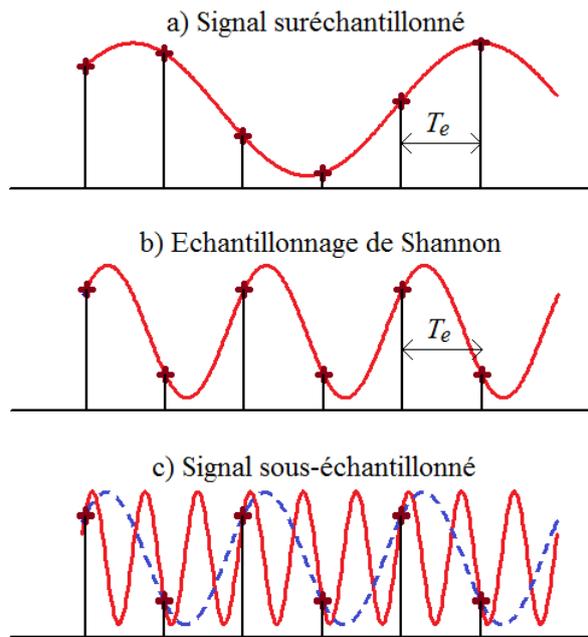
- Pour $f_e = 6f$, pendant $t \in [0, 2T[$, on voit 12 images : le disque tourne dans le sens horaire et on a une bonne « représentation » de sa rotation. De plus, on voit qu'il fait un tour tous les 6 éclairs du stroboscope, soit en $6T_e$, ce qui correspond bien à sa vitesse de rotation réelle.
- Pour $f_e = 2f$, pendant $t \in [0, 2T[$, on voit 4 images : on ne peut pas savoir dans quel sens tourne le disque ! Par contre il fait un tour en $2T_e$ et la conclusion est la même que précédemment.
- Pour $f_e = 3f/2$, pendant $t \in [0, 2T[$, on voit 3 images. Le disque semble tourner en sens inverse, et il fait un tour en $2T$, on a donc une fréquence apparente $f_{\text{app}} = f/2$. Dans ce dernier cas, on dit qu'on **sous-échantillonne** le phénomène. On observe cela fréquemment à la télévision ou au cinéma :

<http://www.youtube.com/watch?v=jHS9JGkE0mA>

b) Échantillonnage d'un signal sinusoïdal

On considère l'échantillonnage d'une tension sinusoïdale $s(t)$.

http://www.ostralo.net/3_animations/swf/echantillonnage.swf



Dans les cas a) et b), le signal est bien détecté à sa véritable fréquence. Dans le cas c), avec moins de deux points par période, il existe une autre sinusoïde de fréquence inférieure (en pointillés), qui passe par les mêmes échantillons.

II.3 Spectre du signal échantillonné

a) Signal sinusoïdal

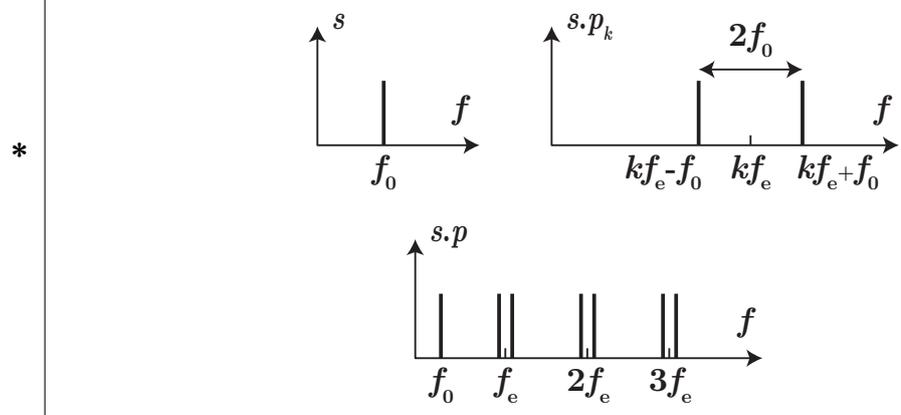
Supposons que $s(t)$ soit sinusoïdal de fréquence f_0 .
La fonction $p(t)$ étant périodique de période T_e , elle est décomposable en série de Fourier selon :

$$p(t) = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \cos(2\pi k f_e t)$$

Le produit de la fonction $s(t)$ de fréquence f_0 par l'harmonique de rang k de $h(t)$ fait apparaître les deux fréquences $k f_e + f_0$ et $|k f_e - f_0|$: en effet,

$$\cos(2\pi f_0 t) \times \cos(2\pi k f_e t) = \frac{1}{2} (\cos(2\pi(k f_e + f_0)t) + \cos(2\pi(k f_e - f_0)t))$$

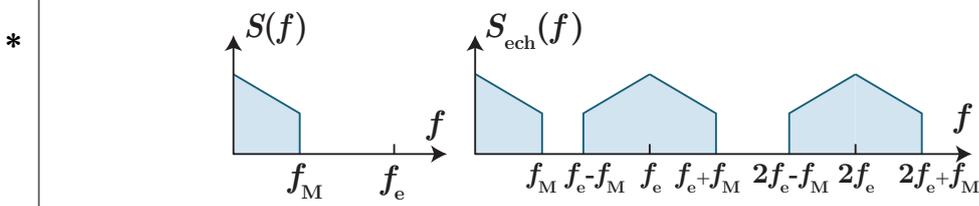
Les spectres des signaux s , $s \cdot p_k$ et $s_{ech} = s \cdot p(t)$ présentent ainsi l'allure suivante :



L'opération d'échantillonnage aura fait apparaître de nouvelles fréquences par rapport à $s(t)$: l'opération est non linéaire.

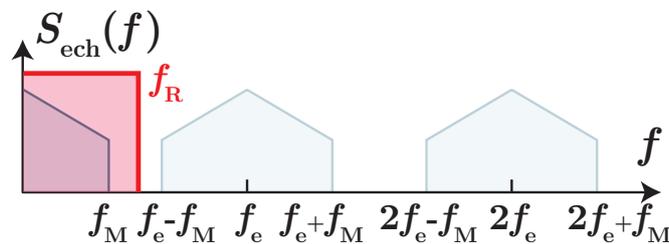
b) Signal quelconque

Considérons maintenant un signal quelconque $s(t)$, possédant un spectre continu s'étendant de 0 jusqu'à la fréquence f_M . En appliquant le raisonnement précédent à chaque composante spectrale de s , on obtient le spectre du signal échantillonné $s_{\text{ech}}(t) = s(t) \times p(t)$

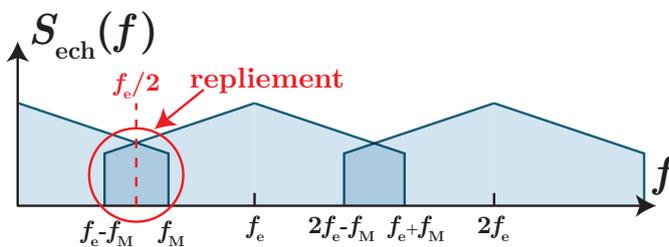


II.4 Critère de Nyquist-Shannon

On veut que l'échantillonnage soit une opération réversible, c'est-à-dire qu'on puisse retrouver le spectre du signal initial $s(t)$ à partir du signal échantillonné. D'après les spectres ci-dessus, il faut pour cela appliquer au signal échantillonné un **filtre passe-bas**, de fréquence de coupure F_R sur le graphe ci-dessous, laissant passer le spectre du signal initial et coupant les fréquences supplémentaires apparues lors de l'échantillonnage.



Cependant, si la fréquence d'échantillonnage est mal choisie, c'est-à-dire si le signal est sous-échantillonné, on observera un enrichissement du spectre de $s_{\text{ech}}(t)$:



Le signal échantillonné contient, même en dessous de sa fréquence maximale f_M , des composantes qui ne sont pas présentes dans le signal initial. On dit qu'il y a **repliement** du spectre, ou en anglais **aliasing**.

Le graphe ci-dessus montre que si la fréquence d'échantillonnage n'est pas au moins égale à deux fois la fréquence maximale de $s(t)$, des fréquences parasites apparaîtront. En effet pour que seules apparaissent les fréquences comprises entre 0 et f_M , il faut que $f_e - f_M > f_M$:

Critère de Shannon-Nyquist

Pour conserver son spectre, un signal doit être échantillonné à une fréquence f_e au moins deux fois supérieure à sa fréquence maximale f_M :

*

$$f_e > 2f_M$$

(3.1)

Quand on ne peut pas ou qu'on ne souhaite pas avoir une fréquence d'échantillonnage suffisamment élevée ($f_e > 2f_M$), on utilise un filtre **anti-repliement** : un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c < f_e/2$ avant d'échantillonner. Ainsi, on perd de l'information (la partie haute fréquence du spectre) mais on ne crée pas de "fausses fréquences" dans le spectre du signal échantillonné.

II.5 Quelques exemples sonores

Support	f_e choisie
CD audio	44,1 kHz
DVD	48 kHz
Téléphonie	8 kHz
Radio numérique	22,5 kHz



Manipulation

Écouter une chanson échantillonnée à 8 et 44 kHz !!

<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/numerisation-acoustique-Chareyron2.xml>

L'oreille humaine (jeune...) entend de 20 Hz à 20 kHz.

Pour le signal téléphonique, le spectre est limité à 3400 Hz maximum. Cela se traduit par une perte de qualité sonore mais cela permet de réduire son encombrement spectral.

Pour une meilleure qualité, la fréquence maximale d'un signal musical destiné à être échantillonné est choisie à 20 kHz. L'échantillonnage s'effectue alors à 44 kHz (et jusqu'à 192 kHz pour certains mp3).

II.6 Fréquence apparente

D'après ce qui précède, une composante de fréquence f d'un signal est correctement restituée si $f < f_e/2$. Au-delà, cette composante apparaîtra à une **fréquence apparente** différente de f . Quelle que soit f , il y a toujours une et une seule des fréquences du type $(kf_e - f)$ qui appartient à l'intervalle $[0, f_e/2]$. Les fréquences de la forme $kf_e - f$ correspondent dans l'expérience de la roue stroboscopée au cas où la roue semble tourner dans le mauvais sens.



Lors d'une manipulation, vous pouvez éventuellement repérer si vous avez un problème d'échantillonnage : en étudiant le spectre du signal et en augmentant la fréquence du signal analysé, certains pics liés au repliement de spectre vont se déplacer vers la gauche (ceux du type $kf_e - f$) !

II.7 Influence de la durée d'acquisition sur le spectre

Quand on réalise une acquisition numérique, outre la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$, il faut aussi choisir la durée totale d'acquisition T_a , ou le nombre de points de mesure N , les 3 étant liés par :

$$T_a = (N - 1)T_e \quad (3.2)$$

* La résolution Δf du spectre (la distance entre deux points du spectre calculé par FFT ^a) est directement reliée à cette durée d'acquisition :

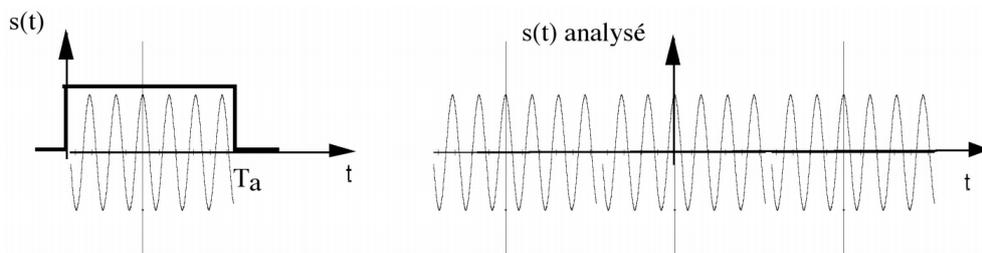
$$\Delta f = \frac{1}{T_a} = \frac{f_e}{N - 1} \quad (3.3)$$

a. Fast Fourier Transform, un algorithme de calcul de spectre

On a donc intérêt à choisir une durée d'acquisition la plus longue possible pour obtenir un spectre précis.

Cependant, le logiciel calculant le spectre (Latis Pro, Synchronie...) impose un nombre de points inférieur à une certaine valeur et augmenter trop la durée d'acquisition imposerait alors de réduire la fréquence d'échantillonnage...

La transformée de Fourier se calcule théoriquement de $t = -\infty$ à $t = \infty$. En pratique, le spectre d'un signal de durée T_a calculé par une FFT est celui du signal répété une infinité de fois :



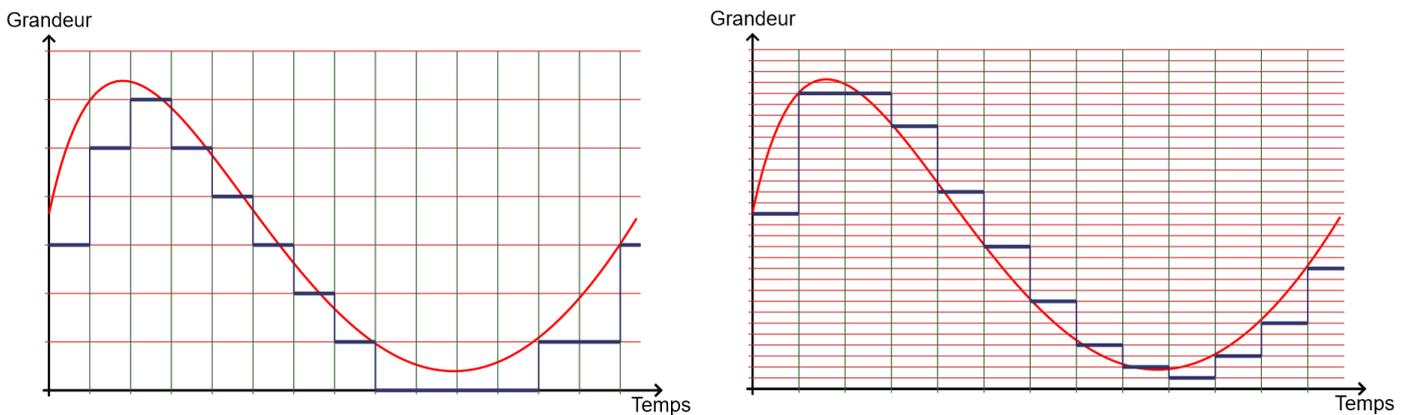
Ceci fait apparaître des discontinuités tous les T_a , ce qui fausse le spectre, et ce, d'autant moins que T_a est grand devant la période T du signal. On voit à nouveau qu'une durée d'acquisition la plus grande possible est préférable, mais également que pour un signal périodique, il est préférable de calculer le spectre sur **un nombre entier de périodes du signal**.

III. Quantification

L'opération de quantification consiste à attribuer un nombre binaire à toute valeur prélevée au signal lors de l'échantillonnage. En cas d'oubli sur la façon de coder en binaire, vous référer au cours d'Informatique de première année. Un élément essentiel : coder sur n bits permet d'écrire 2^n valeurs possibles.

III.1 Choix du nombre de bits

Plus le nombre de bits est élevé, plus il y a de valeurs possibles et par conséquent plus l'amplitude du signal numérisé sera proche de celle du signal analogique.



http://www.ostralo.net/3_animations/js/CAN/index_v2n.htm
 Dans tous les cas, la quantification entraîne une perte d'informations irréversible.

Exemples :

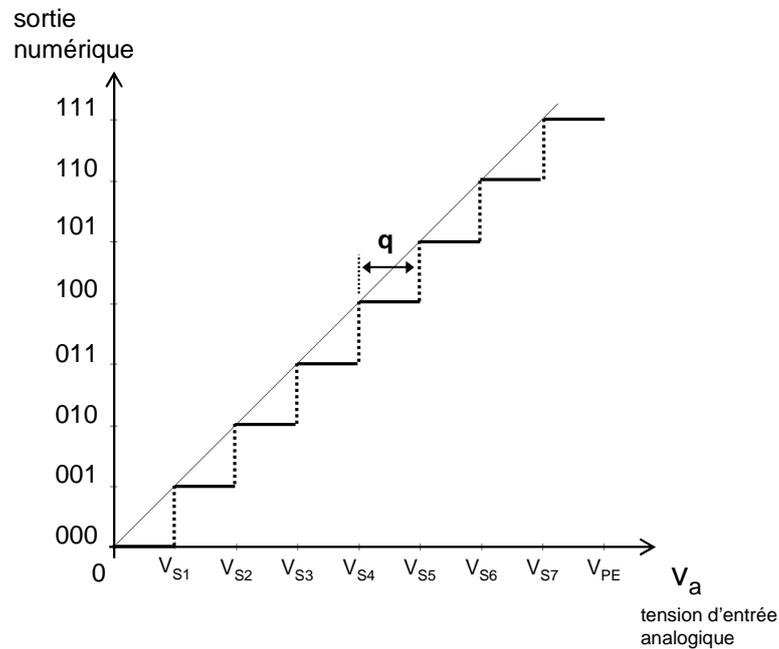
Support	nb de bits
CD	16
DVD	24
Téléphonie	8
Radio numérique	8
Oscilloscope Agilent du lycée	8
Carte d'acquisition Sysam-SP5	12

III.2 Pas de quantification

On appelle **pas de quantification** q l'intervalle de tension qui existe entre deux valeurs numériques binaires successives. Il correspond à la plus petite variation de tension que le convertisseur peut coder. On observe bien sur la simulation présentée précédemment que plus le nombre de bits est élevé, plus ce pas est faible, et donc meilleure est la précision de codage.

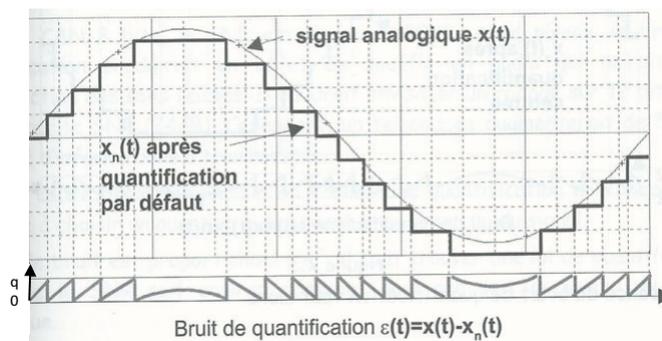
Pour une plage de variation de la tension analogique d'entrée V_{PE} (pour Pleine Échelle), un CAN de **résolution** n aura comme pas de quantification :

$$q = \frac{V_{PE}}{2^n} \quad (3.4)$$



Exemple : un signal analogique qui va de 0 V à 16 V codé en 3 bits aura $2^3 = 8$ valeurs possibles. Il y aura un pas de $16/8 = 2$ V. Les 8 valeurs numériques de tensions seront : 0 V ; 2 V ; 4 V ; 6 V ; 8 V ; 10 V ; 12 V ; 14 V. Lors de la quantification, chaque tension analogique pourra par exemple être comparée aux différents seuils, comme illustré ci-dessus.

La quantification entraîne donc une erreur, appelé **bruit de quantification** :



III.3 Conclusion

En conclusion, on a intérêt à prendre une fréquence d'échantillonnage la plus grande possible, et un nombre de bits le plus élevé possible. Pourquoi se restreindre alors au niveau de ces valeurs ?

- parce que cela nécessite pour le Convertisseurs Analogique-Numérique des composants plus onéreux et plus nombreux ;

- pour des raisons de stockage d'informations :



Exercice

Déterminer le nombre de Mo qu'occupe 1h de musique sur un CD audio en stéréo.

Le nombre N d'octets (ensemble de 8 bits) nécessaires pour « décrire » numériquement une seconde de son est :

$N = f_e \times (n/8) \times p$, avec f_e fréquence d'échantillonnage
 n nombre de bits
 p nombres de voies ($p = 1$ en mono, $p = 2$ en stéréo).

Par exemple, une heure de musique stéréo sur un CD audio (44,1 Hz, 16 bits, stéréo) nécessite :
 $44100 \times (16/8) \times 2 \times 3600 = 635040000$ octets.
 Sachant que 1 ko = 1024 octets et 1 Mo = 1024 ko, cela correspond à 605,6 Mo.

IV. Filtrage numérique

Sans trop empiéter sur le cours d'Informatique, présentons sur un exemple le filtrage numérique basé sur la méthode d'Euler. Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre, d'équation différentielle associée :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = e(t) \quad (3.5)$$

laissant passer les pulsations vérifiant $\omega \ll \frac{1}{\tau}$. En remplaçant la dérivée temporelle par son approximation

$$\frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{s_{n+1} - s_n}{T_e} \quad (3.6)$$

où T_e est la période d'échantillonnage, on obtient une relation de récurrence :

$$s_{n+1} = as_n + be_n \quad (3.7)$$

en posant $a = \frac{\tau/T_e}{1 + \tau/T_e}$ et $b = \frac{1}{1 + \tau/T_e}$.

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.signal

Ta=20 #temps d'acquisition
N=10000 #nombre de points acquis
Te = Ta/(N-1) #calcul de la période d'échantillonnage
fe=1/Te
temps=np.linspace(0,Ta,N)
e=2*np.sin(0.5*temps) + np.sin(50*temps)

## filtre ##
omegac=5 #pulsation de coupure
tau=1/omegac
taur=tau/Te
a=taur/(1+taur)
b=1/(1+taur)

## Méthode d'Euler ##
s=[e[0]] #on initialise avec la valeur initiale de e
for k in range(N-1):
    s.append(a*s[k]+b*e[k])

## Résultat théorique ##
def module(w):
    return 1/np.sqrt(1+w**2*tau**2)

def phase(w):
    return -np.arctan(w*tau)

sth=2*module(.5)*np.sin(0.5*temps+phase(0.5)) + module(50)*np.sin(50*temps+phase(50))

#### Filtrage plus efficace ####
b, a = scipy.signal.butter(5, 0.003) #filtre de Butterworth d'ordre 5 et de fréq de coupure
# 0.003 * Fe/2 (un pourcentage de la fréq. de Nyquist = Fe/2)
y = scipy.signal.filtfilt(b, a, e)

plt.subplot(311)
plt.plot(temps,e,'r')
plt.xlabel("t (s)")
  
```

```

plt.ylabel("e(t) (V)")
plt.title("Signal d'entrée")

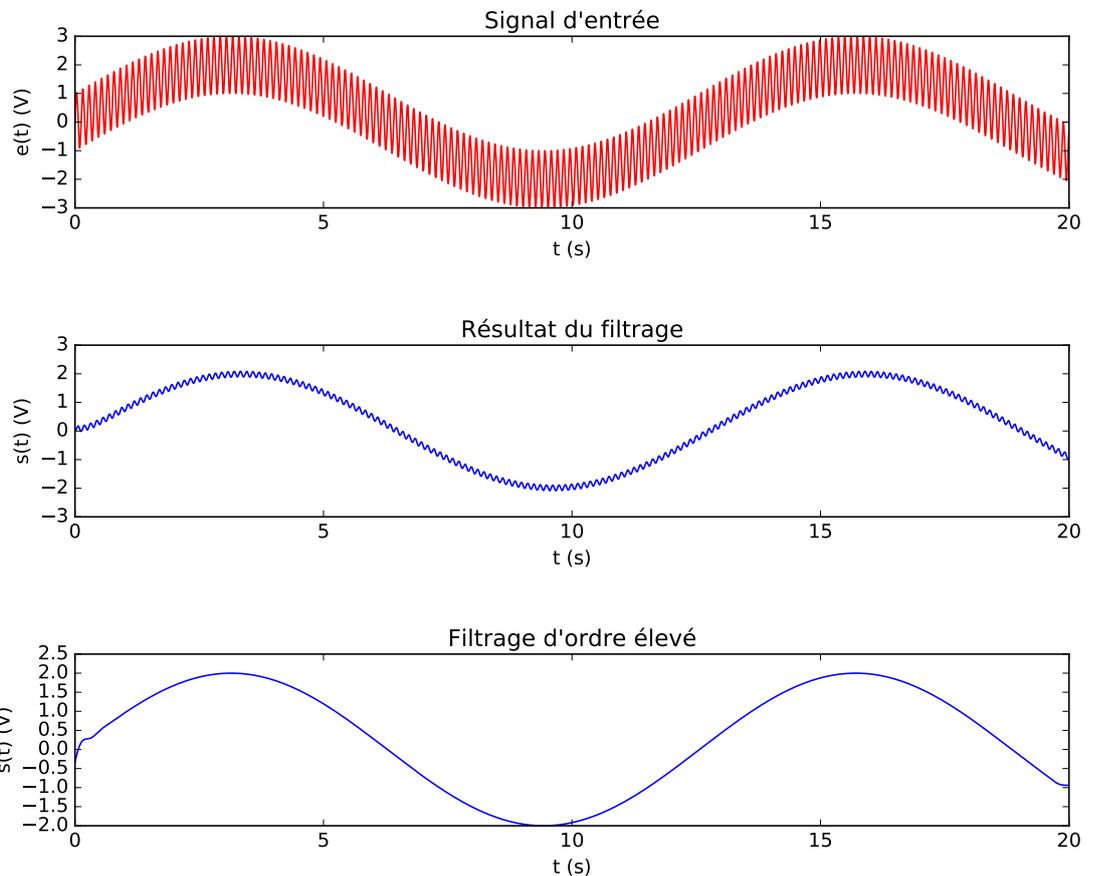
plt.subplot(312)
plt.plot(temps,s,'b')
#plt.plot(temps,sth,'g')
plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel("s(t) (V)")
plt.title("Résultat du filtrage")

plt.subplot(313)
plt.plot(temps,y,'b')
plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel("s(t) (V)")
plt.title("Filtrage d'ordre élevé")

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Le résultat est le suivant, à partir d'un signal de la forme $e(t) = 2\sin(0.5t) + \sin(50t)$, avec une pulsation de coupure $\omega_c = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 1/\tau$:



On constate une nette diminution de la composante à haute fréquence, mais il est plus approprié d'employer un filtre d'ordre supérieur (typiquement 5) pour s'assurer de couper nettement les hautes fréquences.

3.1 Calibre et précision de mesure

Deux étudiants mesurent l'amplitude crête à crête d'un signal sinusoïdal d'amplitude crête à crête de 80 mV environ à l'aide de la même carte d'acquisition fonctionnant sur 12 bits. L'un effectue la mesure sur le calibre $-10\text{ V} / 10\text{ V}$, l'autre sur le calibre $-0,1\text{ V} / 0,1\text{ V}$.

Déterminer dans les deux cas l'erreur relative maximale induite par la quantification.

Le pas de quantification étant de $q = \frac{V_{PE}}{2^{12}}$, on trouve les valeurs 4,883 mV ($-10/10$) et 48,8 μV . Tout au plus, l'erreur absolue induite par la quantification est de q , d'où l'erreur relative :

$$\delta = \frac{q}{\text{valeur}} = 6\% \quad \text{ou} \quad 0,06\% \quad (3.8)$$

d'où le fait qu'il faille réfléchir à deux fois avant de choisir un calibre et de mesurer des tensions à l'oscilloscope !

3.2 Tracé d'un graphe à la calculatrice

On considère une calculatrice graphique disposant d'un écran de 320×240 pixels. On trace la fonction $f(x) = \sin(1000x)$ entre $x = -10$ et $x = +10$.

Combien voit-on de périodes à l'écran ?

Le signal est de fréquence $f = 1000/2\pi = 159,155\text{ Hz}$. Or, la fréquence d'échantillonnage est $f_e = (320 - 1)/(10 - (-10)) = 15,95\text{ Hz}$

Déterminons la fréquence apparente : $E(f/f_e) = 9$ (E partie entière), mais $f - 9f_e > f_e/2$ donc $f_{app} = |f - 10f_e| = 0,345\text{ Hz}$. On observe donc la même courbe en traçant $\sin(2\pi \times 0,345x)$, la période apparente étant alors $T_{app} = 1/f_{app} = 2,89\text{ s}$

Donc le nombre de période visibles est :

$$N = \frac{x_{max} - x_{min}}{T_{app}} = \frac{20}{2,89} = 6,9 \quad (3.9)$$

3.3 La roue tourne

Au cinéma, un spectateur regarde une scène d'un film montrant une voiture en train de rouler sur une autoroute nationale limitée à 130 km/h.

Le film est tourné et projeté à 24 images par seconde. La voiture possède des roues de diamètre $d = 59\text{ cm}$. On négligera toute limitation éventuelle liée au temps de réponse de l'œil du spectateur.

1. Jusqu'à quelle vitesse de la voiture voit-on la roue tourner à sa fréquence réelle ?
2. Le spectateur a l'impression de voir les roues de la voiture tourner à l'envers à 2,0 tours par seconde. Le conducteur de la voiture fait-il un excès de vitesse ?

-
1. La fréquence d'échantillonnage étant de $f_e = 24\text{ Hz}$, la fréquence de rotation maximale de la roue doit être de $f_e/2$, ce qui correspond à une vitesse

$$v_{max} = \pi d \frac{f_e}{2} = 80\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \quad (3.10)$$

2. On peut considérer que l'on est juste légèrement sous-échantillonné, et donc la fréquence mesurée est $f_{mes} = f_e - f$, d'où $f = 22\text{ Hz}$, ce qui correspond à une vitesse $v = \pi d f = 147\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$!

3.4 Acquisition numérique

À l'aide d'une carte d'acquisition (convertisseur analogique-numérique) et d'un ordinateur, on visualise le spectre d'un signal rectangulaire de fréquence $f = 1000\text{ Hz}$, d'amplitude $A = 5,0\text{ V}$, dont la décomposition en série de Fourier est donnée par :

$$s(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2\pi(2k+1)ft) \quad (3.11)$$

La fréquence d'échantillonnage est fixée à $f_e = 7500$ Hz et le calibre à $(-10\text{ V} / 10\text{ V})$.

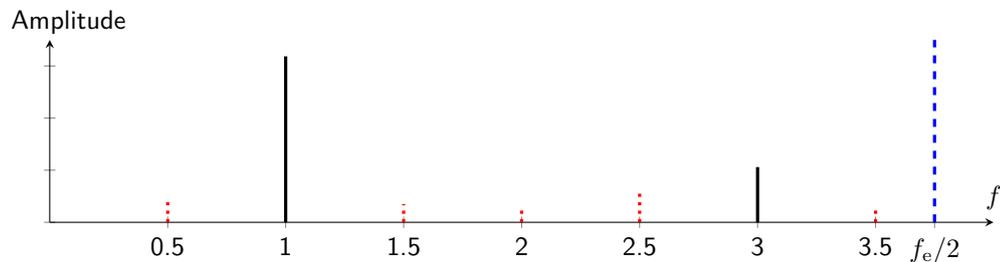
1. Le critère de Shannon est-il vérifié pour ce signal ?
2. Représenter le spectre obtenu, en négligeant les harmoniques de fréquence $f \geq 14$ kHz.
3. En observant les valeurs du signal temporel, on constate qu'il prend deux valeurs dans la partie basse du créneau : $s = -5,0588\text{ V}$ et $s = -4,9804\text{ V}$. En déduire le nombre de bits de la carte.

1. Le critère de Shannon est vérifié uniquement pour certaines harmoniques : il faut que $(2k + 1)f < \frac{f_e}{2} = 3750$ Hz, c'est-à-dire $k \leq 1$: seul le fondamental et la 3e harmonique respectent le critère de Shannon.

2. On calcule alors les fréquences apparentes des harmoniques 5, 7, 9, 11 et 13 :

- Harmonique 5, $f = 5$ kHz, $f_{\text{app},5} = f_e - f = 2,5$ kHz ;
- Harmonique 7, $f_{\text{app},7} = f_e - f = 500$ Hz ;
- Harmonique 9, $f_{\text{app},9} = |f_e - f| = 1,5$ kHz ;
- Harmonique 11, $f_{\text{app},11} = 3,5$ kHz ;
- Harmonique 13 : là cela change, car $|f_e - f| > \frac{f_e}{2}$, donc il faut prendre $f_{\text{app},13} = 2f_e - f = 2$ kHz.

D'où le spectre ci-dessous :



3. L'écart entre les deux valeurs nous donne le pas de quantification $q = 78,4$ mV, soit avec $q = \frac{V_{\text{PE}}}{2^n}$, il vient $n = \frac{\ln(V_{\text{PE}}/q)}{\ln 2} = 8$.