

Électrostatique

Sommaire

1.1 Le champ électrostatique	3
1.1.1 Expression	3
1.1.2 Topographie d'un champ électrique	4
1.2 Invariances et symétries	5
1.2.1 Principe de Curie	5
1.2.2 Plan de symétries et d'antisymétrie	6
1.2.3 Invariances	7
1.3 Théorème de Gauss	8
1.3.1 Énoncé	8
1.3.2 Utilisation du théorème de Gauss pour déterminer un champ électrique	8
1.3.3 Équation de Maxwell-Gauss	10
1.3.4 Analogie entre l'électrostatique et la gravitation	11
1.4 Le potentiel électrique	12
1.4.1 Énergie potentielle électrostatique	12
1.4.2 Potentiel électrique et champ électrique	13
1.4.3 Topographie du champ électrique (suite)	13
1.4.4 Exemples	13
1.4.5 Équation de Maxwell-Faraday et origine du potentiel électrique	15
1.4.6 Équation de Poisson	15
1.5 Bilan	15

Questions de cours :

- Topographie du champ électrostatique : équipotentielles, lignes de champ, propriétés, exemples.
- Principe de Curie, application aux symétries et invariances pour le champ électrostatique.
- Théorème de Gauss : énoncé et application à une distribution volumique au choix du colleur.
- Établir le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
- Démontrer l'équation de Maxwell-Gauss à partir du théorème de Gauss, conséquences.
- Présenter l'analogie entre l'électrostatique et la gravitation. Appliquer le théorème de Gauss gravitationnel sur un exemple au choix.
- Énoncer l'équation de Maxwell-Faraday. Citer les conséquences pour \vec{E} .

Capacités exigibles du BO :

- Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges pour en déduire les propriétés de \vec{E} .
- Citer les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday en régime stationnaire.
- Relier l'existence du potentiel scalaire électrique au caractère irrotationnel de \vec{E} .
- Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrique.
- Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme de E en dehors des sources.
- Représenter les lignes de champ connaissant les surfaces équipotentielles et inversement. Évaluer le champ électrique à partir d'un réseau de surfaces équipotentielles.
- Établir l'équation locale du deuxième ordre reliant le potentiel à la densité de charge.
- Établir le champ électrique et le potentiel créés par :
 - une charge ponctuelle ;
 - une distribution de charge à symétrie sphérique ;
 - une distribution de charge à symétrie cylindrique.
- Utiliser le modèle de la distribution surfacique de charge dans le cas d'une distribution volumique d'épaisseur faible devant l'échelle de description.
- Établir le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
- Exploiter le théorème de superposition.
- Établir la relation $E_p = qV$.
- Appliquer la loi de l'énergie cinétique à une particule chargée dans un champ électrique.
- Établir un tableau d'analogies entre les champs électrique et gravitationnel.

Ce chapitre est consacré aux champs électrostatiques, c'est-à-dire aux champs électriques créés par des distributions stationnaires de charges électriques (nous étudierons dans des chapitres ultérieurs l'influence des courants, et l'absence de lien entre champ magnétique et champ électrique en régime stationnaire).

I. Le champ électrostatique

I.1 Expression

a) Généralités

Suite aux travaux de Coulomb, en lien avec ceux de Newton sur la gravitation, la notion de champ électrique a été introduite pour expliquer les interactions à distance entre des corps chargés. Bien que le **champ électrique s'observe via ses effets** sur une particule chargée, introduire ce concept de champ vectoriel substitue à la notion d'action à distance la notion de « potentiel de force » qui préexiste avant même de venir placer une particule chargée.

L'intérêt est que, en connaissant localement le champ électrique, on peut décrire entièrement les phénomènes électrostatiques qui s'y produisent sans avoir à faire appel à la description détaillée des sources de champ. Pour un champ électrique $\vec{E}(M)$, la force électrique qui s'exerce si on vient placer une charge q en M est alors simplement

$$\vec{F}(M) = q\vec{E}(M) \quad (1.1)$$

* La force électrique est une grandeur qui ne dépend pas du choix d'orientation de l'espace (choix conventionnel du sens direct pour un trièdre de référence) : on dit que c'est un **vecteur polaire** ou un « **vrai vecteur** » (par opposition au « pseudo-vecteur » ou vecteur axial, qui dépend de l'orientation du sens direct). Comme on a un simple rapport de proportionnalité entre \vec{F} et \vec{E} , le **champ électrique est un vecteur polaire** également.

Le champ électrique s'exprime en $V \cdot m^{-1}$ ou en $N \cdot C^{-1}$. Quelques ordg sont à connaître :

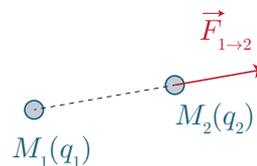
Exemple	Ordre de grandeur
Ondes radio	$10^{-1} V \cdot m^{-1}$
Atmosphère par beau temps	♥ 10^1 - $10^2 V \cdot m^{-1}$ ♥
Téléphone portable à 30 cm	$25 V \cdot m^{-1}$
Atmosphère par temps orageux	$10^4 V \cdot m^{-1}$
Champ disruptif de l'air	♥ $3 \cdot 10^6 V \cdot m^{-1}$ ♥
Orbite de l'électron de l'atome d'hydrogène	$5 \cdot 10^{11} V \cdot m^{-1}$

b) Champ créé par une charge ponctuelle unique

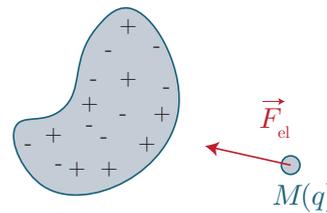
La force s'exerçant sur un charge q_2 placée en M_2 du fait de la présence d'une charge q_1 en M_1 (Coulomb, 1785) s'écrit :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (M_1 M_2)^3} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (1.2)$$

avec $\epsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$ est la permittivité diélectrique du vide.



« Le champ crée une toile à travers tout le ciel » Maxwell



Pour tenir compte de l'influence du milieu, on remplace la permittivité diélectrique du vide par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ avec ϵ_r la permittivité relative du milieu. Par exemple pour l'air $\epsilon_r \simeq 1$ (donc air \simeq vide), mais dans l'eau $\epsilon_r \simeq 80$, c'est-à-dire que l'interaction coulombienne est considérablement diminuée.

Ainsi, on peut définir d'après la force coulombienne le champ électrique créé en M_2 par la charge q_1 :

$$\vec{E}(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 (M_1 M_2)^3} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (1.3)$$

On peut le réécrire par un choix d'origine du repère approprié en plaçant une charge q à l'origine du repère, en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OM^3} \overrightarrow{OM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (1.4)$$



Le champ électrique n'est pas défini au niveau de la source ponctuelle, en $r = 0$.

c) Principe de superposition

Pour une distribution de charges ponctuelles quelconques, on peut simplement additionner les forces liées à chaque source de champ électrique : $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q\vec{E}_i = q\vec{E}$. Le champ électrique vérifie donc le **principe de superposition** : le champ électrostatique total créé par plusieurs charges est la somme des champs électrostatiques créés par chacune des charges

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad (1.5)$$

Par exemple pour N charges ponctuelles q_i placées en M_i , le champ électrique au point M s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 M_i M^3} \overrightarrow{M_i M} \quad (1.6)$$

* On peut aller plus loin en considérant une distribution volumique de charge caractérisée par une densité volumique de charge $\rho(P)$: on découpe l'espace en volumes élémentaires $d\tau$ qui possèdent une charge $\delta q = \rho(P)d\tau(P)$. À partir du champ électrique élémentaire, on peut exprimer par intégration le champ électrique total :

$$\delta\vec{E}(M) = \frac{\delta q(P)}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM} \implies \vec{E}(M) = \iiint_{(V)} \frac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM} \quad (1.7)$$

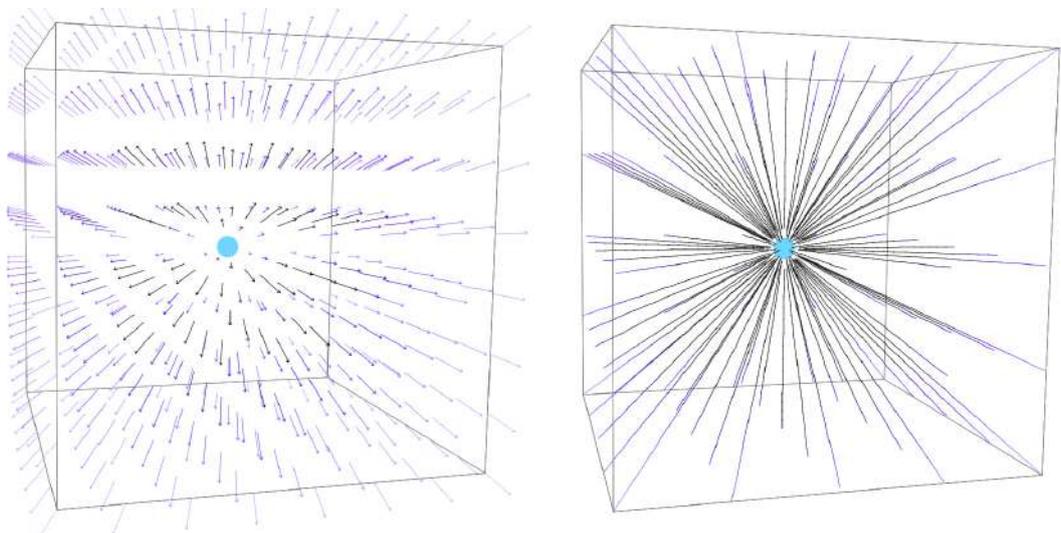
Néanmoins cette approche n'est clairement pas à privilégier, nous verrons que l'usage des invariances et symétries couplé à une équation intégrale constitueront un moyen efficace de calculer un champ électrique.

1.2 Topographie d'un champ électrique

Lors de l'étude de la topographie du champ électrostatique, on reprend la même démarche qu'en mécanique des fluides : à une carte de champ de vecteur, on préfère couramment représenter les lignes de champ. Comme ce sont les courbes en tout point tangentes au champ électrique, on peut déterminer leurs équations :

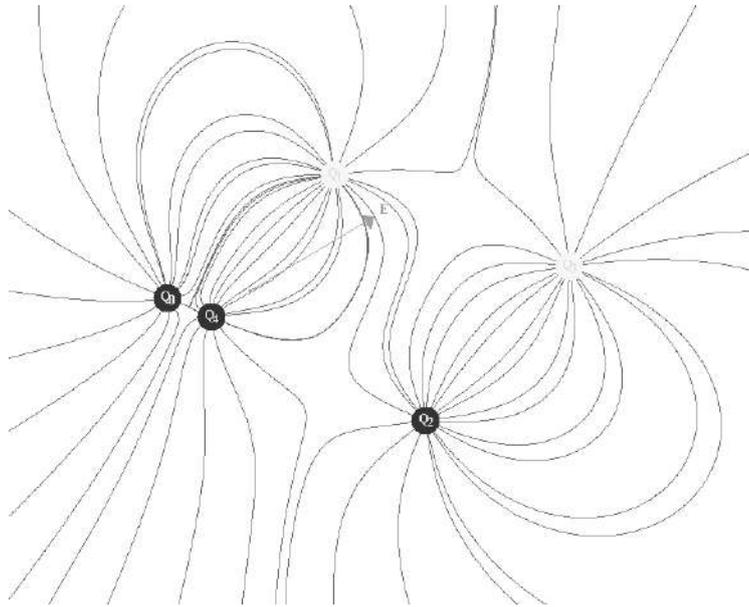
$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{r} = \vec{0} \quad (1.8)$$

Pour le champ créé par une charge ponctuelle unique, les lignes de champ sont des demi-droites issues de O , divergentes si la charge est positive, et convergentes sinon :



C'est cohérent, car $\vec{e}_r \wedge (dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi) = \vec{0}$ conduit à $d\theta = d\varphi = 0$, c'est-à-dire des portions de droites passant par l'origine.

En considérant un exemple avec plusieurs charges :



Demander d'orienter les lignes de champs et trouver le signe des charges.

Quelques propriétés sont à noter :

- * ■ si des lignes de champ différentes se coupent en un point, il y a deux possibilités : soit une charge ponctuelle se trouve au croisement ; soit en l'absence de charges, le champ électrique est nul (seul le vecteur nul peut être tangent à deux courbes différentes en un même point) ;
- * ■ les lignes de champ vont toujours d'une charge vers une autre charge, ou vers (ou depuis) l'infini ;
- * ■ les lignes de champ électrique ne sont jamais bouclées sur elles-mêmes : **elles ne sont pas fermées.**

Vous pouvez vous rendre sur les sites :

<http://www.falstad.com/vector3de/fullscreen.html> ou

<http://www.falstad.com/emstatic/fullscreen.html> ou encore

http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields_en.html pour des simulations de cartes de champ électrostatique.

II. Invariances et symétries

II.1 Principe de Curie

La plupart des phénomènes en physique vérifient un principe de symétrie énoncé initialement par Pierre Curie dans le cadre d'une étude des propriétés cristallographiques de cristaux piézoélectriques :

Principe de Curie

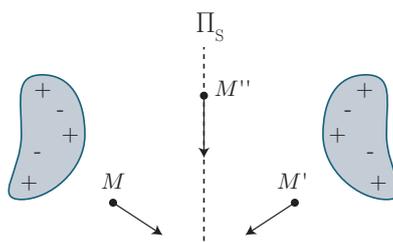
- * Dans une expérience de physique, lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que les effets peuvent être plus symétriques que les causes.

Dans notre cas, il faut donc étudier les symétries d'une distribution de charge, cause du champ électrique : le champ électrique vérifiera les mêmes propriétés de symétrie.

II.2 Plans de symétrie et d'antisymétrie

a) Plans de symétrie

Le cas le plus simple est celui d'un plan de symétrie pour une distribution de charge. Il y a à la fois symétrie dans la position et dans les valeurs de charges de part et d'autre d'un plan Π_S (noté également Π^+) :

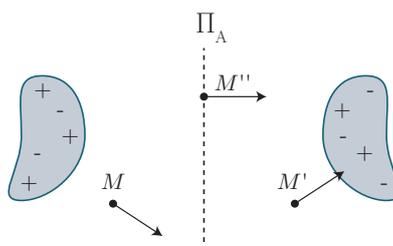


Ainsi pour un plan de symétrie :

- * si $M' = S_{\Pi_S}(M)$, $\vec{E}(M') = S_{\Pi_S}(\vec{E}(M))$;
- * pour un point M'' appartenant au plan de symétrie, $\vec{E}(M'')$ doit être son propre symétrique, c'est-à-dire que **le champ électrique en point d'un plan de symétrie est contenu dans ce plan.**

b) Plans d'antisymétrie

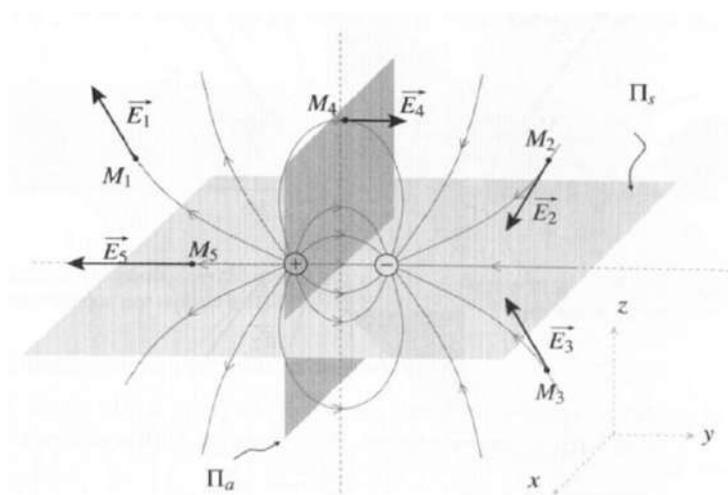
Un plan d'antisymétrie pour une distribution de charge Π_A (aussi noté Π^-) est un plan de symétrie des positions des charges, mais le signe des charges est inversé :



Ainsi pour un plan d'antisymétrie :

- * si $M' = S_{\Pi_A}(M)$, $\vec{E}(M') = -S_{\Pi_A}(\vec{E}(M))$;
- * pour un point M'' appartenant au plan d'antisymétrie, le champ doit être son propre antisymétrique : $\vec{E}(M'') = -S_{\Pi_A}(\vec{E}(M''))$. **Le champ électrique en un point d'un plan d'antisymétrie est orthogonal à ce plan.**

Sur l'exemple ci-dessous, retrouver les propriétés de symétrie et antisymétrie :



c) Exemples

Les symétries et antisymétries permettent de déterminer l'orientation du champ électrique.

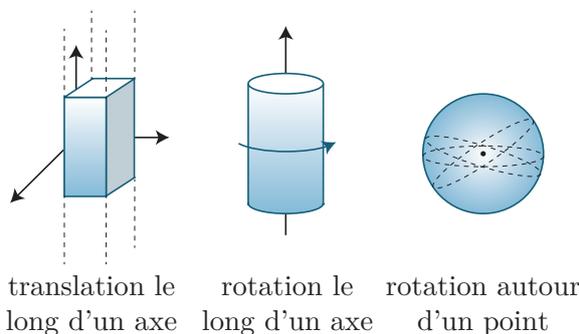
C'est donc particulièrement utile lorsqu'on souhaite préparer un calcul de champ électrique, afin de se ramener généralement à une seule direction en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. Traitons quelques exemples :

- le plan infini uniformément chargé caractérisé par $z = 0$, pour lequel on néglige les effets de bords, crée un champ électrique orthogonal à ce plan. En effet, pour un point M quelconque de l'espace, les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge, donc \vec{E} appartient à l'intersection et est donc selon \vec{e}_z , $\vec{E} = E_z(x, y, z)\vec{e}_z$;
- un cylindre de rayon R , uniformément chargé, d'axe de révolution (Oz) et infiniment long crée un champ électrique selon \vec{e}_r en coordonnées cylindriques, comme $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution. Ainsi $\vec{E} = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r$;
- le même type de cylindre, mais non infiniment long, implique que pour un point M quelconque, seul le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie, et donc $\vec{E} = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$;
- une boule uniformément chargée centrée en O et de rayon R crée un champ nécessairement radial, car les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie : $\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$.



Pour étudier les symétries, il faut IMPERATIVEMENT choisir un plan qui passe par le point M : on étudie la direction du champ électrique en ce point !

II.3 Invariances



- * Lorsqu'on étudie une distribution de charge, sa forme nous indique le choix de la base appropriée à l'étude. **Chaque invariance de la distribution se traduit alors par la disparition d'une variable pour le champ électrique.**

Exercice

Reprendre les exemples qui précèdent et en déduire la forme sous laquelle rechercher le champ électrique.

- pour le plan infini, invariance par translation selon \vec{e}_x et \vec{e}_y , donc $\vec{E} = E_z(z)\vec{e}_z$;
- pour le cylindre infini, invariance par translation selon \vec{e}_z et par rotation d'angle θ , donc $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$;
- pour le cylindre de longueur finie, on a toujours l'invariance par rotation, mais on n'a plus l'invariance par translation selon \vec{e}_z , donc $\vec{E} = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$;
- enfin pour la boule chargée uniformément en volume, on a complète invariance par rotation autour du point O , donc $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$.

Dans le cas d'une invariance discrète par rotation ou translation pour la distribution de charge, il en sera également de même pour le champ électrique.

III. Théorème de Gauss

III.1 Énoncé



Exercice

Calculer le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une sphère S qui l'englobe, centrée sur la charge et de rayon R .

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(r=R) \cdot d\vec{S} = \oiint_{(S)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

car la surface vaut $4\pi R^2$. Ce résultat est donc indépendant du rayon R de la sphère.

Ce résultat se généralise :

Théorème de Gauss

Pour une **surface fermée** (S) délimitant un volume (V), le flux sortant du champ électrique à travers cette surface fermée vaut :

*

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (1.10)$$

avec $Q_{\text{int}} = \iiint_{(V)} \rho d\tau$ la charge contenue **à l'intérieur** du volume (V).

Il s'agit d'une formulation intégrale, à opposer à la formulation locale que nous étudierons en III.3. Notons que cette formulation met en évidence que la position des charges à l'intérieur du volume n'a pas d'influence sur la valeur du flux sortant.

III.2 Utilisation du théorème de Gauss pour déterminer un champ électrique

a) Méthode générale

Le théorème de Gauss va permettre des calculs de champs électrostatiques créés par des distributions de charges présentant des invariances et symétries : l'idée est de pouvoir choisir une surface à travers laquelle le flux du champ électrique est simple à calculer (soit nul, soit tel que le champ électrique soit de norme constante sur la surface : il sort de l'intégrale). On procède toujours de la manière suivante :

1. on choisit un système de coordonnées adapté et on détermine éventuellement les différentes zones d'étude (= zones où on place un point M pour lequel on souhaite connaître l'expression du champ électrique) : en particulier, le point peut être quelconque pour une distribution volumique, mais il ne peut pas se trouver sur la distribution surfacique ou linéique ;
2. on étudie les symétries pour déterminer la direction de \vec{E} ;
3. on étudie les invariances pour éliminer la dépendance en certaines variables pour \vec{E} ;
4. on choisit une surface de Gauss **fermée**, et pour laquelle **le flux de \vec{E} se calcule facilement** ;
5. on applique alors le théorème de Gauss.



Il est impératif de bien définir la surface de Gauss avant application du théorème. À l'oral particulièrement, justifiez un tel choix de surface.

b) Exemples

i) Boule chargée en volume

Commençons par étudier une sphère de rayon R uniformément chargée en volume. Elle est centrée en O , et on note ρ la densité volumique de charge, supposée uniforme, et Q la charge totale portée par la sphère.

1. On se place en coordonnées sphériques ; on distinguera $M(r \leq R)$ et $M(r \geq R)$;
2. les symétries étudiées précédemment ont permis de conclure que $\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$;
3. les invariances par rotation impliquent $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$;
4. on choisit donc pour surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon r , de sorte que sur cette surface, le vecteur surface élémentaire soit colinéaire à \vec{E} et tel que \vec{E} est de norme constante quels que soient les angles θ et φ ;
5. on applique alors le théorème de Gauss en distinguant :

*

- $r \leq R$:

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \rho d\tau \iff E_r(r) \oiint_{(S)} \vec{e}_r \cdot d\vec{S} = E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (1.11)$$

$$\text{d'où } E_r(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

- $r \geq R$:

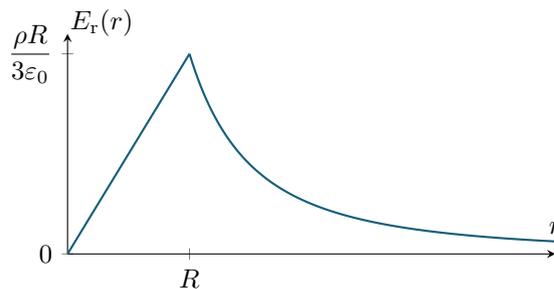
$$E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (1.12)$$

$$\text{d'où } E_r(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ comme } Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3.$$

*

On constate ainsi d'une part qu'il y a continuité du champ en $r = R^-$ et $r = R^+$, et d'autre part que **le champ pour $r \geq R$ est le même que celui créé par une charge ponctuelle Q placée en O !**

On peut enfin tracer l'allure de la norme du champ électrique avec la distance :



ii) Cylindre uniformément chargé en volume

Exercice

Procéder de la même façon pour un cylindre infiniment long, d'axe (Oz) et de rayon R , uniformément chargé en volume (densité volumique ρ).

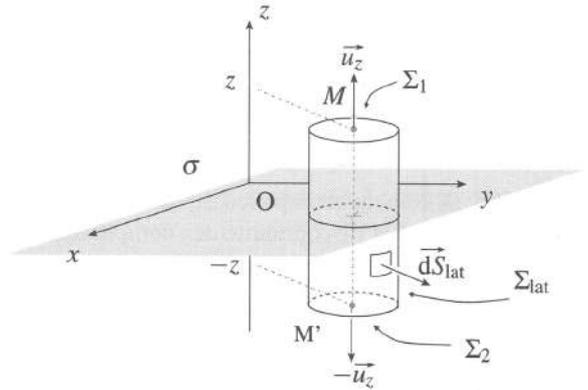
On reprend la même stratégie :

1. coordonnées cylindriques, et distinction $r \leq R$ et $r \geq R$;
- 2+3. symétries et invariances permettent de chercher le champ sous la forme $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$;
4. la surface de Gauss est un cylindre d'axe (Oz) , rayon r et hauteur h , de sorte que le flux soit nul sur les deux disques, et simple à calculer sur la surface latérale (où E_r est constant) ;
5. on applique alors le théorème de Gauss :
 - pour $r \leq R$, $E_r 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$ soit $E_r(r \leq R) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$;
 - de même pour $r \geq R$, $E_r(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$

c) Cas d'une distribution surfacique

Considérons le cas d'un pavé droit ayant l'une de ses dimensions très petite devant les deux autres. On peut alors la modéliser à l'aide d'une distribution surfacique de charges : le plan est donc chargé avec une densité surfacique de charge σ .

Après s'être placé en coordonnées cartésiennes, on recherche le champ \vec{E} en dehors de la surface chargée située en $z = 0$. En étudiant les invariances et symétries, on cherche un champ sous la forme $\vec{E} = E_z(z)\vec{e}_z$. Cela nous pousse à considérer une surface de Gauss qui englobe une portion du plan, comporte deux surfaces Σ_1 et Σ_2 parallèles au plan chargé et d'aire S , refermée par une surface latérale de sorte à former un cylindre (au sens large, la base n'est pas nécessairement circulaire).



Les surfaces Σ_1 et Σ_2 ne sont pas choisies au hasard : elles sont symétriques par rapport au plan défini par $z = 0$, comme il s'agit d'un plan de symétrie de la distribution, les champs électriques en $M(z)$ et en $M'(-z)$ sont reliés par la relation $\vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$, c'est-à-dire $E(z) = -E(-z)$. Appliquons le théorème de Gauss à cette surface fermée, avec $z > 0$:

$$\iint_{\Sigma_{\text{lat}}} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}}_{=0} + \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \iff E(z)S - E(-z)S = 2E(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

conduisant à

$$\vec{E}(z) = \frac{\text{sgn}(z)\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z \quad \text{pour } z \neq 0 \quad (1.14)$$

avec $\text{sgn}(z) = +1$ si $z > 0$ et -1 si $z < 0$.

On observe ainsi une discontinuité du champ électrique au passage de la surface chargée :

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z \quad (1.15)$$

Cette propriété assez générale sera revue ultérieurement et constitue ce que l'on appelle une relation de passage.

Cette discontinuité est levée si on considère une distribution volumique de charge : le calcul montre que $E_z(z)$ dépend linéairement de z dans le pavé uniformément chargé en volumique $E(z) = \frac{\sigma z}{\epsilon_0 e}$ avec e l'épaisseur du pavé.

III.3 Équation de Maxwell-Gauss

a) Énoncé

Le théorème de Gauss est une formulation intégrale associée à une équation locale concernant \vec{E} et la densité volumique de charge $\rho(M)$ que l'on peut retrouver à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski :



Démonstration

Considérons un volume (V) quelconque délimité par une surface fermée (S) . L'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho d\tau \quad (1.16)$$

puis en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div}(\vec{E}) d\tau \quad (1.17)$$

d'où finalement :

$$\forall V, \iiint_{(V)} \left(\text{div}(\vec{E}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau = 0 \quad (1.18)$$

conduisant à l'équation de Maxwell-Gauss :

Équation de Maxwell-Gauss

Le champ électrostatique vérifie l'équation de Maxwell-Gauss :

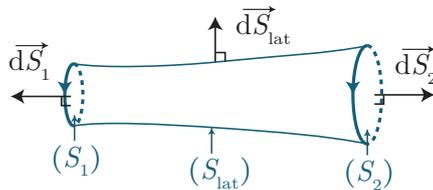
*

$$\operatorname{div}(\vec{E})(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} \quad (1.19)$$

équation locale reliant le champ électrique en un point M donné et la densité volumique de charge en ce même point. Cette équation est valable même en régime variable.

b) Conséquences

Dans une région vide de charge, où $\rho = 0$, le champ électrique vérifie donc $\operatorname{div}(\vec{E}) = 0$, c'est-à-dire que le vecteur \vec{E} est à flux conservatif. En particulier, si on considère un tube de champ, le flux du champ électrique est constant à travers une section droite du tube de champ :



En effet,

$$\iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \underbrace{\iint_{(S_{\text{lat}})} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}}_{=0} = 0 \iff \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot (-d\vec{S}_1) = \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 \quad (1.20)$$

avec $-d\vec{S}_1$ le vecteur surface élémentaire orienté dans le sens entrant par rapport au tube de champ. En particulier, si on note E_1 et E_2 les normes moyennes du champ électrique sur les sections S_1 et S_2 , on trouve en ordre de grandeur

$$E_1 S_1 \sim E_2 S_2 \iff \frac{E_1}{E_2} \sim \frac{S_2}{S_1} \quad (1.21)$$

* | Dans une région vide de charges, le champ électrique est plus intense là où les lignes de champ se resserrent, c'est-à-dire là où les tubes de champs se rétrécissent.

III.4 Analogie entre l'électrostatique et la gravitation

Terminons cette section en notant la très forte analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel, à ceci près que l'interaction gravitationnelle est toujours attractive. Le tableau ci-dessous résume cette analogie :

Champ électrique \vec{E}	Champ gravitationnel \vec{g}
Force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$	Force gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{g}$
Cas de deux charges q_1 et q_2 $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 (M_1 M_2)^3} \overrightarrow{M_1 M_2}$	Cas de deux masses m_1 et m_2 $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{(M_1 M_2)^3} \overrightarrow{M_1 M_2}$
q_1, q_2	m_1, m_2
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$, avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$
$\vec{E}(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{(M_1 M_2)^3}$	$\vec{g}(M_2) = -G m_1 \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{(M_1 M_2)^3}$
Théorème de Gauss $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	Théorème de Gauss gravitationnel $\oiint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$

Les raisonnements conduits pour l'application du théorème de Gauss sont similaires lorsqu'on étudie une distribution de masse, qu'elle soit ponctuelle ou volumique : repère et coordonnées, éléments de symétrie et d'invariance, choix de la surface de Gauss fermée, puis application du théorème.



Exercice

Sur l'exemple d'une boule de masse totale M et de rayon R , retrouver le champ gravitationnel partout dans l'espace.

Même raisonnement que pour la sphère uniformément chargée en volume. Avec $\rho = M / \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)$, il vient :

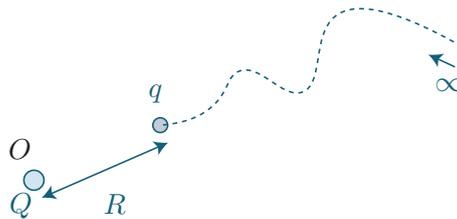
$$\vec{g}(r \leq R) = -\frac{4\pi G\rho r}{3} \quad \text{et} \quad \vec{g}(r \geq R) = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r \quad (1.22)$$

IV. Le potentiel électrique

Note à moi-même : avoir fait la partie de cours sur le rotationnel !

IV.1 Énergie potentielle électrostatique

Apporter une charge Q en un point O de l'espace, initialement vide, ne coûte pas d'énergie particulière. Par contre, dès que l'on souhaite apporter une charge q en un point M à la distance R de O , cette dernière subit la répulsion ou l'attraction électrostatique de Q . Évaluons le travail nécessaire pour l'amener en M depuis l'infini :



- on considère un déplacement quasi-statique depuis l'infini : l'opérateur doit à chaque instant appliquer une force qui s'oppose à la répulsion électrostatique $\vec{F}_{\text{op}} = -\vec{F}_{\text{el}}$, donc $\delta W_{\text{op}} = -\delta W_{\text{el}}$;
- le travail élémentaire de la force électrique vaut :

$$\delta W_{\text{el}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -d\left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = -dE_p \quad (1.23)$$

On fait apparaître la différentielle d'une énergie potentielle, cohérent avec le fait que la force électrique est une force conservative ;

- le travail complet est alors la somme de tous les travaux élémentaires (c'est aussi la circulation de la force \vec{F}_{op}) :

*

$$W_{\text{op}} = -W_{\text{el}} = -\int_{+\infty}^R -d\left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1.24)$$

indépendant du chemin parcouru ;

- pour un autre déplacement entre deux points A et B , on retrouve un résultat classique :

$$W_{A \rightarrow B, \text{el}} = \int_A^B -dE_p = E_p(A) - E_p(B) = q(V(A) - V(B)) \quad (1.25)$$

en posant $V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ le **potentiel électrique** créé par la charge Q au point M , et $E_p = qV(M)$.

IV.2 Potentiel électrique et champ électrique

On peut généraliser le résultat précédent :

$$* \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B) = q(V(A) - V(B)) \implies \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(A) - V(B) \quad (1.26)$$

soit pour deux points infiniment proches $M(\vec{r})$ et $M'(\vec{r} + d\vec{r})$:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{r} \quad (1.27)$$

* par définition du gradient. Par identification :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)(M) \quad (1.28)$$

Le champ électrique est donc orienté dans le sens des potentiels électriques décroissants. On retrouve également le fait que la force électrique dérive d'une énergie potentielle :

$$* \vec{F}_{el} = q\vec{E} = -q\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV(M)) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \quad (1.29)$$

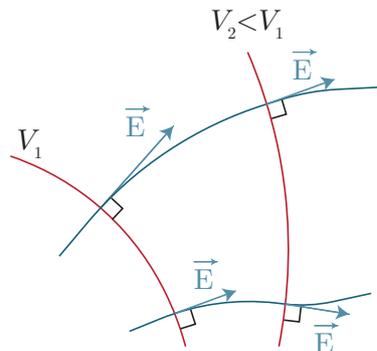
expression qui étend la définition vue en première année concernant les forces conservatives.

IV.3 Topographie du champ électrique (suite)

On peut compléter la topographie du champ électrostatique en y ajoutant la notion d'**équipotentielle**, correspondant aux courbes (en 2D) ou aux surfaces (en 3D) vérifiant $V(M) = \text{cste}$.

Revoyons quelques propriétés que l'on a déjà rencontrées lors du cours sur le gradient, étant donné la définition $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)(M)$:

- * en tout point M de l'espace, le champ électrique $\vec{E}(M)$ est orthogonal à la surface équipotentielle passant par ce point M ;
- * les lignes de champ sont donc orthogonales aux surfaces équipotentielles ;
- * le champ électrique est orienté dans le sens des potentiels décroissants.



IV.4 Exemples

a) Charge ponctuelle

On l'a vu précédemment, une charge Q ponctuelle placée en O est à l'origine d'un potentiel électrique $V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ en coordonnées sphériques. On peut le montrer à partir de l'expression du champ électrique par une méthode à maîtriser :

$$* \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV \iff \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -dV \quad (1.30)$$

donc

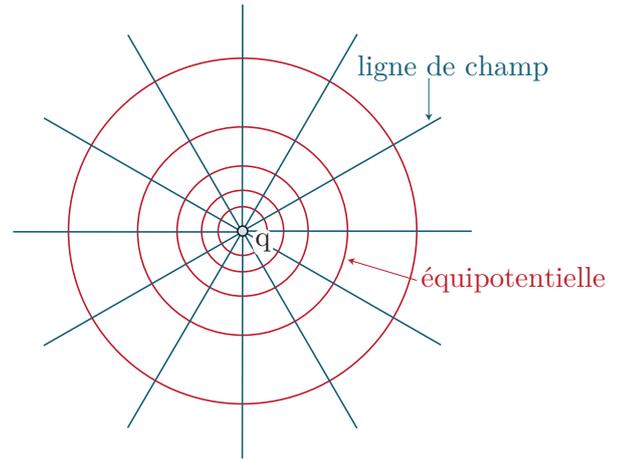
$$\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.31)$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste} \quad (1.32)$$

* et l'on considère par convention que le potentiel électrique à l'infini est nul, donc

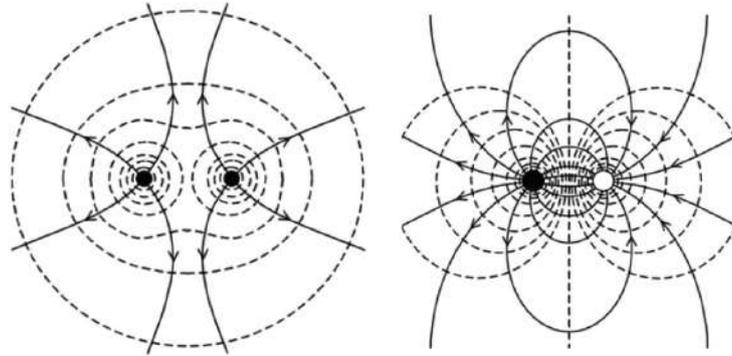
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} . \text{ Les surfaces équipotentielles}$$

sont telles que $V(M) = \text{cste}$, c'est-à-dire des surfaces pour lesquelles $r = \text{cste}$: ce sont des sphères concentriques de centre O .



Exercice

Sur l'exemple ci-dessous, commentez les symétries. Pour chaque figure, en quel(s) point(s) le potentiel électrique est-il nul ? En quel(s) points le champ électrique est-il nul ?



Pour la figure de gauche : on observe que les symétries pour la distribution de charge se retrouvent pour le potentiel électrique. On note que, sur la figure de gauche, le champ électrique est nul entre les deux charges (trois plans de symétrie qui passent en ce point) ; mais il n'en est rien du potentiel électrique ; sur la figure de droite, c'est le potentiel électrique qui est nul sur la médiatrice au segment reliant les deux charges de signe opposé : même distance, mais signe opposé pour le potentiel créé par chaque charge, et par contre le champ électrique n'est jamais nul (sauf à l'infini). On note enfin que localement, pour une charge ponctuelle, les équipotentielles sont des cercles concentriques (et des surfaciques sphériques en 3D).

b) Boule chargée en volume

Pour des distributions volumiques de charge, on peut montrer mathématiquement que **le potentiel électrique est une fonction continue et dérivable**.



Exercice

En reprenant le champ électrique déterminé pour une sphère chargée uniformément en volume, exprimer le potentiel électrique. On choisira par convention $V(+\infty) = 0$.

Commençons par $r \geq R$, où la convention de potentiel nul à l'infini permettra de déterminer la valeur de la constante d'intégration :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr \Rightarrow V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \left(= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \quad (1.33)$$

Pour $r \leq R$,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr \Rightarrow V(r) = \text{cste} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \quad (1.34)$$

En se servant de la continuité du potentiel en $r = R$:

$$\text{cste} - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \quad (1.35)$$

Dans le cas d'une distribution surfacique, le potentiel électrique est seulement continu, et pour une distribution linéique il diverge à l'approche de la distribution.

d'où finalement

$$V(r \leq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) \quad (1.36)$$

IV.5 Équation de Maxwell-Faraday et origine du potentiel électrique

Nous avons calculé précédemment la circulation du champ électrique entre deux points, et montré que cette circulation était indépendante du chemin suivi :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(A) - V(B) \quad (1.37)$$

* On dit alors que **le champ \vec{E} est à circulation conservative**.

Ainsi sur un contour (Γ) fermé orienté, en notant (S) une surface orientée s'appuyant sur le contour (Γ), en vertu du théorème de Stokes :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (1.38)$$

Ceci étant vrai quelle que soit la surface, on en déduit la seconde équation de Maxwell de l'électrostatique :

Équation de Maxwell-Faraday

Le champ électrostatique vérifie l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0} \quad (1.39)$$

*

On dit alors que **le champ \vec{E} est irrotationnel**. Cette équation n'est par contre pas valable en régime variable.

Cela permet de justifier l'existence du potentiel électrique, car le fait que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = 0$ est équivalent au fait qu'il existe un champ scalaire $V(M)$ tel que $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)(M)$.

IV.6 Équation de Poisson

Pour clore ce chapitre, notons que le potentiel électrique vérifie une équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} &\implies \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = -\Delta V(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \\ &\quad \uparrow \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \end{aligned} \quad (1.40)$$

conduisant à l'**équation de Poisson** :

*

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (1.41)$$

nécessitant des conditions aux limites pour être résolue. En particulier dans une région vide de charge, le potentiel électrique vérifie l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

V. Bilan

À travers ce chapitre, nous avons construit l'électrostatique à partir de la loi de Coulomb et obtenu à la fois des équations intégrales et des équations locales. Les deux approches sont complémentaires et seront à nouveau développées pour l'étude du champ magnétostatique.

Approche locale	Approche intégrale
Équation de Maxwell-Gauss $\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
Équation de Maxwell-Faraday en statique $\operatorname{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$	Circulation conservative $\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ et $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(A) - V(B)$
$\exists V / \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$ impliquant l'équation de Poisson $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$	

Notons que les équations locales obtenues sont des équations différentielles linéaires, ce qui démontre la validité du théorème de superposition évoqué précédemment.

Exercices

1.1 Symétries et conséquences

On considère une sphère de centre O et de rayon R . On suppose qu'elle est uniformément chargée avec une densité de charges surfaciques σ .

1. Déterminer les invariances et symétries de cette distribution de charge. Que peut-on en déduire sur le champ électrostatique en un point M quelconque ?
2. On munit l'espace d'un repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On suppose que la densité surfacique de charges vaut $-\sigma$ pour $x < 0$ et $+\sigma$ pour $x > 0$. Déterminer les invariances et symétries de cette distribution de charge. Que peut-on en déduire sur le champ électrostatique en un point quelconque ? En un point de l'axe (Ox) ? En un point du plan (Oyz) ?

1.2 Calcul d'un potentiel et d'une densité volumique de charge

Dans l'espace muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un champ électrique a pour expression :

- $\vec{E} = E_0 \frac{x}{a} \vec{e}_x$ pour $-a \leq x \leq a$;
- hors de cet intervalle, le champ est uniforme : $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$ pour $x > a$ et $\vec{E} = -E_0 \vec{e}_x$ pour $x < -a$.

1. Déterminer l'expression du potentiel $V(x)$ en tout point. On pose $V(0) = 0$.
2. On considère les points $A(-a, 0, 0)$ et $B(a, 0, 0)$. Vérifier la relation

$$V(A) - V(B) = \int_{[AB]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (1.42)$$

3. Calculer la densité volumique de charge $\rho(x)$ correspondant à ce champ électrique.

-
1. Avec la relation $dV(x) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E(x)dx$, l'intégration conduit à :

$$V(-a \leq x \leq a) = E_0 \frac{x^2}{2a} \quad (1.43)$$

comme $V(0) = 0$. Puis en intégrant sur les deux autres portions, en utilisant la continuité du potentiel en $-a$ et en a :

$$V(x \leq -a) = -E_0 \left(x + \frac{a}{2}\right) \quad \text{et} \quad V(x \geq a) = E_0 \left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (1.44)$$

2. On a trivialement :

$$V(A) - V(B) = 0 = \int_A^B E_0 \frac{x}{a} dx = E_0 \left[\frac{x^2}{2a} \right]_{-a}^a = 0 \quad (1.45)$$

3. Pour déterminer la densité volumique de charge, utilisons l'équation de Poisson :

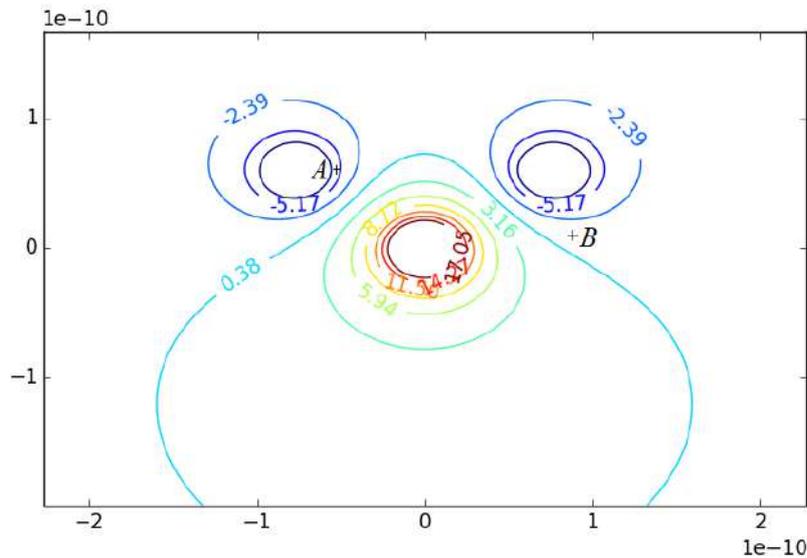
$$\rho = -\varepsilon \Delta V = -\varepsilon \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \quad \text{si} \quad x \notin [-a; a] \quad (1.46)$$

$$= -\varepsilon \frac{E_0}{a} \quad \text{si} \quad -a \leq x \leq a \quad (1.47)$$

On constate que la densité volumique de charge est discontinue en $\pm a$. Cette distribution décrit un plan uniformément chargé en volume.

1.3 Équipotentielle de la molécule d'eau

Une modélisation de la molécule d'eau donne la carte d'équipotentiels ci-dessous :



Toutes les grandeurs sont indiquées en unités SI. Les valeurs des équipotentiels sont régulièrement espacées.

1. Tracer les lignes de champ électrique.
2. Placer les atomes composant la molécule.
3. Évaluer le champ électrique aux points A et B .

-
1. On trace les courbes perpendiculaires aux équipotentiels.
 2. Les atomes d'hydrogène se trouvent au centre des sphères concentriques du haut, et celui d'oxygène en bas.
 3. On estime le champ en A en considérant les deux équipotentiels entourant A , distantes d'environ $6 \cdot 10^{-12}$ m (produit en croix avec l'échelle horizontale). Ainsi

$$E(A) \simeq \frac{5,17 - 2,39}{6e - 12} \simeq 4 \cdot 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad (1.48)$$

De même $E(B) \simeq \frac{0,38 + 2,39}{2e - 11} \simeq 1 \cdot 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. 4 Champ électrostatique créé par un fil et un cylindre coaxiaux

On considère la distribution de charge constituée par un fil infini d'axe (Oz) de densité linéique de charge uniforme λ et par un cylindre infini de rayon R et d'axe (Oz), de densité surfacique de charge σ .

Calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique en tout point de l'espace. Le champ électrostatique est-il continu ?

1. 5 Utilisation des équations locales

On propose deux expressions pour des champs : $\vec{E}_1 = K x \vec{e}_x$ et $\vec{E}_2 = K x \vec{e}_y$, avec K une constante.

1. Représenter le champ \vec{E} en différents points du plan (Oxy).
2. Calculer la divergence et le rotationnel de ces deux champs.
3. En déduire qu'un seul de ces champs peut être un champ électrostatique et déterminer la densité volumique de charge correspondante.

1. 6 Membrane cellulaire

Une membrane cellulaire (d'un être vivant) est assimilée au plan infini (Oyz) ; l'axe (Ox) est orienté vers l'extérieur de la cellule.

On schématise le potentiel par la fonction suivante : $V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } x \leq 0 \\ -V_0 \exp(-\frac{x}{a}) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$, où $V_0 > 0$ est une constante et a une distance.

1. Calculer le champ électrique \vec{E} en tout point.

2. Déterminer la densité volumique de charges ρ en tout point de 3 manières :
 - (a) grâce à l'équation de Poisson ;
 - (b) grâce à l'équation de Maxwell-Gauss ;
 - (c) en appliquant le théorème de Gauss.
3. (a) Déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation $x = 0$.
 (b) Déterminer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de base S , s'étendant indéfiniment le long de l'axe (Ox) (de $-\infty$ à $+\infty$).

1.7 Piège électrostatique

On considère une région de l'espace, vide de charges, dans laquelle règne un potentiel d'expression

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{a^2} (x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (1.49)$$

où $V_0 > 0$ et a désigne une longueur caractéristique du problème.

1. Vérifier l'équation de Poisson.
2. Tracer $V(x, 0, 0)$ en fonction de x et $V(0, 0, z)$ en fonction de z .
3. Déterminer le champ électrique à l'origine du repère.
4. Établir l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge q dans un potentiel V . Si on place une particule de charge q à l'origine, est-elle en équilibre stable ?

1. Pour une région vide de charge, on doit vérifier $\Delta V = 0$. Or :

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{V_0}{a^2} (1 + 1 - 2) = 0 \quad (1.50)$$

Elle est donc vérifiée.

2. Youhou, deux paraboles.
3. On utilise $\vec{E} = -\text{grad} V$, ce qui conduit à

$$\vec{E} = -\frac{2V_0}{a^2} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - 2z\vec{e}_z) \quad (1.51)$$

Donc à l'origine du repère, $\vec{E} = \vec{0}$.

4. Cf cours, $E_p = qV$. Donc si on place une particule de charge q à l'origine, elle n'est pas en équilibre stable. En effet :
 - si $q > 0$, tout déplacement à $z = 0$ selon \vec{e}_x ou \vec{e}_y revient à étudier un mouvement dans une cuvette de potentiel, mais on a un maximal local de potentiel selon z ;
 - si $q < 0$, on a équilibre stable pour $x = y = 0$ si on n'autorise que des mouvements selon z , mais instable (max local de potentiel pour $V(x, 0, 0)$ et $V(0, y, 0)$).

Donc globalement ce potentiel ne permet pas la stabilité de positionnement d'une particule chargée.

1.8 Singularité

1. Rappeler l'expression du champ \vec{E} créé par une charge ponctuelle q située en O en un point M distant de $r = OM$ et calculer sa divergence (cf. formulaire d'analyse vectorielle).
2. Calculer le flux de \vec{E} à travers une sphère de rayon R centré sur O de deux manières :
 - (a) en utilisant le théorème de Gauss ;
 - (b) en utilisant la formule d'Ostrogradski.

D'où vient le problème ?

1. $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques. Sa divergence vaut 0.
2. (a) En utilisant le théorème de Gauss, le flux de \vec{E} vaut $\frac{q}{\epsilon_0}$.

- (b) En utilisant la formule d'Ostrogradski, $\Phi = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} d\tau = 0$?? Le problème vient du fait que le champ \vec{E} n'est pas défini en O , où il diverge. La formule de Green-Ostrogradski n'est valable qu'en l'absence de singularité!

1. 9 Modèle d'orbitale atomique

L'atome d'hydrogène est composé d'un proton formant le noyau et d'un électron. D'après la théorie quantique, on peut considérer que le proton est un point fixe O et que l'électron est réparti partout dans l'espace, ce qui correspond pour l'état fondamental de l'électron à une densité volumique de charge $\rho_e = K \exp(-2r/a_0)$ en coordonnées sphériques, où $a_0 = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m est le rayon de Bohr.

On donne la primitive : $\int u^2 \exp(-u) du = -(u^2 + 2u + 2) \exp(-u)$.

- Déterminer la valeur de K permettant d'assurer la neutralité de l'atome.
- Déterminer l'expression du champ $\vec{E}(M)$ en un point M quelconque.
- Comment décroît le champ électrique avec la distance au noyau ? Commenter.

1. Il faut que la charge déterminée en intégrant dans tout l'espace soit $-e$:

$$-e = \iiint_{(V)} \rho_e d\tau = 4\pi K \int_0^{+\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr = 4\pi K \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \frac{8\pi K a_0^3}{8} \iff K = -\frac{e}{\pi a_0^3} \quad (1.52)$$

2. Pour déterminer le champ électrique, on se sert du théorème de Gauss. En effet, la masse volumique dépendant uniquement de r , invariance de la distribution par rotation d'angle θ et φ . Tout plan passant par M et par O est également plan de symétrie, donc on peut chercher $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$. En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon r quelconque :

$$\iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi \int_0^r r'^2 \rho_e(r') dr' \quad (1.53)$$

soit en faisant le changement de variable $u = \frac{r}{a_0/2}$:

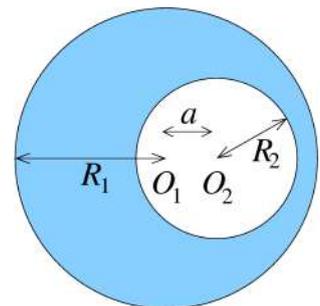
$$E(r) = \frac{1}{r^2} \times \frac{K}{\epsilon_0} \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \int_0^{2r/a_0} u^2 e^{-u} du = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 r^2} [(u^2 + 2u + 2)e^{-u}]_0^{2r/a_0} \quad (1.54)$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\left(\frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1\right) e^{-2r/a_0} - 1 \right) \quad (1.55)$$

3. Pour les grandes valeurs de r , l'équivalent est $-\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, correspondant au champ créé par un électron placé au niveau du noyau.

1. 10 Variation du champ gravitationnel à la surface d'une planète

On considère une planète sphérique de rayon $R_1 = 1000$ km constituée principalement d'un matériau de masse volumique $\rho_1 = 8000$ kg·m⁻³. À l'intérieur de cette sphère se trouve une boule de rayon R_2 , dont le centre est décalé d'une distance a par rapport à celui de la grande sphère, constituée d'un autre matériau de masse volumique $\rho_2 = 1000$ kg·m⁻³.



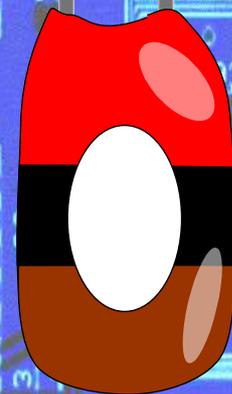
- Déterminer le champ gravitationnel à l'intérieur de la sphère de centre O_2 dans le cas où cette dernière est constituée de vide.

On mesure le champ gravitationnel en tout point à la surface de la planète et on constate que celui-ci est maximum en un point A où il vaut $2,1129$ m·s⁻² et qu'il est minimal en un point B où il vaut $2,2216$ m·s⁻².

- Placer A et B sur un schéma et déterminer la position a et la taille R_2 de la boule interne.

Composant :

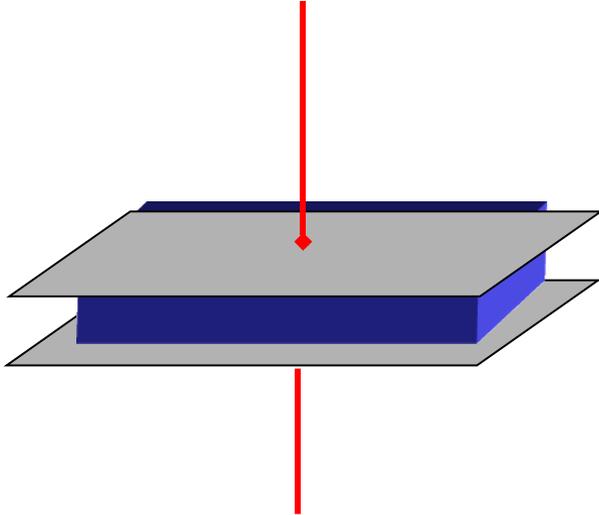
Le condensateur



Sommaire

- **Présentation**
Symbole / Capacité / Propriété
- **Paramètres technologiques d'un condensateur**
- **Condensateur à diélectrique plastique métallisé**
Constitution / Aspects / Utilisation
- **Condensateur à diélectrique céramique**
Constitution / Domaine d'application
- **Marquage des valeurs**
- **Condensateur électrolytique aluminium**
Constitution / Tension de service / Utilisation
- **Condensateur électrolytique tantale**
Constitution / Tension de service / Utilisation / Marquage
- **Choix d'un condensateur**

Présentation



Une couche de diélectrique...

prise en sandwich entre
deux armatures...

reliées au circuit par deux broches...

On obtient alors un **CONDENSATEUR** !

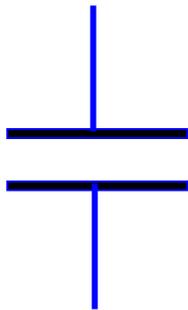
Présentation / Symbole

Un condensateur se caractérise par sa **capacité** qui s'exprime en **Farad** (F).

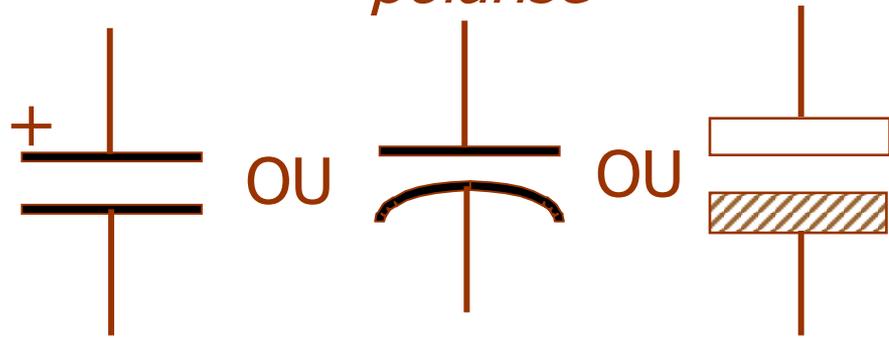
Rappel : $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ / $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$ / $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$

Son **symbole**, sur les schémas structurels, est :

*Condensateur
non polarisé*



*Condensateur
polarisé*



L'aspect extérieur d'un condensateur dépend de sa technologie et des applications auxquelles il est destiné.

Propriété / Capacité

La capacité d'un condensateur dépend de la surface des armatures, de l'épaisseur et de la nature du diélectrique.

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{e}$$

ϵ_0 : Permittivité du vide ($8,82 \cdot 10^{-12}$ F/m)

ϵ_r : Permittivité relative du matériau

S : Surface des armatures (m^2)

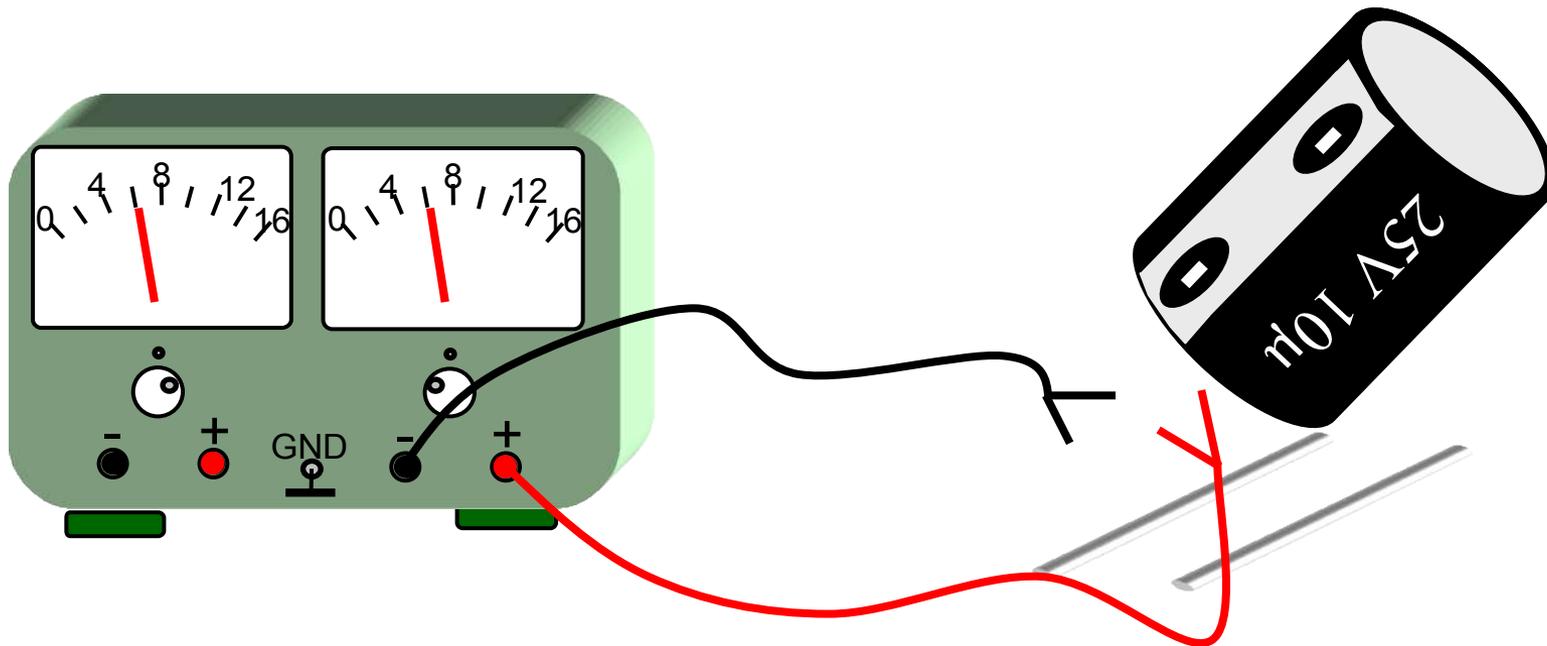
e : Épaisseur du diélectrique (m)

	ϵ_r	E_d (MV/m)
Air	1	3
Mica	6 à 9	100
Plastique	2 à 3	200 à 300
Céramique	5 à 15000	1 à 3
Alumine	4,5 à 8,5	60



Présentation / Propriété

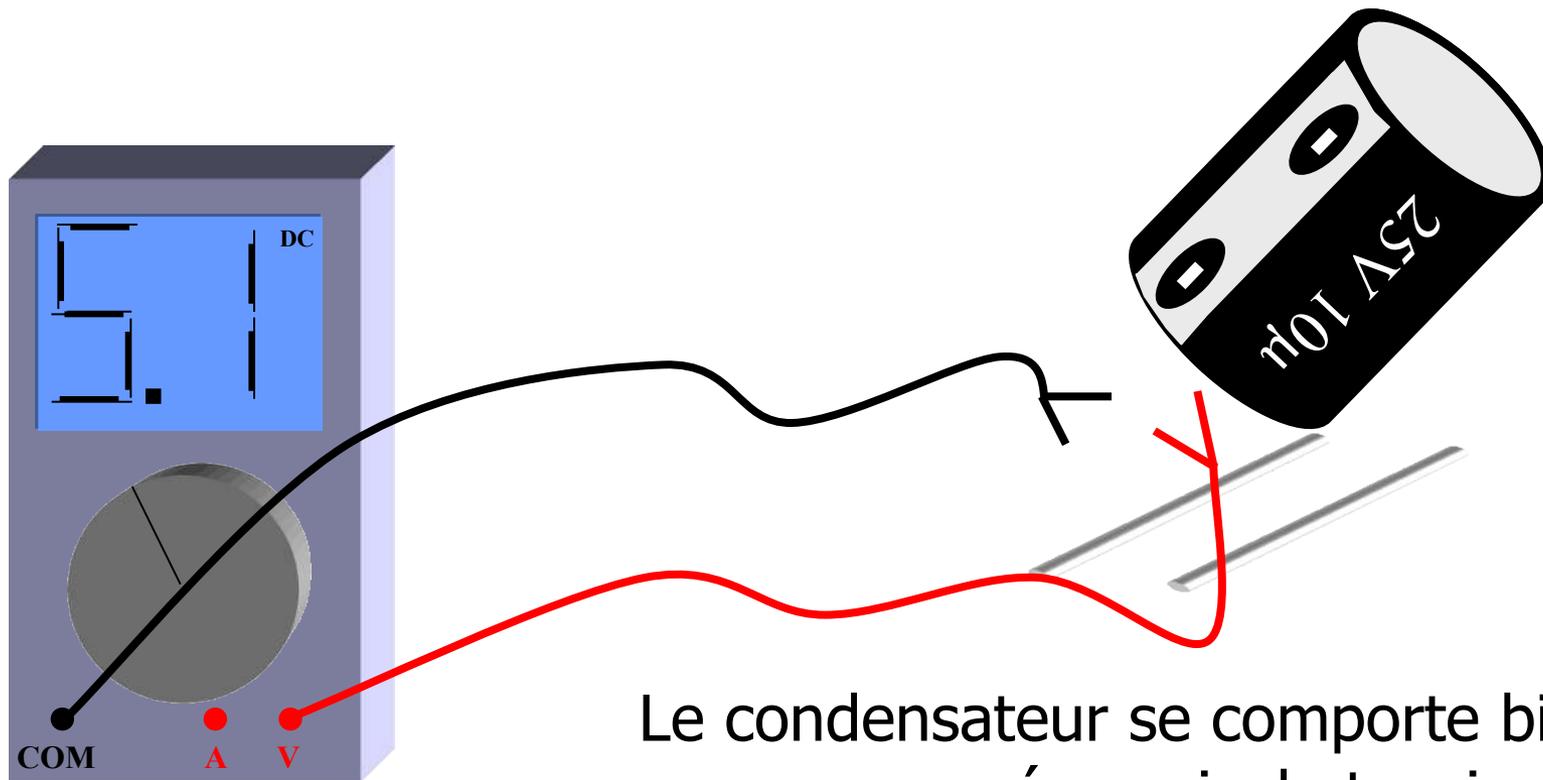
Un condensateur est un " réservoir " d'énergie :



Si on connecte un condensateur à une alimentation, celui-ci se charge.

Présentation / Propriété

Si on retire l'alimentation et que l'on mesure la tension aux bornes du condensateur, on obtient :



Le condensateur se comporte bien
comme un réservoir de tension.
On dit que le condensateur s'est chargé.

Paramètres technologiques d'un condensateur

Le choix d'un condensateur se définit essentiellement par :

□ **sa capacité nominale**

C'est la valeur pour laquelle il a été fabriqué.

@ **sa tension de service**

C'est la tension à ne pas dépasser aux bornes du composant sous peine de le détruire.

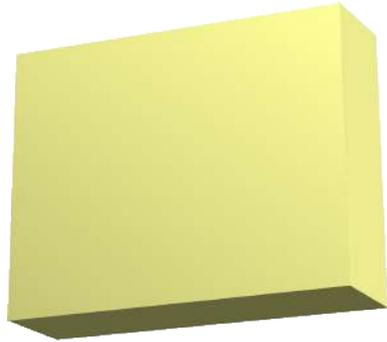
Cette tension dépend de la nature et de l'épaisseur du diélectrique. ($U = Ed.e$)

@ **le type du diélectrique utilisé**

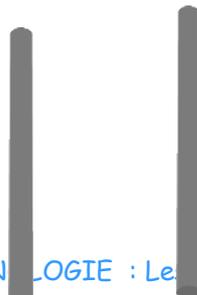
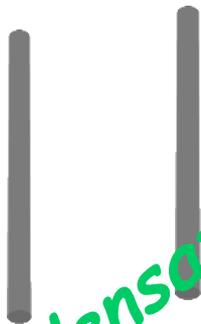
La nature du diélectrique fixe le domaine d'application du composant.



Technologie des condensateurs



Condensateurs à diélectrique plastique métallisé



Condensateurs à diélectrique plastique métallisé

Constitution

Feuille
impaire

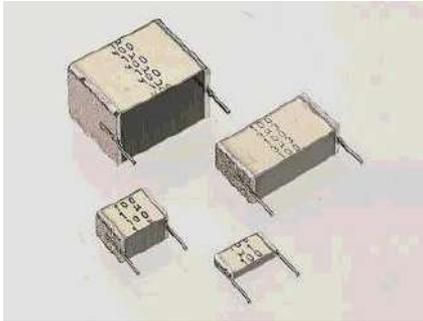
Feuille
paire

Zone
métallisée

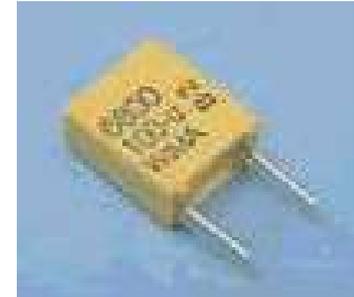
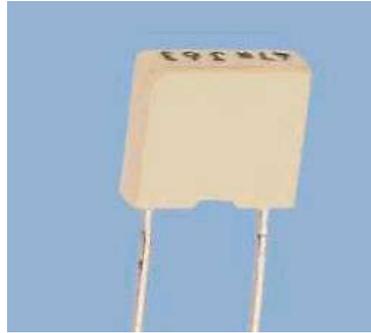
Liaison par dépôt
métallique des
feuilles impaires et
connexion des
broches

Liaison par dépôt
métallique des
feuilles paires et
connexion des
broches

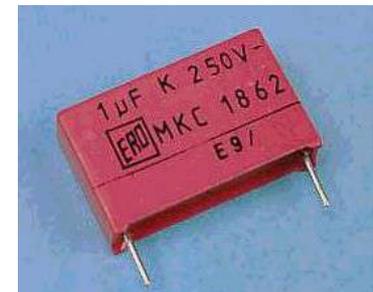
Condensateurs à diélectrique plastique métallisé



Condensateurs à diélectrique polyester (MKT MKS)



Condensateurs à diélectrique polycarbonate (MKC)



Condensateurs à diélectrique plastique métallisé

Utilisation

C'est l'un des condensateurs **d'usage courant** de l'électronique.

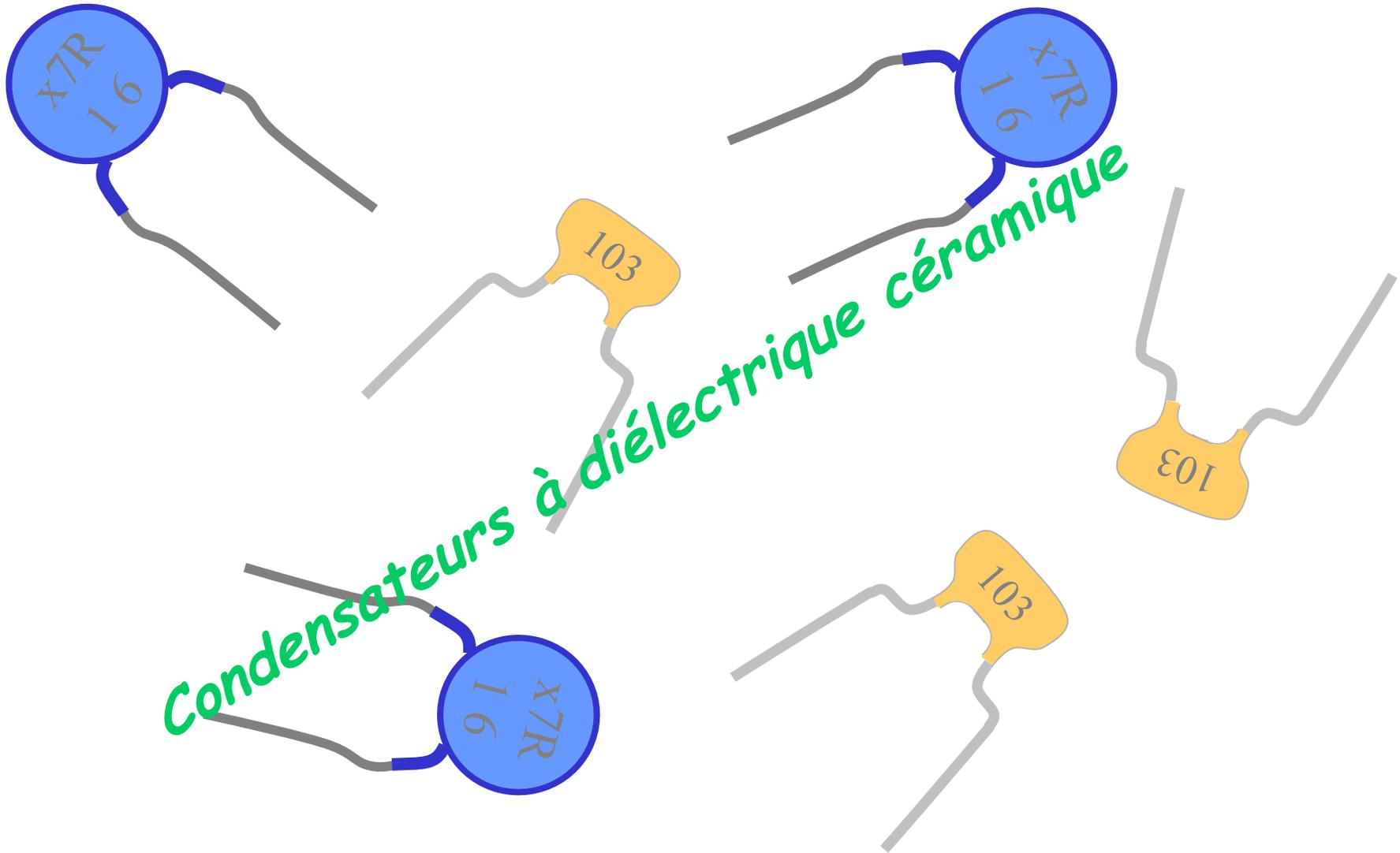
Il se comporte aussi bien en **haute fréquence qu'en basse fréquence.**

Il est plus **stable en température** que les condensateurs céramiques les plus courants.

On les choisira donc là où une certaine **précision** est demandée

Gamme de valeurs : 1nF à 10 μ F

Technologie des condensateurs



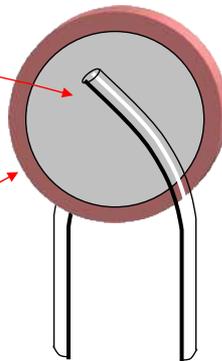
Condensateurs à diélectrique céramique

Constitution

On sait concevoir des céramiques dont la **permittivité relative est très élevée** ; c'est cette propriété qui est exploitée pour produire des condensateurs pour l'électronique. **Une pastille de céramique** peut être recouverte de **deux électrodes** pour former un condensateur.

Métallisation
(électrode)

Céramique
(diélectrique)

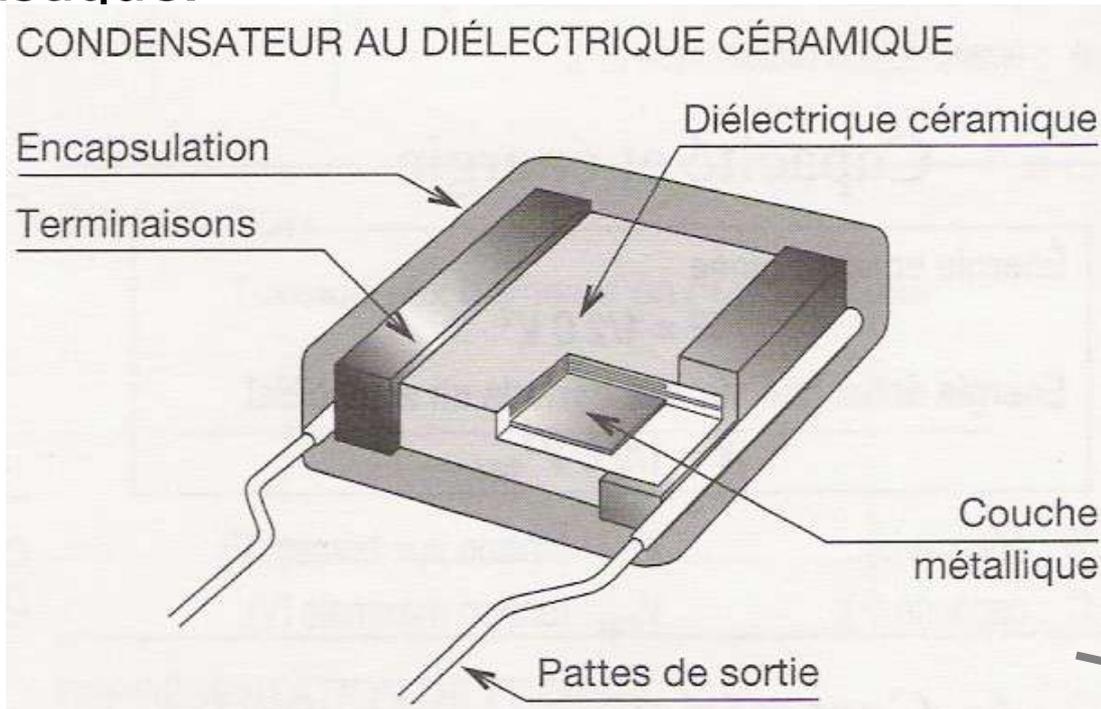


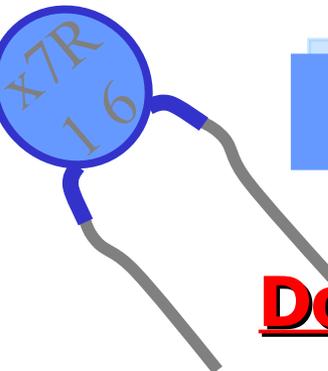
Condensateur disque
avant enrobage isolant



Condensateurs à diélectrique céramique

On sait également produire des condensateurs constitués de **l'empilage de feuillets** élémentaires à la manière de ce qui a été fait pour les condensateurs à film plastique.





Condensateurs à diélectrique céramique

Domaine d'application

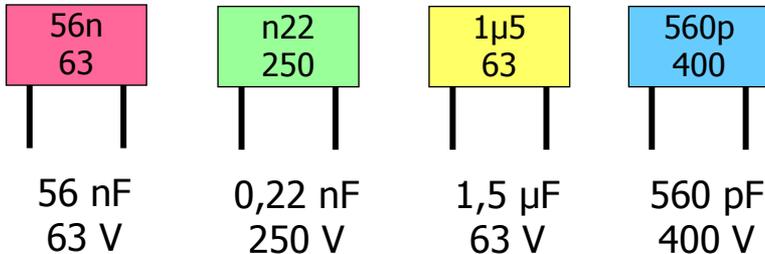
Ce type de condensateur trouve sa place :

- Dans les applications où **une forte valeur n'est pas requise.**
- Si le composant est amené à **fonctionner en très haute fréquence.**
- Pour **un couplage** entre étage (suppression de la composante continue).
- Condensateur **de découplage** (des lignes d'alimentations par exemple).

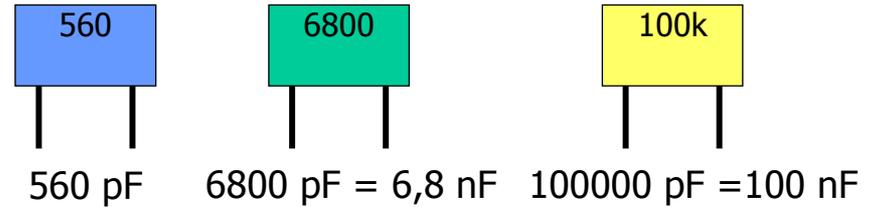
Gamme de valeurs : 1 pF à 100 nF

Marquage des valeurs

Soit inscrite en clair avec unité.



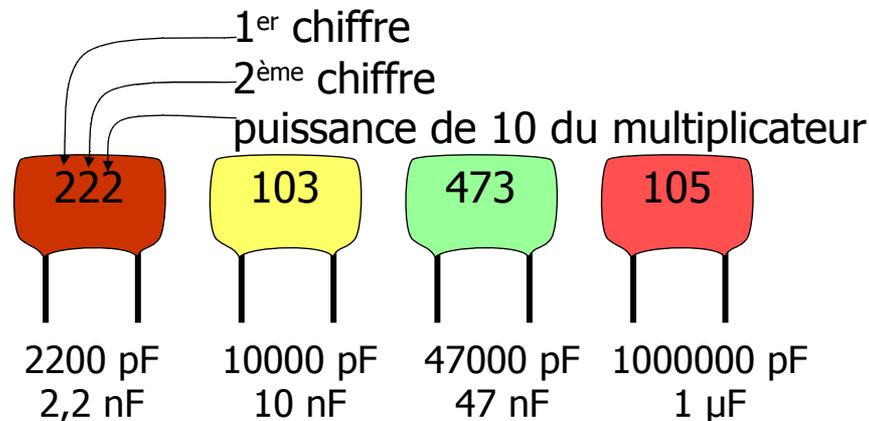
Soit inscrite en clair sans unité, il s'agit de pF ($10^{-12}F$) :



La tolérance est codée à l'aide d'une lettre placée à la suite.

Code	D	F	G
Tolérance	$\pm 0,5 \%$	$\pm 1\%$	$\pm 2 \%$
Code	J	K	M
Tolérance	$\pm 5 \%$	$\pm 10 \%$	$\pm 20 \%$

La tension de service est inscrite en clair sur le composant sans unités.

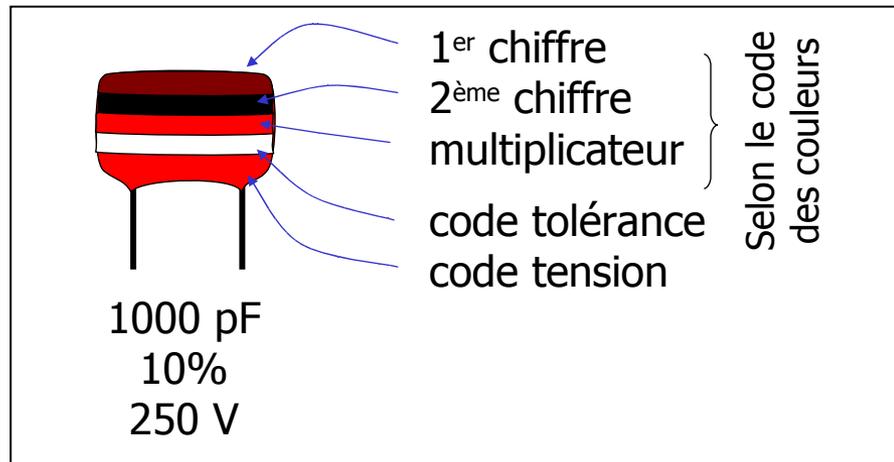


Soit en code numérique, l'unité par défaut est le picofarad (pF)



Marquage des valeurs

Soit, selon le code des couleurs,
l'unité étant le picofarad



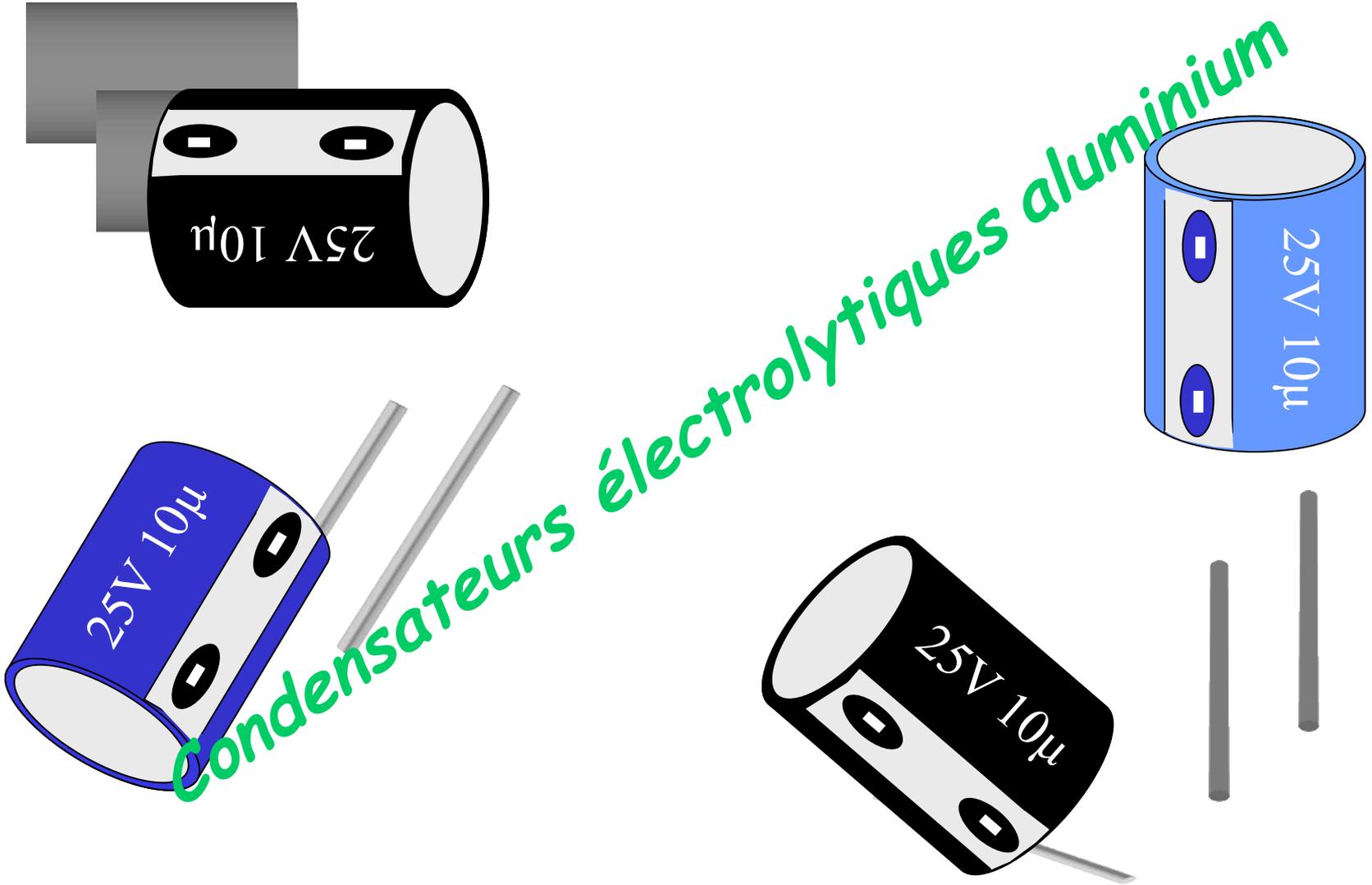
Tension de service (V)

Tolérance (%)

	100	250		400					
20					5				10



Technologie des condensateurs



Condensateurs électrolytiques aluminium

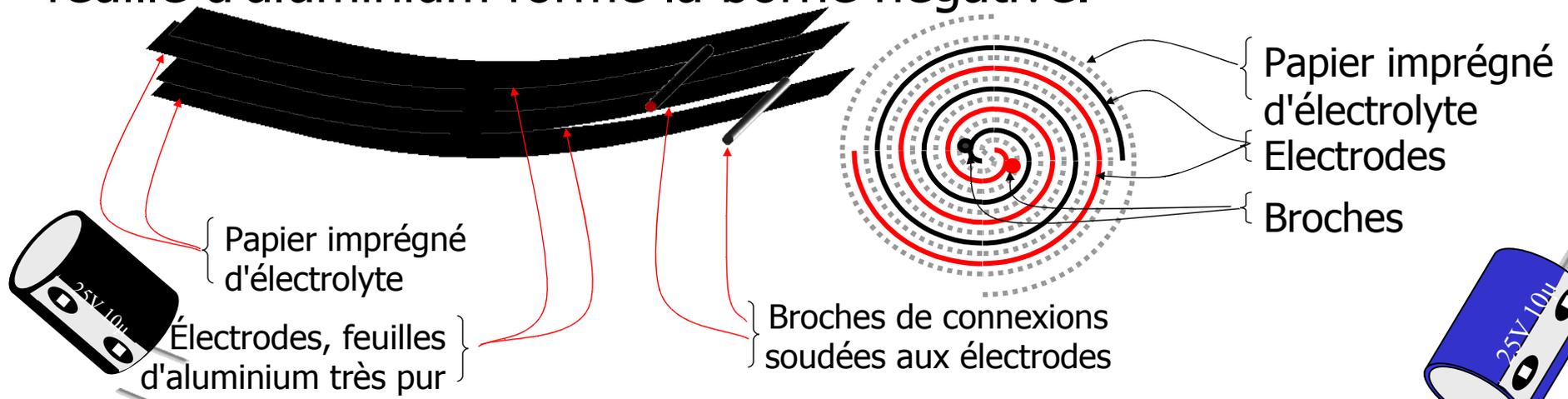
Constitution

Ce type de condensateur est **polarisé**.

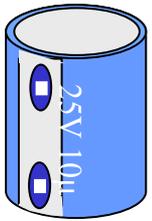
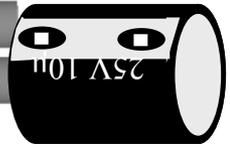
La borne positive est constituée par une bande d'aluminium gravée (pour augmenter la surface) recouverte d'une couche d'alumine.

L'alumine forme le diélectrique.

Une feuille de papier poreux imprégné d'un électrolyte et une feuille d'aluminium forme la borne négative.



Condensateurs électrolytiques aluminium



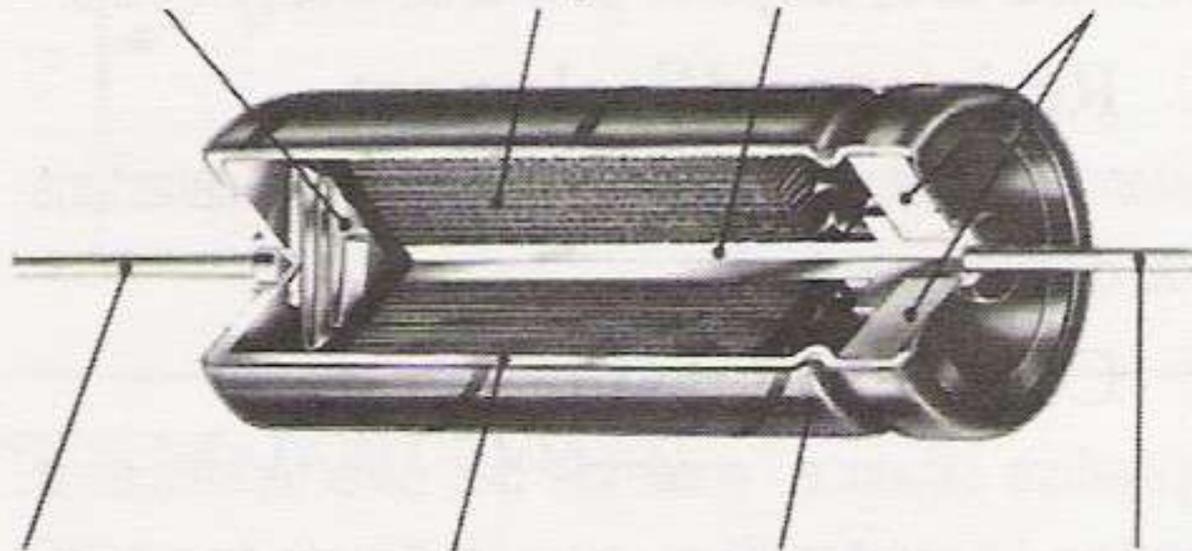
CONDENSATEUR ÉLECTROLYTIQUE À L'ALUMINIUM

Jonction
cathode-boîtier

Bobinage

Tige
d'anode

Disque céramique
d'isolement



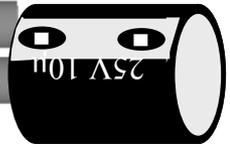
Connexion
de cathode

Boîtier

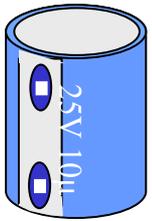
Gaine
isolante

Connexion
d'anode



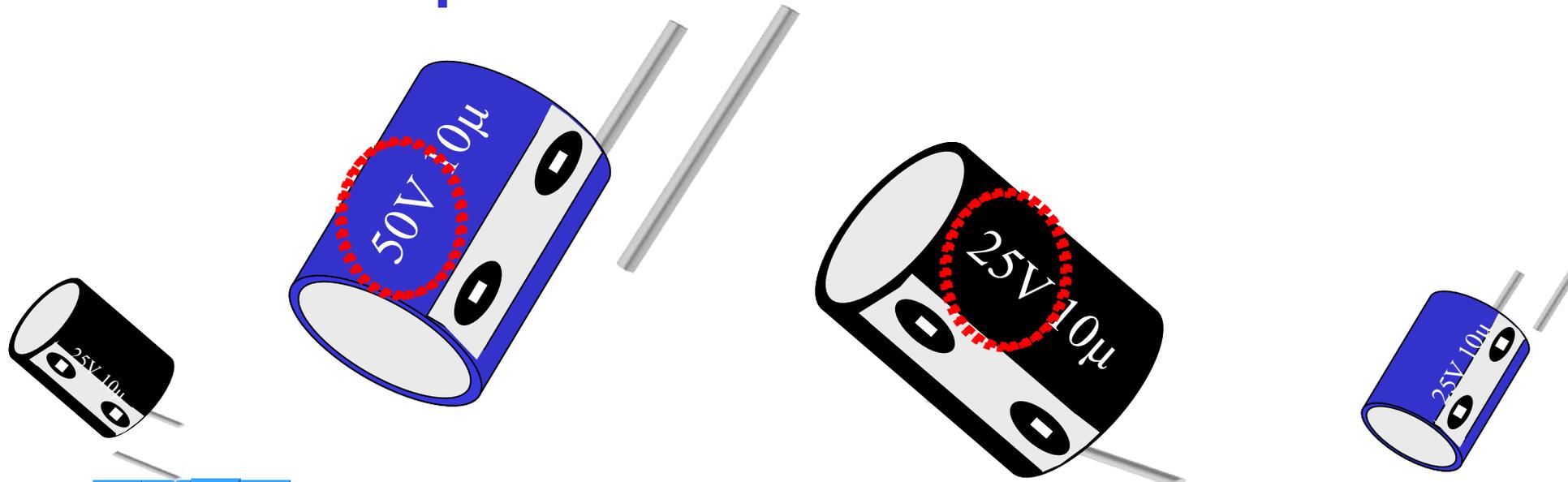


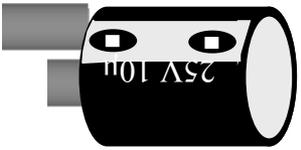
Condensateurs électrolytiques aluminium



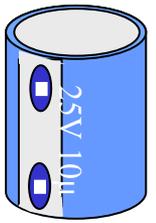
Tension de service

Comme pour les condensateurs à diélectrique plastique métallisé, **dépasser la tension de claquage détruit le diélectrique** et rend le condensateur défectueux.





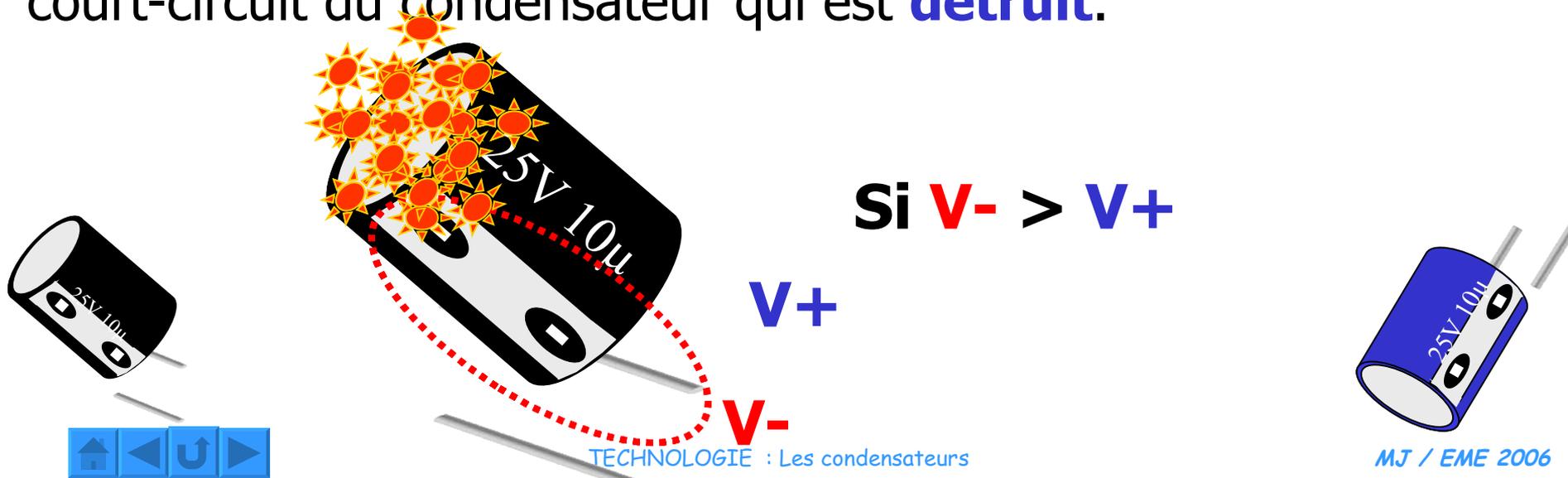
Condensateurs électrolytiques aluminium

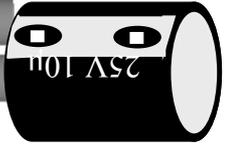


Tension inverse

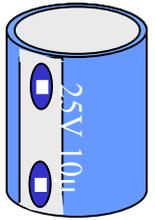
Le dépôt d'alumine n'est présent que sur l'une des électrodes. La polarisation normale est celle qui a servi à former le condensateur.

Alimenter le condensateur **en sens inverse** renverse la réaction ; La destruction d'alumine provoque une mise en court-circuit du condensateur qui est **détruit**.





Condensateurs électrolytiques aluminium

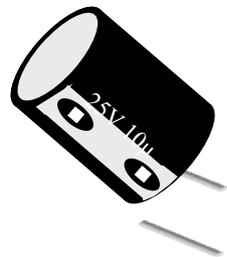


Utilisation

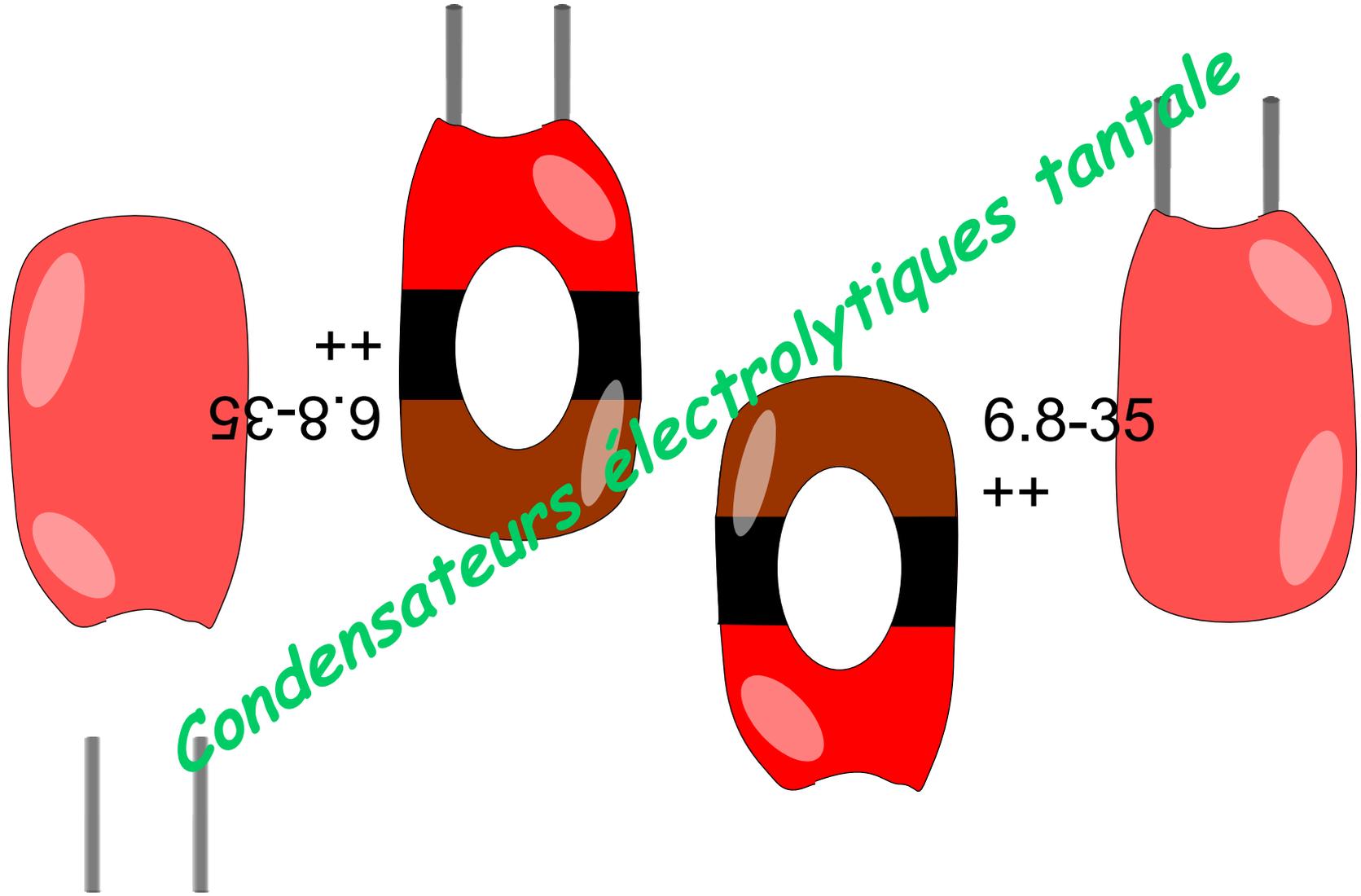
On utilise les condensateurs électrolytiques aluminium partout où de **fortes valeurs de capacités** sont nécessaires :

- Fonction **lissage des alimentations**
- Stockage d'énergie pour **la sauvegarde de données en mémoires RAM**
- **Temporisations** de longue durée
- Circuit RC à **grande constante de temps**
- **Filtres** basses fréquences et très basses fréquences

Gamme de valeurs : 1 μ F à 10 mF



Technologie des condensateurs



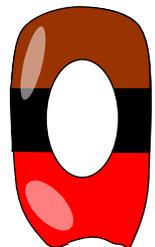
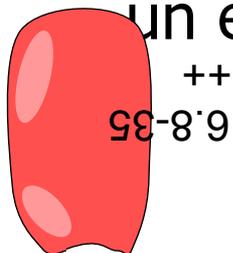
Condensateurs électrolytiques tantale

Constitution

Ce sont des condensateurs de nature **électrochimique**.
Ces condensateurs ont une forte capacité pour un faible encombrement.

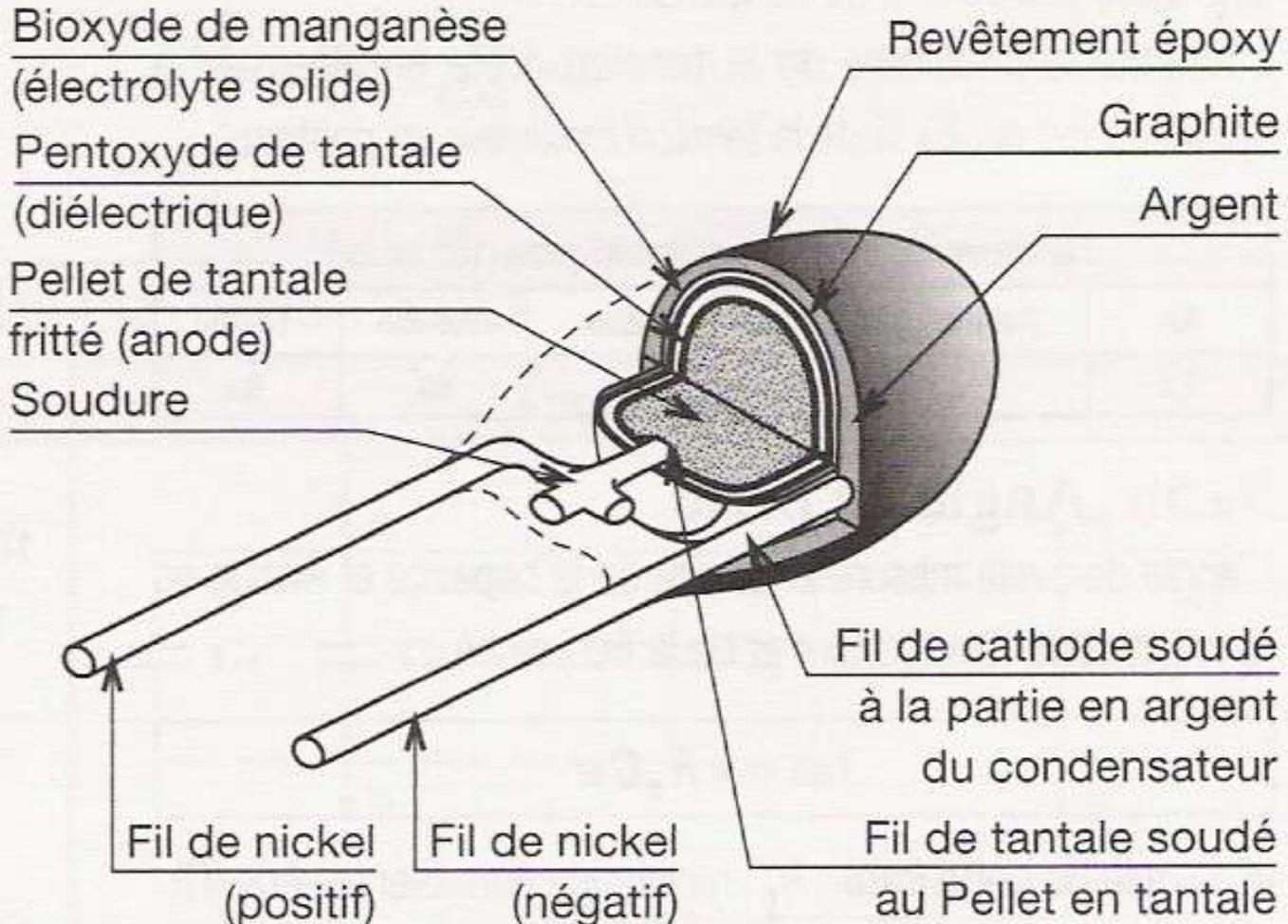
La borne positive est constituée d'une pastille de tantale fritté qui permet d'obtenir une très grande surface active.

La borne négative est formée par un boîtier en argent qui n'est pas attaqué par le bioxyde de manganèse qui forme un électrolyte solide.



Condensateurs électrolytiques tantale

CONDENSATEUR ÉLECTROLYTIQUE AU TANTALE



98-8'9 ++



Condensateurs électrolytiques tantale

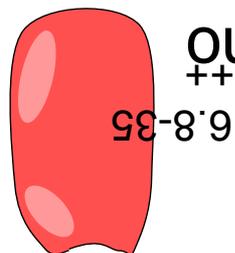
Tension de service / Tension inverse

Ce qui a été dit sur les condensateurs électrochimiques à technologie aluminium, s'applique ici avec les mêmes conséquences quant au dépassement de la tension de service et à la polarisation en tension inverse....

Utilisation

Les condensateurs électrolytiques tantales remplacent les condensateurs électrolytiques aluminium lorsque l'on souhaite **un meilleur comportement en fréquence** ou un **encombrement moindre**.

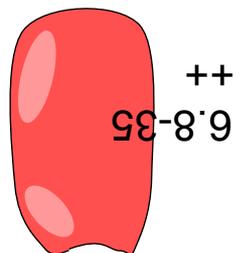
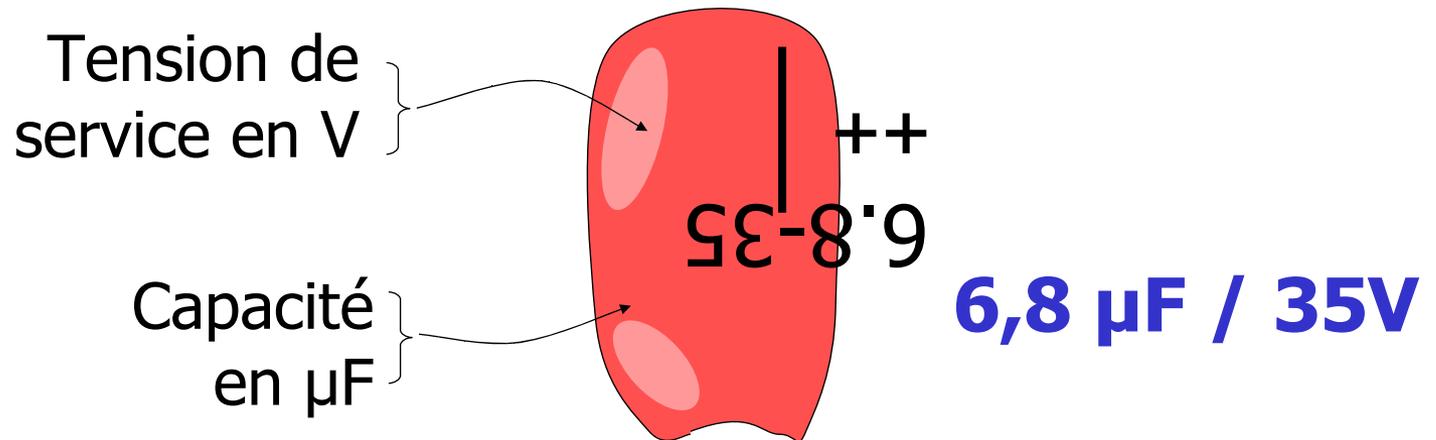
Gamme de valeurs : 0,1 μF à 47 μF



Condensateurs électrolytiques tantale

Marquage des tantales goutte

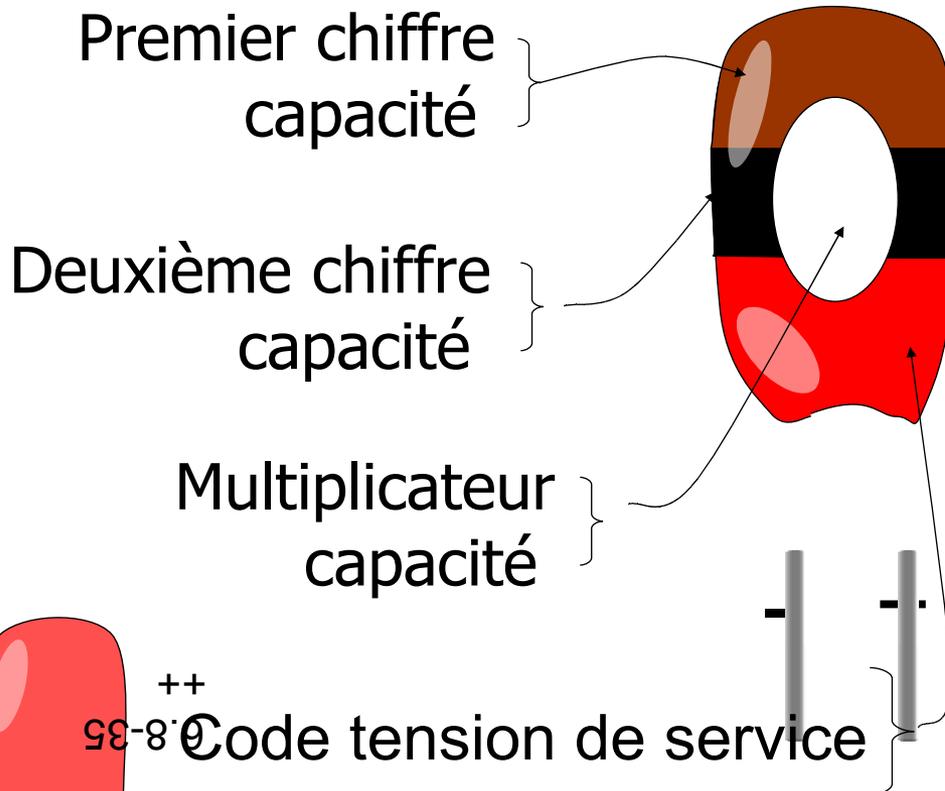
PAR INSCRIPTION



Condensateurs électrolytiques tantale

Marquage des tantales goutte

PAR CODE DE COULEUR



Tension de service
Multiplicateur

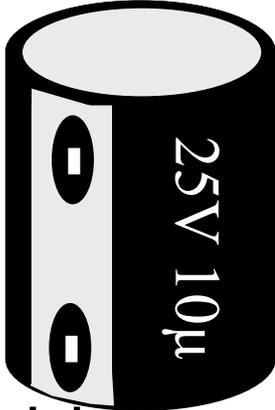
1 μ F / 4V

1	10
10	1,6
100	4
	40
	6,3
	16
	20
10^{-3}	35
10^{-2}	25
10^{-1}	3



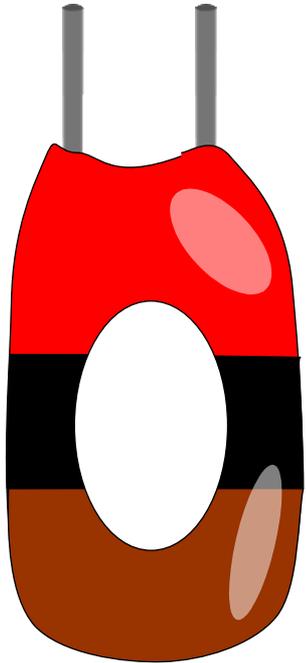
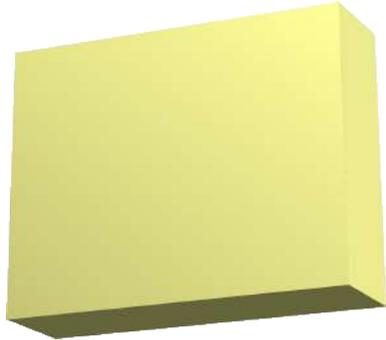
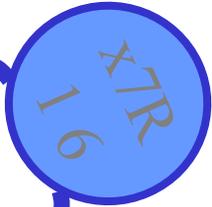
Technologie des condensateurs

Choix ?

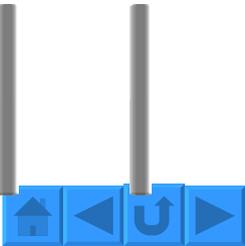


6.8-35

++

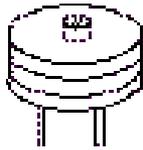


103

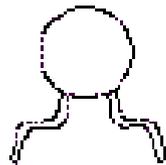


Technologie des condensateurs

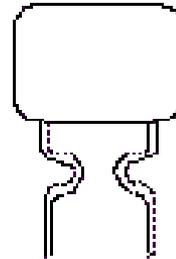
Types de condensateurs



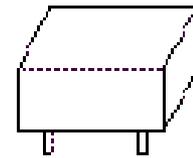
Ajustable
1 à 100 pF



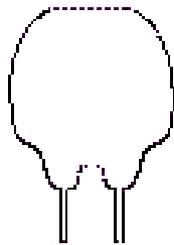
Céramique disque
1 pF à 1 nF



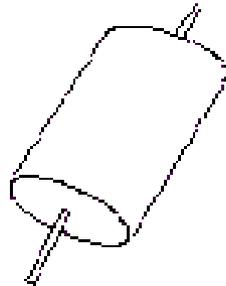
Céramique enrobée
1 nF à 1 μ F



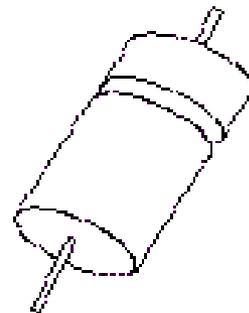
Plastique
Mica
Verre
1 nF à 1 μ F



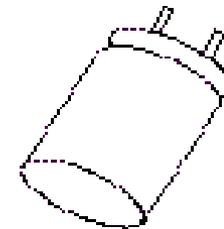
tantale goutte
100 nF à 100 μ F



Papier
1 μ F à 100 μ F



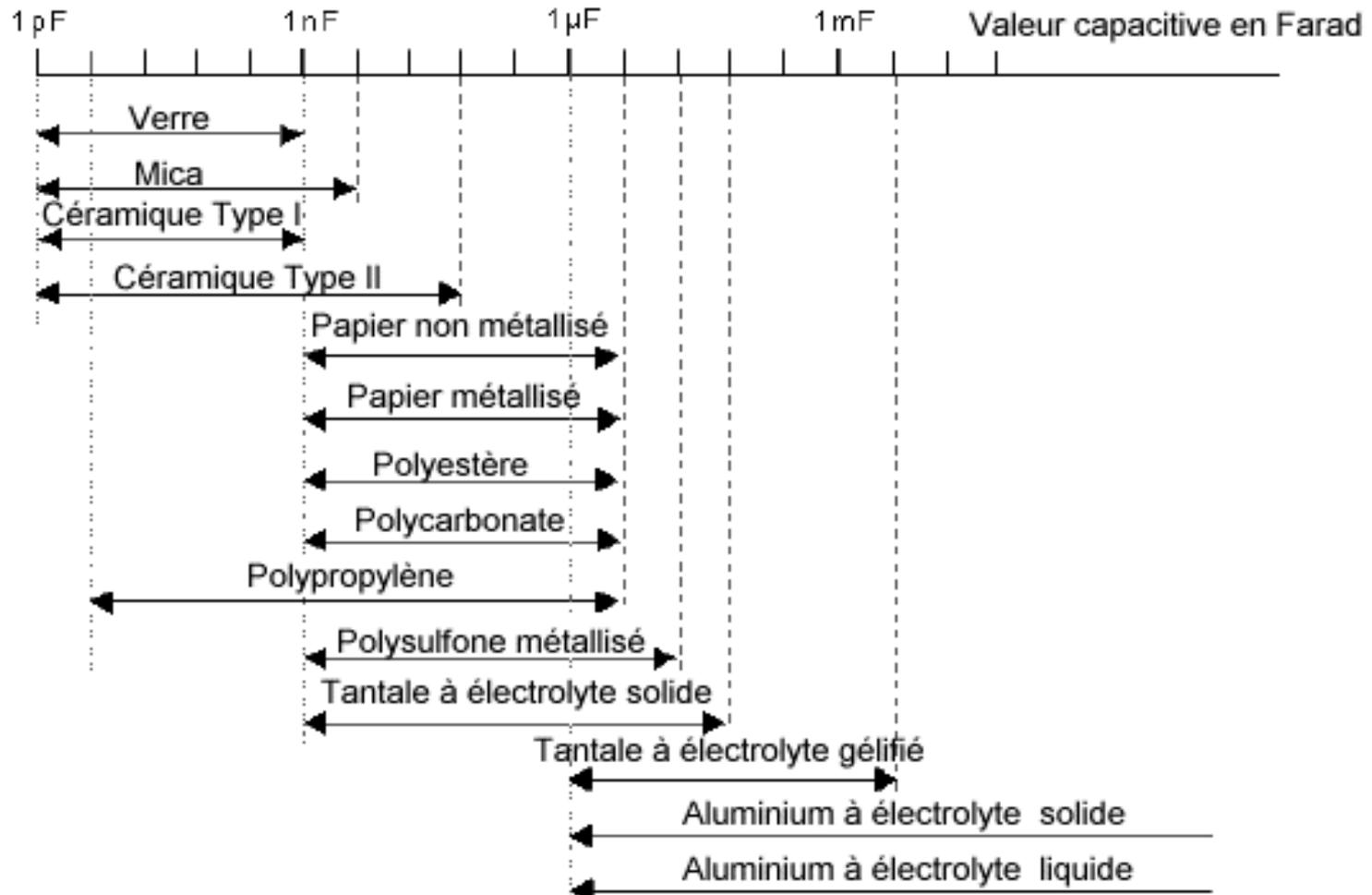
Electrolytique
Aluminium (axial)
1 μ F à 4700 μ F



Electrolytique
Aluminium (radial)
1 μ F à 4700 μ F

Technologie des condensateurs

Plage des valeurs de capacités

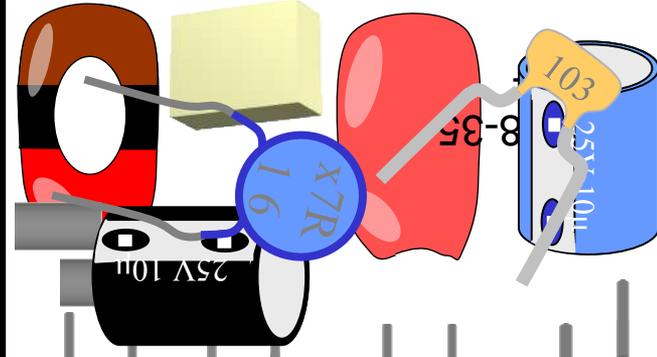


	Utilisation	Famille de condensateur	Caractéristique
Haute Fréquence > 100 khz	Radar, télé...	Mica (1pF à 200nF) Verre (1pF à 10nF)	Précis, bonne tenue en température, remplacé de plus en plus par les micas.
	Circuit d'accord	Céramique type 1 (1pF à 2nF)	Précis et stable.
	Circuit de liaison de découplage	Céramique type 2 (100pF à 470nF)	Imprécis et instable.
Basse et Moyenne Fréquence	Pour des tensions élevées	Papier non métallisé (1nF à 100µF)	Utilisable jusqu'à 10000 Volts.
	Circuit de liaison de découplage	Papier métallisé (10nF à 200µF) Polyester (1nF à 250µF)	Remplacé de plus en plus par les films plastiques, utilisé aussi pour des circuits d'antiparasitages.
	Circuit d'accord oscillateur, intégrateur	Polycarbonate (1nF à 250µF)	Très stable, très fiable, condensateur de précision.
	Régime impulsionnel alimentation à découpage	Polypropylène (100pF à 250µF)	Résistance série faible, supporte des courants efficaces élevés.
	Pour un fonctionnement à des températures élevées	Polysulfone métallisé (1nF à 250µF)	Fonctionne à des températures élevées, grande stabilité.
Inférieur à 10 khz	Filtrage, découplage	Aluminium à électrolyte liquide (1µF à 15000µF)	Courant de fuite de quelques micro-ampère, tension de service jusqu'à 550 volts.
	Filtrage, découplage	Tantale à électrolyte gélifié (1µF à 1000µF)	Faible volume par rapport à l'aluminium, tension de sortie limitée à 150 volts.
	Stockage d'énergie prolongé	Tantale à électrolyte solide (1µF à 20000µF)	Très stable en température, courant de fuite inférieur au micro-ampère.
	Circuit RC, oscillateur	Tantale à électrolyte solide (10nF à 500µF)	Tension de service limitée à 125 volts, faible volume, stable.



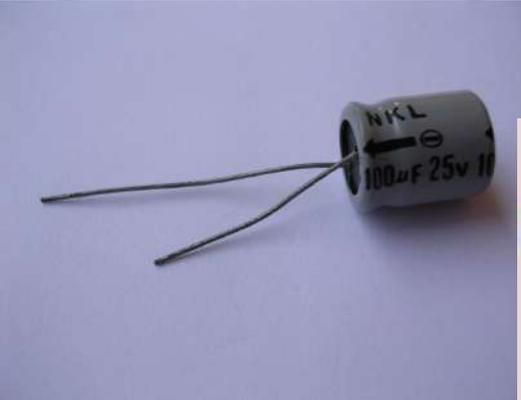
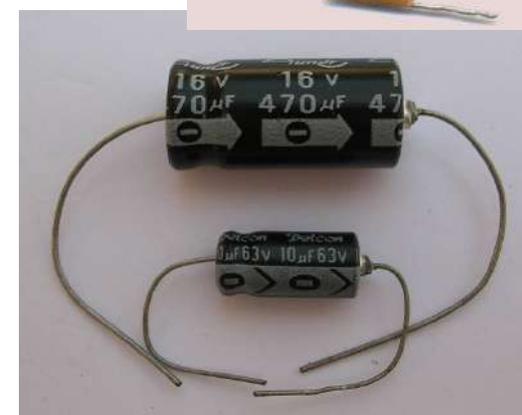
Technologie des condensateurs

Choix ?

Polyester	Polycarbonate	Polypropylène	Mica	Céramique I	Céramique II	Electro. Alu.	Electro. tantale	
						<input type="checkbox"/>		Alimentation continue
						<input type="checkbox"/>		Alim. à découpage
		<input type="checkbox"/>						Protection des transistors
		<input type="checkbox"/>						Transistor en commutation
						<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Liaison basse fréquence
						<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Découplage
<input type="checkbox"/>						<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Filtre basse fréquence
					<input type="checkbox"/>			Découplage liaison HF
			<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				Puissance HF



FIN



Les condensateur:

Condensateurs

Sommaire

2.1 Conducteurs en influence	2
2.1.1 Influence électrique	2
2.1.2 Propriétés électriques d'un conducteur à l'équilibre	2
2.1.3 Blindage électrostatique	3
2.2 Condensateurs	3
2.2.1 Constitution d'un condensateur	4
2.2.2 Condensateur plan idéal	4
2.2.3 Énergie électrostatique	5
2.2.4 Réalisation pratique et effets de bords	5
2.2.5 Applications	5

Questions de cours :

- Présenter le phénomène d'influence électrostatique, ainsi que les caractéristiques électrostatiques fondamentales d'un conducteur en équilibre.
- Démontrer l'expression du champ électrique dans un condensateur plan (de manière complète!). En déduire l'expression de la capacité.

Capacités exigibles du BO :

- Décrire qualitativement le phénomène d'influence.
- Exprimer le champ d'un condensateur plan en négligeant les effets de bord. En déduire l'expression de la capacité.
- Prendre en compte la permittivité du milieu dans l'expression de la capacité.
- Citer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique.
- Retrouver l'expression de la densité volumique d'énergie électrique dans le cas du condensateur plan à partir de la relation $\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2$

La problématique du stockage d'énergie, encore actuelle aujourd'hui, s'est posée suite au développement de machines capables par frottement ou influence d'emmagasiner des charges électriques et d'obtenir de forts potentiels. Une difficulté soulevée par Volta est que la charge que l'on peut stocker est directement proportionnelle à la taille de l'objet qui la stocke. L'idée de ce chapitre est de comprendre quelques phénomènes d'électrostatique utilisant des métaux, expliquer la conception et les difficultés rencontrées lors de la réalisation de condensateurs électriques, à même de stocker une grande quantité d'énergie pour la restituer ensuite, sans trop de pertes.

I. Conducteurs en influence

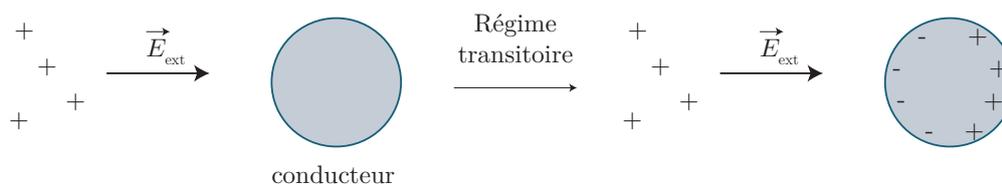
I.1 Influence électrique



Manipulation

Baguette isolante en verre ou plastique frottée avec un chiffon : elle est capable de soulever de petits morceaux de papier aluminium. Expliquer !

- * Une distribution de charge crée un champ électrostatique. À l'approche d'un conducteur, on observe durant un régime transitoire un déplacement de charges électriques, jusqu'à atteindre un régime permanent où le conducteur est globalement électriquement neutre, mais où les charges se sont déplacées en surface. C'est le phénomène d'**influence**. Une force électrostatique d'attraction se crée au niveau de l'aluminium qui, si le poids est suffisamment faible, se soulève.



Manipulation

Vidéo influence électrostatique avec électroscope. Demander aux élèves d'expliquer. Cf. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/electrometre.html> et http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/michel_maussion/elecstat/index.html.

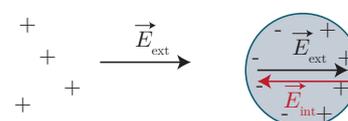
L'électroscope est un appareil permettant de visualiser la présence plus ou moins importante de charges électriques sur un objet : il est constitué d'un ensemble conducteur isolé du sol contenant un plateau connecté à deux lames (soit les deux sont mobiles, soit une seule est montée sur un pivot).

- * L'observation précédente montre qu'à l'approche d'un conducteur chargé, par influence le plateau se charge, transmet une partie de ses charges aux lames qui s'écartent par répulsion électrostatique. Une fois chargé par un contact direct avec le plateau, on décharge en connectant le plateau à la terre.
- * Pour la deuxième partie de l'expérience, le fait de toucher le plateau (c'est-à-dire en le connectant à la Terre) tout en approchant la tige chargée négativement permet de charger positivement par influence le plateau, mais cette fois il y a la circulation de charges négatives vers la Terre (répulsion entre les charges négatives de la tige et de l'électroscope). Ainsi, une fois que l'on retire le doigt et que l'on éloigne la tige chargée, la charge positive reste : on a chargé par influence (et les lames s'écartent à nouveau quand on enlève le doigt).

I.2 Propriétés électriques d'un conducteur à l'équilibre

Un conducteur est à l'équilibre électrostatique lorsqu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble des porteurs de charge : $\vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire que $\vec{j} = \vec{0}$.

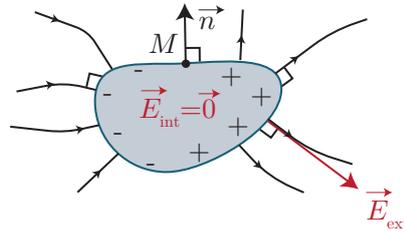
- * Cela implique nécessairement que le champ électrique \vec{E} à l'intérieur d'un conducteur est nul (par exemple pour un conducteur ohmique, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$). Dans l'exemple précédent, la répartition de charges est telle que le champ total intérieur est nul : $\vec{E} = \vec{0} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{int}}$, ce qui est cohérent avec la présence de charges négatives à gauche.



On peut même aller plus loin : le fait que le champ électrique soit nul implique :

- *
 - $V(M) = \text{cste}$ dans tout le conducteur, car $\vec{E} = \vec{0} = -\text{grad } V$;
 - la densité volumique de charge est nulle : $\rho(M) = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} = 0$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss.

Par contre, cela n'interdit pas d'avoir des charges **à la surface du conducteur**. La densité surfacique de charge $\sigma(M)$ est souvent non nulle. On peut même montrer à l'aide du théorème de Gauss qu'à proximité immédiate du conducteur, le champ électrique extérieur vérifie :



$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (2.1)$$

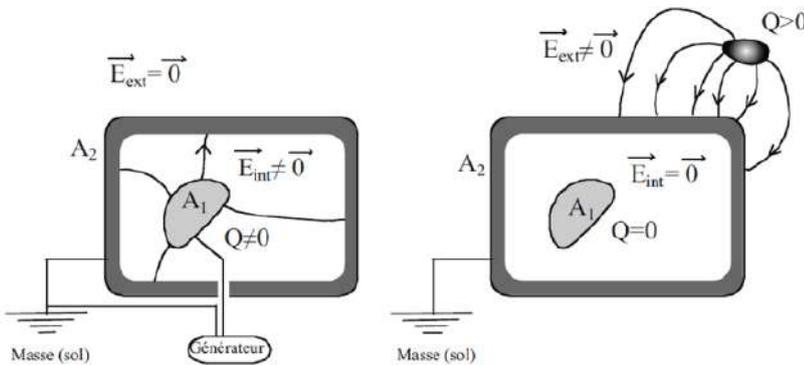
avec \vec{n} le vecteur normal au conducteur, dirigé vers l'extérieur.

I.3 Blindage électrostatique

Manipulation

Simulation falstad avec "Shielding 1" pour illustrer le concept.

Un conducteur à l'équilibre est tel que le champ électrique à l'intérieur est nul. S'il possède en plus une cavité, celle-ci se trouve automatiquement isolée, d'un point de vue électrostatique, de l'extérieur : on parle d'écran ou blindage électrostatique, ou encore **cage de Faraday**.



C'est ce qui explique pourquoi on est (à peu près) protégé à l'intérieur d'une voiture lors d'un orage, même si l'éclair tombe sur la voiture ! Ce concept est souvent utilisé pour protéger des appareils électriques (boîtier d'ordinateur, grille du micro-ondes devant la porte, etc.).

II. Condensateurs

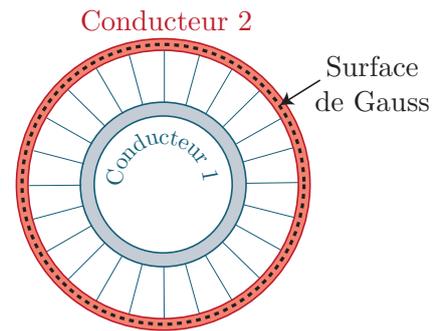
Manipulation

Intro : phénomène de condensation. On charge l'électroscope puis on approche un second plateau : diminution de l'angle de l'électroscope.

- *
 - Le fait de rapprocher le second conducteur permet de le charger par influence, ce qui agit en retour sur le plateau qui peut se charger davantage (ce qui décharge les tiges de l'électroscope).
 - On augmente donc la « condensation » des charges sur la surfaces de conducteurs : on parle alors de condensateur, et chaque conducteur est appelé armature.

II.1 Constitution d'un condensateur

Un condensateur est constitué de deux conducteurs séparés par un isolant électrique. Un condensateur idéal est tel que les deux conducteurs sont en **influence totale**, c'est-à-dire que toutes les lignes de champ issues de l'un vont jusqu'à l'autre. En pratique, c'est difficilement possible, du fait des **effets de bords**, sauf si un conducteur est entièrement compris dans une cavité d'un autre conducteur clos.



On peut calculer la charge portée par chaque armature en appliquant le théorème de Gauss à une surface qui englobe le premier conducteur et une partie du deuxième. Comme le champ électrique est nul dans le conducteur :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \implies Q_1 = -Q_2 \quad (2.2)$$

en notant Q_i la charge totale portée par le conducteur i .

On définit enfin la capacité du condensateur C , mesurée en farad (symbole F) le coefficient de proportionnalité entre la différence de potentiel et la charge portée. Avec V_1 et V_2 les potentiels sur chaque armature :

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \quad (2.3)$$

II.2 Condensateur plan idéal

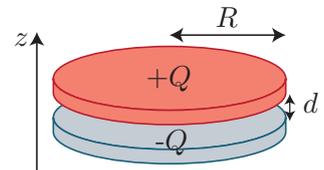


Manipulation

Condensateur d'Aepinus : influence de l'épaisseur et de l'isolant

i) Description

On modélise souvent un condensateur plan comme deux disques parallèles de rayon R distants de $d \ll R$, séparés par du vide et portant une charge $\pm Q$. Du fait de l'écart très faible entre les deux plans, le champ électrostatique résultant est quasiment le même que celui créé par deux plans infinis (sauf près des bords).

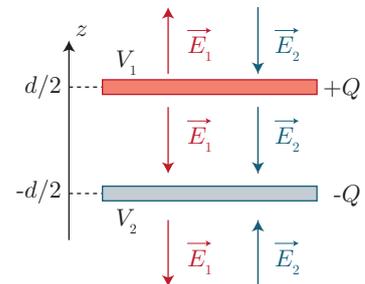


ii) Calcul du champ

Pour déterminer le champ électrique autour du plan, on utilise le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé, de densité surfacique σ $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ et le théorème de superposition.

Le champ créé dans tout l'espace est alors la superposition des deux champs :

- pour $z > d/2$, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{+\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \right) = \vec{0}$;
- de même, pour $z < -d/2$, $\vec{E} = \vec{0}$;
- enfin pour $-d/2 < z < d/2$, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \right) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$



On peut retrouver le champ électrostatique à l'intérieur du condensateur, après avoir étudié les invariances et symétries, en appliquant le théorème de Gauss à la surface cylindrique à cheval sur l'armature du haut et l'intérieur du condensateur.

iii) Capacité

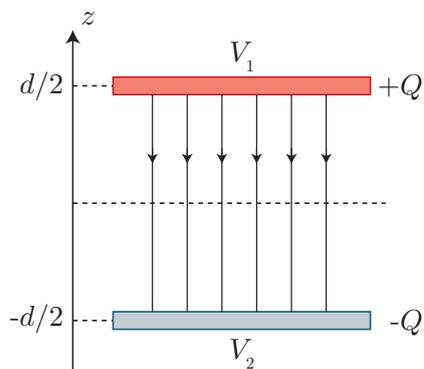
Connaissant le champ électrique dans le condensateur, on peut en déduire la relation entre la différence de potentiel et l'épaisseur e :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dV = \int_{-e/2}^{e/2} -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.4)$$

$$= - \int_{-e/2}^{e/2} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

On exprime enfin la capacité :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma e}{\epsilon_0}} = \boxed{\frac{\epsilon_0 S}{e}} \quad (2.6)$$



iv) Rôle de l'isolant

Si entre les plaques on ajoute un isolant de permittivité $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, alors la capacité augmente :

$$C = \frac{\epsilon S}{e} \quad (2.7)$$

C'est ce que l'on a illustré expérimentalement en ajoutant la plaque de plexiglass. On arrive à produire des céramiques où $\epsilon_r \sim 10^4$, ce qui augmente considérablement la capacité du condensateur. C'est particulièrement utile car on pourrait simplement jouer sur l'épaisseur, sauf qu'à tension égale, le champ électrique à l'intérieur du condensateur va augmenter jusqu'à atteindre la tension de claquage.

II.3 Énergie électrostatique

L'énergie emmagasinée dans un condensateur à l'instant t est $\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} C u_c(t)^2$. On le démontre, rappelons-le, à partir de la puissance reçue en convention récepteur : $\mathcal{P} = u_c i = C u_c \frac{du_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right)$

donc l'énergie reçue entre 0 et t est $\mathcal{E} = \int_0^t \mathcal{P} dt = \frac{1}{2} C u_c^2(t) - \frac{1}{2} C u_c^2(0)$.

On peut aller plus loin, en exprimant la densité volumique d'énergie électrique :

$$u_e = \frac{\delta \mathcal{E}_c}{d\tau} = \frac{\mathcal{E}_c}{S e} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} (E e)^2}{S e} = \boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} \quad (2.8)$$

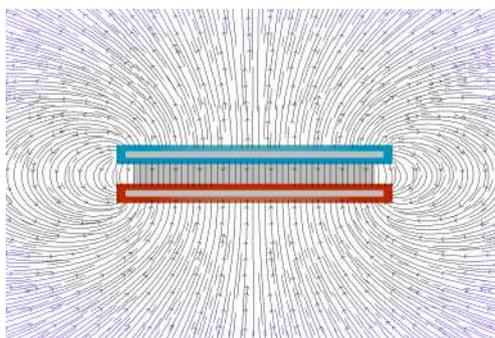
dont on admet la validité de l'expression quelle que soit la source de champ électrique.

II.4 Réalisation pratique et effets de bords

Manipulation

Diapo sur les différents types de condensateur (cours STI).

Concernant les effets de bord, ils sont d'autant plus visibles que l'épaisseur n'est pas trop petite devant les dimensions transverses des armatures. On constate alors que la capacité C est plus grande que celle déduite de la théorie. On observe en effet sur la figure ci-dessous que les lignes de champ se resserrent au voisinage des bords (ce que l'on appelle l'effet de pointe, cf. TD). Alors, pour une différence de potentiels imposée, l'effet de bord implique qu'une charge plus élevée (en valeur absolue) se trouve sur chaque armature, en comparaison du condensateur idéal.



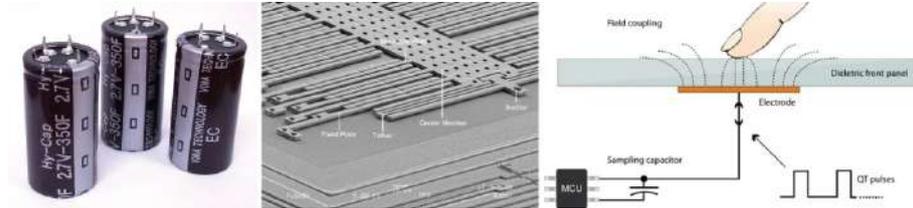
II.5 Applications

Citons quelques applications des condensateurs, en dehors de l'électronique pure :

- **stockage d'énergie** (on développe actuellement des supercondensateurs de capacité > 1000 F, alimentés sous une tension inférieure à 10V) : ils stockent globalement moins d'énergie qu'une

pile ou une batterie, mais l'accès à l'énergie (en charge ou en décharge) est plus rapide, avec une résistance interne très faible autorisant de forts courants. On les trouve dans les voitures électriques (système de récupération d'énergie au freinage) ou encore les éoliennes (contrôle d'orientation des pales des éoliennes), etc.

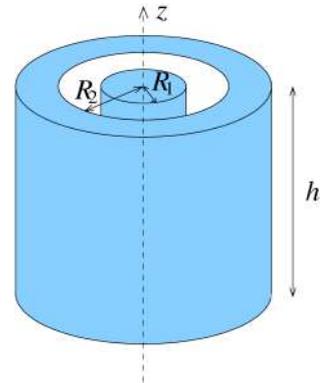
- **capteur** de position (mesure de niveau d'un liquide), d'accélération (les MEMS reposent sur l'influence de la capacité de condensateurs déformables), de toucher (technologie de certains écrans tactiles), etc.



Exercices

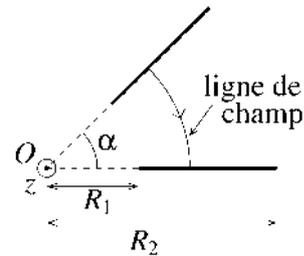
2.1 Condensateur cylindrique

Déterminer la capacité d'un condensateur dont les armatures sont deux cylindres concentriques de hauteur h et de rayons respectifs $R_1 \ll h$ et $R_2 \ll h$ portant les charges respectives Q et $-Q$. Analyser le cas où $R_2 - R_1 = e$ devient très faible devant R_1 .



2.2 Condensateur diélectrique

Le condensateur diédrique est formé par deux armatures rectangulaires planes de longueur h (selon \vec{e}_z) et de largeur $R_2 - R_1$, qui font entre elles un angle α . On néglige les effets de bord : le champ ne dépend donc pas de z et les lignes de champ sont des arcs de cercles d'axe (Oz). On a donc $\vec{E}(M) = E(r, \theta) \vec{e}_\theta$.



L'armature supérieure est portée à un potentiel U par rapport à l'armature inférieure et porte une charge totale Q . On pourra utiliser le formulaire d'analyse vectorielle.

- (a) Quelle est la forme des équipotentielles dans le condensateur ?
(b) De quelle coordonnée dépend ainsi le potentiel V dans l'espace inter-armatures ?
- (a) Déterminer à une constante près le potentiel V dans l'espace inter-armatures en fonction de θ , α et U .
(b) En déduire le champ \vec{E} dans l'espace inter-armatures.
- (a) Déterminer la densité surfacique de charges σ en un point de l'armature supérieure. On pourra utiliser la relation de discontinuité du champ électrique au passage de la surface chargée :

$$\vec{E}(M^-) - \vec{E}(M^+) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (2.9)$$

avec \vec{n} le vecteur normal au plan dans la direction - vers +.

- En déduire la charge Q portée par cette armature.
 - Exprimer la capacité C de ce condensateur.
4. Retrouver la valeur de la capacité avec des grandeurs énergétiques.

- (a) Les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ, ce sont donc des demi-droites passant par le point O .
(b) V dépend a priori de r et θ , mais comme $V = \text{cste}$ pour une valeur de θ fixée, V ne dépend donc que de θ .
- (a) Le potentiel vérifie l'équation de Poisson $\Delta V = 0$, avec $V(\theta) : \frac{1}{r^2} \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0$. Donc $V(\theta) = A\theta + B$. En posant $V(0) = 0$ par convention (on se fixe la « constante près ») et $V(\alpha) = U = A\alpha$:

$$V(\theta) = \frac{U\theta}{\alpha} \quad (2.10)$$

(b) Avec $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$, il vient donc

$$\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{U}{\alpha r} \vec{e}_\theta \quad (2.11)$$

3. (a) On veut appliquer le théorème de Coulomb au niveau de l'armature supérieure. Il est donc nécessaire de connaître l'expression du champ électrique pour $\theta > \alpha$. On peut déjà exprimer le potentiel électrique, qui est toujours affine, pour $\theta \in [\alpha, 2\pi]$, sachant que $V(2\pi) = 0$ et $V(\alpha) = U$:

$$V(\theta) = C\theta + D \implies U = C\alpha + D \quad 0 = C2\pi + D \quad (2.12)$$

conduisant à :

$$V(\theta) = \frac{U}{\alpha - 2\pi}(\theta - 2\pi) \quad (2.13)$$

On en déduit le champ électrique dans cette zone :

$$\vec{E} = \frac{U}{(2\pi - \alpha)r} \vec{e}_\theta \quad (2.14)$$

soit en utilisant le lien entre la discontinuité de champ électrique au passage de la surface chargée :

$$\vec{E}(\alpha^+) - \vec{E}(\alpha^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_\theta \iff \frac{U}{r} \left(\frac{1}{2\pi - \alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \epsilon_0 = \sigma \quad (2.15)$$

conduisant à

$$\sigma = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{r\alpha(2\pi - \alpha)} \quad (2.16)$$

- (b) On calcule la charge par intégration selon \vec{e}_r et \vec{e}_z :

$$Q = \iint \sigma dS = \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi\epsilon_0 U}{r\alpha(2\pi - \alpha)} dr dz = \frac{2\pi\epsilon_0 U h}{\alpha(2\pi - \alpha)} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (2.17)$$

- (c) Avec $Q = C \cdot U$, $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\alpha(2\pi - \alpha)} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

4. On sait que la densité volumique d'énergie est $u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, donc :

$$u_e = \frac{\epsilon_0 U^2}{2r^2 \alpha^2} \text{ pour } \theta \in [0, \alpha[\text{ et } u_e = \frac{\epsilon_0 U^2}{2r^2 (2\pi - \alpha)^2} \text{ pour } \theta \in]\alpha; 2\pi] \quad (2.18)$$

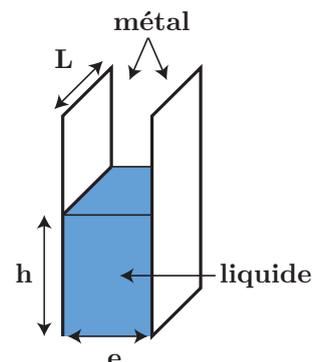
On intègre la densité volumique d'énergie dans tout le volume délimité par le condensateur :

$$U_e = \iiint u_e r dr d\theta dz = h \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} u_e r dr d\theta = \frac{\epsilon_0 U^2 h}{2\alpha} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\epsilon_0 U^2 h}{2(2\pi - \alpha)} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (2.19)$$

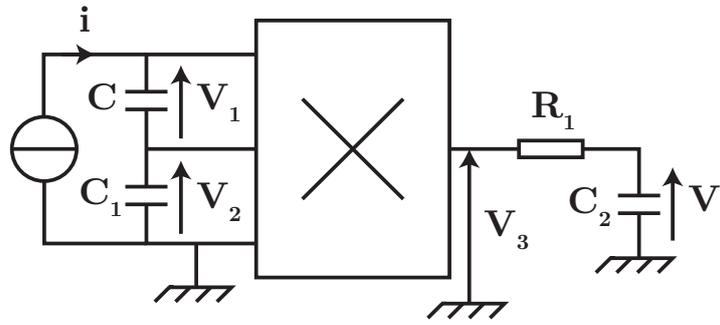
On retrouve après simplification $U_e = \frac{1}{2} C U^2$ avec l'expression de C déterminée à la question précédente.

2. 3 Capteur de niveau capacitif

La mesure du niveau d'un liquide contenu dans une cuve opaque peut être réalisée à l'aide de capteurs capacitifs. On envisage le cas d'un liquide isolant électriquement : on peut alors d'un point de vue électrique remplacer l'air par le liquide si on substitue à ϵ_0 en $\epsilon_0 \epsilon_r$ où ϵ_r est une constante appelée permittivité relative. On se place en géométrie plane, on considère un condensateur plan de largeur L , de surface S et d'épaisseur e , plongé dans un liquide de hauteur h .



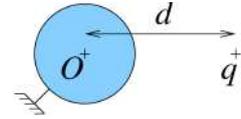
- Démontrer la relation liant la capacité C_0 d'un condensateur, S et e dans le cas où $h = 0$.
- Montrer que, lors de la présence de liquide, le condensateur est équivalent à deux condensateurs en parallèle, l'un de capacité C_0 , l'autre de capacité αh où $\alpha = \frac{\epsilon_0 L(\epsilon_r - 1)}{e}$.
- On cherche maintenant à mesurer cette capacité afin d'obtenir un signal électrique proportionnel à la hauteur h du liquide. On emploie pour ce faire le montage ci-dessous, composé d'un générateur idéal de courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$, d'un multiplieur dont les impédances d'entrée sont infinies fournissant une tension de sortie $V_3 = kV_1 V_2$:



Montrer que si R_1 et C_2 vérifient une condition à déterminer, la tension de sortie V_s est constante et que sa mesure permet de déterminer la valeur de la capacité C .

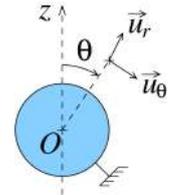
2. 4 Conducteur à l'équilibre

- Une boule métallique de rayon R est reliée à la terre (qu'on choisit donc comme masse). On place à distance d du centre de la boule une charge q .
 - Où se trouvent les charges et quel est leur signe ?
 - Lorsque la boule est seule et porte une charge Q , déterminer l'expression du potentiel V de la boule. En déduire Q en fonction de q dans le cas général.
 - Tracer l'allure des lignes de champ dans le cas où $q > 0$.
 - La boule est désormais isolée et porte une charge nulle (la charge q est toujours présente). Quel est le potentiel de la boule ?



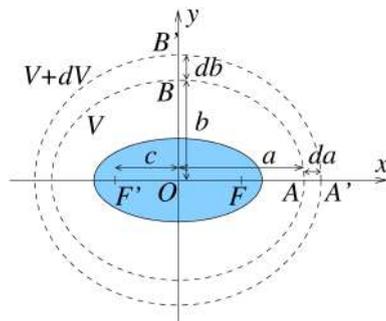
Une boule métallique de rayon R est placée dans le champ électrique extérieur uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$. Cette boule est de plus reliée à la terre. En dehors de la boule, on cherche le potentiel sous la forme

$$V(r, \theta) = \left(\frac{A}{r^2} + Br \right) \cos \theta \quad (2.20)$$



- Que vaut le champ électrique à l'intérieur de la boule ?
 - En exprimant que la boule est reliée à la terre, trouver une relation entre A et B .
 - Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(r, \theta)$ à l'extérieur de la boule (utiliser le formulaire d'analyse vectorielle).
 - En écrivant que le champ à l'infini n'est pas perturbé par la sphère, déterminer B .
 - Calculer le champ électrique en un point à la surface de la boule et en déduire la densité surfacique de charge de la boule.
 - Représenter les lignes de champ.

2. 5 Effet de pointe



On considère un conducteur en équilibre ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution de centre O , de demi-grand-axe $a = OA$, de demi-petit-axe $b = OB$, de foyers F et F' et d'excentricité e .

On précise que l'excentricité d'une ellipse peut être définie par $e = \frac{c}{a}$ où $c = OF = OF'$. On a donc $e \in [0, 1[$: pour $e = 0$ on obtient un cercle, et plus e se rapproche de 1, plus l'ellipse est aplatie. On a également la relation $c^2 = a^2 - b^2$.

On admet que les équipotentielles dans l'air sont les ellipsoïdes de révolutions de même foyers F et F' .

L'équipotentielle V d'excentricité e et l'équipotentielle $V + dV$ d'excentricité $e + de$ coupent l'axe (Ox) en deux points voisins B et B' et l'axe (Oy) en deux points voisins A et A' .

- Exprimer le rapport $\frac{da}{db}$ en fonction de e .
- En déduire le rapport $\frac{E_A}{E_B}$ des champs électriques au voisinage de A et B . Où le champ est-il le plus grand ?
- Que peut-il se passer dans l'air si le conducteur est chargé et si e est proche de 1 ?

Magnétostatique

Sommaire

3.1 Le champ magnétique	2
3.1.1 Action d'un champ magnétique	2
3.1.2 Sources de champ magnétique	2
3.2 Invariances et symétries	2
3.2.1 Différents types de distribution de courants	2
3.2.2 Le champ magnétique, un vecteur axial	2
3.2.3 Symétries et conséquences	3
3.2.4 Invariances et conséquences	4
3.3 Équation de Maxwell-Thomson	4
3.3.1 Énoncé	5
3.3.2 Conséquences	5
3.4 Équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire	5
3.4.1 Énoncé	5
3.4.2 Conséquence : le théorème d'Ampère	6
3.5 Exemples de calculs de champ magnétique	7
3.5.1 Fil épais infini	7
3.5.2 Solénoïde infini	7
3.5.3 Bobine torique	8

Questions de cours :

- Invariances et symétries d'une distribution de courant. Conséquences sur le champ magnétique, en évoquant la notion de vecteur axial.
- Équation de Maxwell-Thomson. Conséquences.
- Équation de Maxwell-Ampère dans le cas stationnaire, démonstration du théorème d'Ampère et application au fil infini.
- Démontrer l'expression du champ magnétique pour une bobine, en admettant que le champ extérieur est nul.

Capacités exigibles du BO :

- Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de courants pour en déduire les propriétés de \vec{B} .
- Énoncer les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson. Particulariser l'équation de Maxwell-Ampère au régime stationnaire.
- Exploiter la conservation du flux magnétique et ses conséquences sur les lignes de champ magnétique.
- Énoncer et appliquer le théorème d'Ampère.
- Établir l'expression du champ magnétique créé par :
 - un fil infini ;
 - un fil épais et infini ;
 - un solénoïde infini en admettant que le champ extérieur est nul ;
 - une bobine torique.
- Exprimer les forces de Laplace s'exerçant sur un conducteur filiforme, sur une distribution volumique de courant.

I. Le champ magnétique

I.1 Action d'un champ magnétique

Tout comme le champ électrique, le champ magnétique \vec{B} n'est visible que par ses effets, citons entre autres :

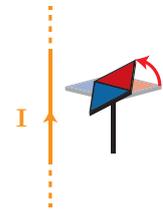
- la modification de la trajectoire d'une particule chargée (du fait de la force magnétique de Lorentz $\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$);
- la modification de l'orientation d'un moment magnétique \vec{m} tel qu'une boussole (du fait du moment de force $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$).

Ainsi la boussole nous renseigne sur la direction et le sens (du pôle sud au pôle nord). Concernant la norme, elle s'exprime en tesla et peut être mesurée avec une **sonde à effet Hall**.

Le champ magnétique est une grandeur vectorielle qui vérifie le principe de superposition : le champ magnétique résultant en un point M est la somme vectorielle de tous les champs magnétiques créés en ce point par les différentes sources.

I.2 Sources de champ magnétique

Pour créer un champ magnétique, deux solutions sont possibles : soit utiliser des matériaux magnétiques (objet de chapitres ultérieurs), soit utiliser des sources de courant. Citons l'expérience historique d'Oersted, qui a montré en 1820 qu'un fil parcouru par un courant stationnaire produit un champ magnétique stationnaire qui dévie une boussole.



Quelques ordres de grandeurs sont à connaître :

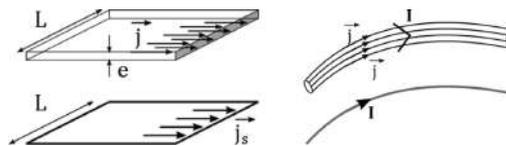
- un fil parcouru par un courant de 1 A éloigné de 1 cm : 10^{-5} T ;
- le champ magnétique terrestre : $\sim 3 \cdot 10^{-5}$ T (dépend du lieu) ;
- un aimant permanent à température usuelle : de 0,1 T à 1 T ;
- un électroaimant : quelques teslas ;
- un aimant supraconducteur d'un appareil à IRM (refroidi à l'Hélium liquide) : ~ 10 T ;
- une étoile à neutron, en surface : 10^{11} T.

II. Invariances et symétries

II.1 Différents types de distributions de courants

De manière générale, on utilise une distribution volumique de courant, caractérisée par la connaissance du vecteur densité volumique de courant \vec{j} . Néanmoins :

- si un conducteur possède une dimension très petite devant les deux autres, on peut utiliser une modélisation surfacique et introduire un vecteur densité de courant surfacique \vec{j}_s , d'unité $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ différente de celle de \vec{j} ;
- si un conducteur possède deux dimensions très petites devant la dernière, on utilise une modélisation linéique, où la connaissance du courant I traversant le conducteur suffit. I est ici constant car on se place en régime stationnaire où \vec{j} est à flux conservatif.

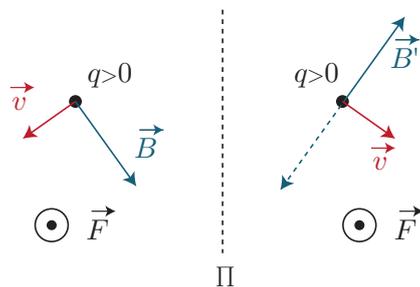


Cette modélisation n'est alors valable que si l'observateur ne se place pas trop près du conducteur.

II.2 Le champ magnétique, un vecteur axial

Comparativement au champ électrique, le champ magnétique n'est pas un vecteur « classique », c'est-à-dire un vecteur polaire ou vrai vecteur. On dit que c'est un **vecteur axial** ou « pseudo-vecteur ».

En effet, la force magnétique est une grandeur qui ne dépend pas du choix d'orientation de l'espace, mais comme le produit vectoriel dépend quant à lui de l'orientation choisie du sens direct, le vecteur \vec{B} dépend de l'orientation de l'espace. La conséquence est qu'un tel vecteur change de sens lors d'une isométrie indirecte telle qu'une interversion de tous les axes ou une symétrie par rapport à un plan. Par contre pour une rotation, il se comporte de la même manière qu'un vecteur polaire.

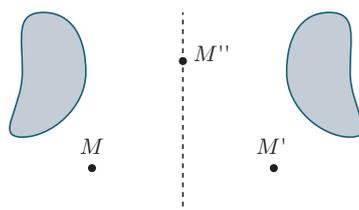


Par exemple considérons une particule chargée se déplaçant selon une direction sous l'action du champ magnétique. Si on trace la situation symétrique, pour pouvoir conserver la même force, il faut tracer $-S_{\Pi}(\vec{B})$ pour obtenir après produit vectoriel la même direction de force !

II.3 Symétries et conséquences

a) Plans de symétrie

Considérons un plan de symétrie d'une distribution de courant Π_S (noté également Π^+) :

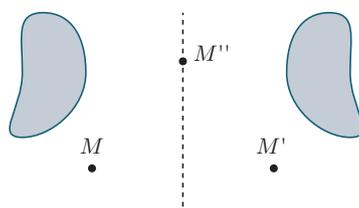


Exercice

Compléter le schéma et indiquer les deux conséquences associées à un plan de symétrie d'une distribution de courant.

b) Plans d'antisymétrie

Un plan d'antisymétrie pour une distribution de courant Π_A (aussé noté Π^-) est un plan qui inverse le sens des courants de la distribution :





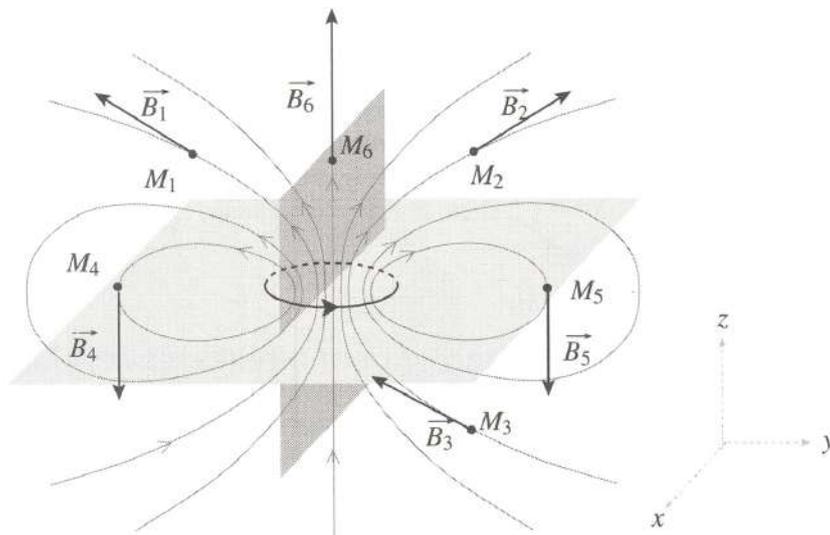
Exercice

Compléter le schéma et indiquer les deux conséquences associées à un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant.



Exercice

Sur l'exemple ci-dessous, retrouver les propriétés de symétrie et antisymétrie :



Rappelons enfin que les **lignes de champ sont orientées suivant la règle de la main droite** (le pouce étant dans la direction du courant, et les doigts de la main droite indiquant le sens d'orientation des lignes de champ), et **s'enroulent autour des sources de courant**.

II.4 Invariances et conséquences

Tout comme pour le champ électrique, s'il existe une invariance par translation ou rotation de la distribution de courant, cela permet de supprimer la dépendance du champ magnétique par rapport à la variable associée. Pour reprendre l'exemple qui précède, en se plaçant en coordonnées cylindriques, il y a invariance par rotation d'angle θ , donc on peut chercher un champ de la forme $\vec{B}(r, z)$ uniquement.

III. Équation de Maxwell-Thomson

Comparativement à ce qui a été fait dans le chapitre EM1, nous n'allons pas partir de la force de Lorentz pour construire la magnétostatique (comme nous l'avons fait avec la force de Coulomb), mais plutôt des équations fondamentales de la magnétostatique,.

III.1 Énoncé

Équation de Maxwell-Thomson

L'équation de Maxwell-Thomson (ou Maxwell-flux) s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.1)$$

Il s'agit d'une équation locale, valable y compris pour des distributions variables dans le temps.

III.2 Conséquences

Exercice

Comme pour d'autres grandeurs vectorielles de divergence nulle, on retrouve les conséquences usuelles. Complétez :

Par comparaison avec le champ électrostatique, nous en déduisons que le champ magnétique ne peut pas diverger ou converger vers un point sinon le flux à travers une surface englobant ce point serait non nul. Les lignes de champ magnétique sont donc toujours bouclées sur elles-mêmes.

HP : comme $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$, et $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, il existe un champ vectoriel \vec{A} appelé potentiel vecteur tel que $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Cependant il n'y a pas unicité du potentiel vecteur, car en posant $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f(M, t)$ avec f un champ scalaire quelconque, $\operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A}$!

IV. Équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire

IV.1 Énoncé

Équation de Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.2)$$

où $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ est la **perméabilité magnétique du vide** et \vec{j} est le vecteur densité volumique de courant. Il s'agit d'une équation locale, mais qui n'est **valable qu'en régime stationnaire**. Cette équation reliant linéairement le champ magnétique à ses sources, cela **justifie l'utilisation du théorème de superposition des champs en magnétostatique**.

IV.2 Conséquence : le théorème d'Ampère

a) Énoncé

Théorème d'Ampère

La circulation du vecteur champ magnétostatique le long d'une courbe **fermée orientée** (Γ) vaut :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad (3.3)$$

avec $I_{\text{enlacé}}$ l'intensité du courant enlacé par le contour (Γ), comptée algébriquement suivant la règle d'orientation du contour.



Démonstration

D'après le théorème de Stokes-Ampère, avec (S) une surface quelconque s'appuyant sur le contour (Γ) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_{(S)} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (3.4)$$

soit en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

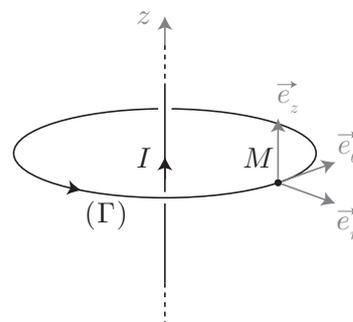
$$\iint_{(S)} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad (3.5)$$

b) Méthode d'utilisation

1. On choisit un système de coordonnées adapté et on détermine éventuellement les différentes zones d'étude (= zones où on place un point M pour lequel on souhaite connaître l'expression du champ magnétique) : en particulier, le point peut être quelconque pour une distribution volumique, mais il ne peut pas se trouver sur une distribution surfacique ou linéique.
2. On étudie les symétries pour déterminer la direction de \vec{B} .
3. On étudie les invariances pour éliminer la dépendance en certaines variables pour \vec{B} .
4. On choisit un contour d'Ampère **fermé orienté**, et pour laquelle **la circulation de \vec{B} se calcule facilement**.
5. On applique alors le théorème d'Ampère.

Appliquons-le au cas d'un fil infini parcouru par un courant constant I :

1. les coordonnées cylindriques sont ici appropriées, l'axe (Oz) étant confondu avec le fil ; on étudie le champ magnétique en tout point à l'exclusion de l'axe (Oz) ;
2. le plan (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) est un plan de symétrie pour la distribution de courant : le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan, soit $\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$;
3. on observe que la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ ou translation selon l'axe (Oz), donc on peut chercher \vec{B} sous la forme $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$;
4. il paraît donc approprié de choisir comme contour d'Ampère un cercle de rayon r d'axe (Oz), orienté dans le sens trigonométrique, de sorte que la norme du champ magnétique reste constante en chaque point du contour ;
5. on applique le théorème d'Ampère :



$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r)2\pi r = \mu_0 I \iff B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.6)$$

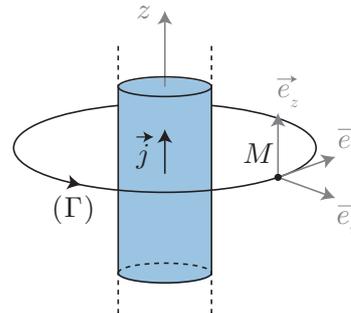
On conclut donc que le champ créé par un fil infini s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (3.7)$$

V. Exemples de calculs de champ magnétique

V.1 Fil épais infini

Considérons un fil épais infini, de rayon a . Il est parcouru par un courant I de sorte que le vecteur densité volumique de courant électrique vaut $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$. Cette modélisation est appropriée si on veut exprimer le champ magnétique au voisinage de l'axe du fil. On utilise les coordonnées cylindriques, en distinguant les cas $r \leq a$ et $r \geq a$. L'étude des invariances et symétries sont parfaitement identiques au cas du fil infini infiniment fin, donc on recherche le champ sous la forme $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$. On utilise un contour d'Ampère circulaire de rayon r , de centre passant par l'axe (Oz) et orienté dans le sens trigonométrique.



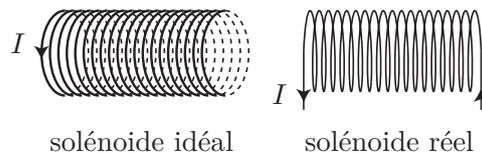
Exercice

Déterminer l'expression du champ magnétique dans les deux cas :

On remarque qu'il a continuité du champ magnétique en $r = a$.

V.2 Solénoïde infini

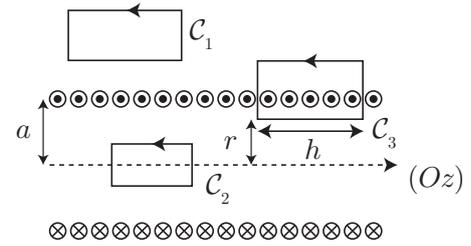
Dans le cas idéal, on considère qu'un solénoïde (ou une bobine longue) est constituée d'une infinité de spires circulaires, de même axe, de même rayon a , parcourues par le même courant I et réparties régulièrement à raison de n spires par unité de longueur du solénoïde (densité linéique).



En pratique, on réalise un enroulement hélicoïdal de très faible pas (on parle de « spires jointives »). Le solénoïde a en outre une longueur finie.

On peut étudier les invariances et symétries, dans le cas d'une distribution infinie, en se plaçant dans les coordonnées cylindriques.

- du fait de l'invariance par rotation d'angle θ et par translation selon \vec{e}_z , \vec{B} ne dépend que de r ;
- pour un point M quelconque, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc \vec{B} est perpendiculaire à ce plan, donc dirigé selon \vec{e}_z .



On cherche donc le champ sous la forme $\vec{B} = B_z(r)\vec{e}_z$. On peut utiliser divers contours d'Ampère rectangulaires (avec deux bords parallèles à \vec{e}_z), de sorte à montrer que :

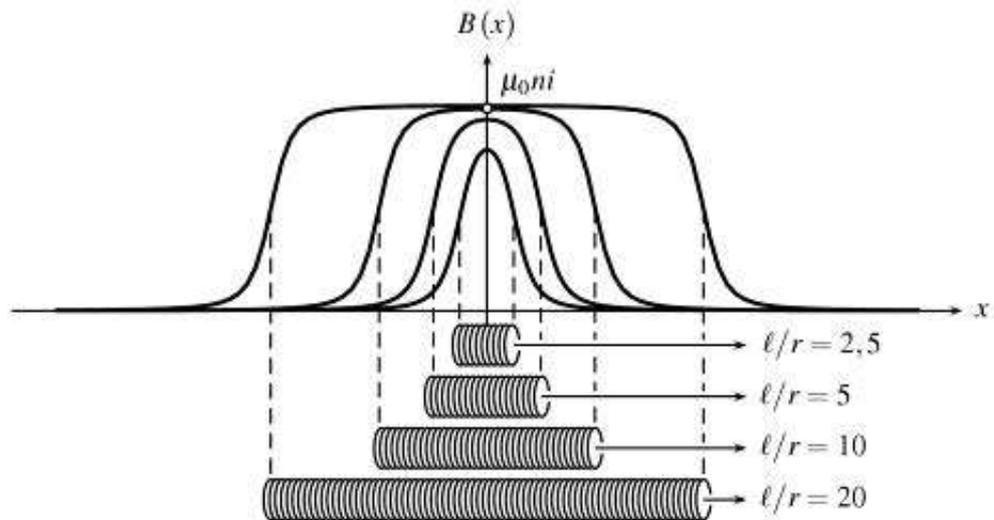
- sur (C_1) , $\ell(B(r_2) - B(r_1)) = 0$, donc le champ est uniforme à l'extérieur de la bobine, et on fera l'hypothèse qu'il est identiquement nul ;
- sur (C_2) , de même, on montre que le champ \vec{B} est également uniforme ;
- en utilisant enfin le contour (C_3) à cheval entre l'intérieur et l'extérieur de la bobine, dont le bord inférieur est à une distance r de l'axe :

$$B(r) \times h - 0 = \mu_0(nh)I \quad (3.8)$$

Donc le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini est uniforme et vaut :

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z \quad (3.9)$$

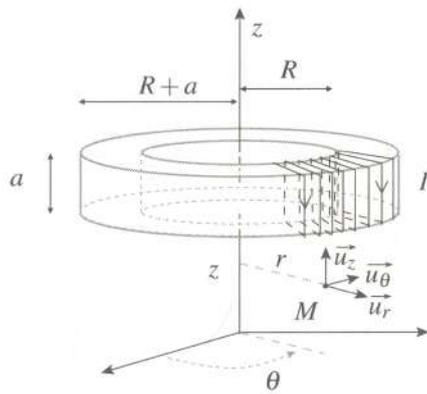
Les lignes de champ sont donc horizontales, parallèles entre elles. Sur la courbe ci-après, on illustre l'influence, sur une bobine de longueur finie, des effets de bords. Comme attendu, plus le rapport R/L est petit, plus la bobine se comporte comme un solénoïde idéal.



L'intérêt d'un tel système est de pouvoir produire un champ magnétique uniforme dans une zone de l'espace, et pouvant être relativement intense si on superpose plusieurs couches de spires.

V.3 Bobine torique

Une bobine torique est constituée d'un fil électrique régulièrement bobiné autour d'un tore dont la section peut être circulaire ou carrée. Est représentée ci-dessous une bobine de section carrée de côté a , de rayon intérieur R et extérieur $R + a$. Elle est caractérisée par un nombre N de spires bobinées. On se place évidemment en coordonnées cylindriques.



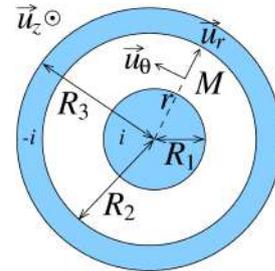
Exercice

Après avoir étudié les symétries et invariances de la distribution torique, déterminer l'expression du champ magnétique. Quel est l'intérêt majeur par rapport à une bobine de taille finie ?

Exercices

3.1 Câble coaxial¹

On considère un câble coaxial infini, cylindrique, d'axe Oz . Le courant d'intensité i passe dans un sens dans le conducteur intérieur, un cylindre plein de rayon R_1 , et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.



1. Déterminer la direction de \vec{B} et les coordonnées dont il dépend pour un point $M(r, \theta, z)$ quelconque.
2. Déterminer les densités volumiques de courant \vec{j}_i et \vec{j}_e dans les conducteurs intérieurs et extérieurs.
3. Déterminer le champ $\vec{B}(M)$ en fonction de μ_0, i, r, R_1, R_2 et R_3 suivant que M est dans le conducteur intérieur, entre les conducteurs, dans le conducteur extérieur ou à l'extérieur du câble.
4. Tracer le graphe $B(r)$.

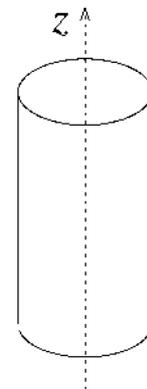
3.2 Cylindre chargé en rotation²

Un cylindre d'axe Oz , de longueur ℓ et de rayon a est uniformément chargé avec une densité volumique de charge ρ uniforme. La tige est en rotation uniforme avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$ constante autour de son axe dans le référentiel du laboratoire.

Déterminer le champ magnétique créée par la tige en tout point de l'espace, en supposant $\ell \gg a$.

3.3 Fil cylindrique à conduction surfacique

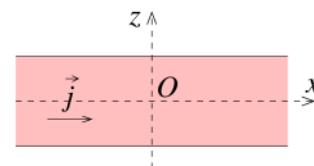
On considère un conducteur cylindrique, de rayon R et de dimension infinie selon Oz , parcouru par un courant d'intensité constante I . La conduction est supposée superficielle : on a une densité de courant surfacique uniforme $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_z$ à la surface du cylindre.



1. Déterminer la relation entre I et \vec{j}_s . En déduire l'unité de \vec{j}_s dans le système international
2. Montrer que le champ créé par ce fil est de la forme $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques.
3. Déterminer en fonction de I et r , le champ $\vec{B}(M)$ pour tout point M intérieur ou extérieur au fil.
4. Que peut-on dire de \vec{B} à la traversée de la surface chargée ?

3.4 Nappe de courant³

On considère une couche plane infinie contenue entre les plans $z = -\frac{e}{2}$ et $z = \frac{e}{2}$ de courant volumique uniforme $\vec{j} = j \vec{e}_x$.



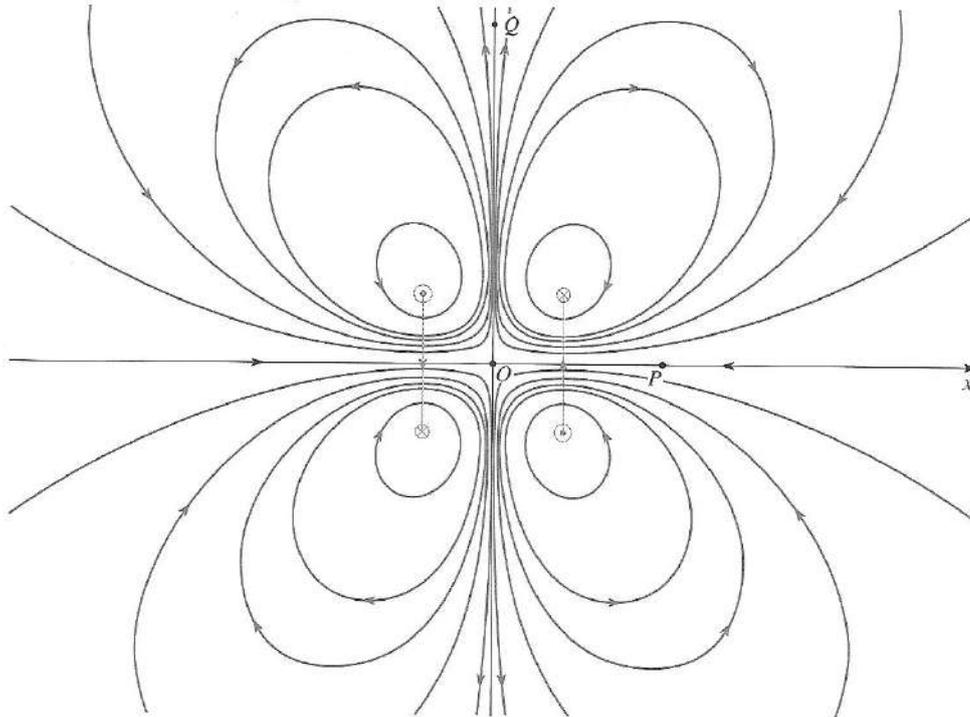
1. $\vec{j}_e = -\frac{i}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_z$.
3. Si $R_2 \leq r \leq R_3$, $B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = \frac{\mu_0 i (R_3^2 - r^2)}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)}$.
2. $\vec{B}(r \leq a) = \frac{1}{2} \mu_0 \rho \omega (a^2 - r^2) \vec{e}_z$.

1. Déterminer la direction de $\vec{B}(M)$ et les coordonnées dont il dépend en un point M quelconque.
2. Que peut-on dire du champ \vec{B} dans le plan (Oxy) ?
3. Que peut-on dire des champs $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan (Oxy) .
4. Déterminer \vec{B} en tout point.

On fait tendre l'épaisseur e vers zéro, tout en maintenant constant le courant total.

5. Quelle relation doivent vérifier j et e pour cela ?
6. Que devient le champ \vec{B} ?

3.5 Champ magnétique créé par deux bobines ⁴



Le schéma ci-dessus représente les lignes de champ magnétiques créé par deux bobines circulaires identiques de N spires centrées sur l'axe (Ox) et parcourues par les courants d'intensité I_1 et I_2 . Ces courants "tournent" en sens inverse comme indiqué sur la figure. Le rayon des bobines est $R = 1$ cm et leurs centres sont distants de $d = 2R = 2$ cm.

1. Déterminer la valeur du champ \vec{B} au point O .
2. Quelle relation relie I_1 et I_2 ?
3. Donner un ordre de grandeur du rapport des normes $\frac{B(P)}{B(Q)}$ du champ \vec{B} aux points P et Q .

3. 4. $\vec{B} = \text{sgn}(z) \frac{\mu_0 j e}{2} \vec{e}_y$ pour $z \notin [-e/2; e/2]$, $\vec{B} = \mu_0 j z \vec{e}_y$ sinon.

4. 1. $\vec{B} = \vec{0}$. 2. $I_1 = I_2$. 3. Utiliser le flux. $\frac{B(P)}{B(Q)} = \frac{2\pi y_Q r_Q}{\pi r_P^2} \simeq 25$.

Les équations de Maxwell

Sommaire

4.1 Les équations de Maxwell	2
4.1.1 Insuffisance des équations statiques	2
4.1.2 Des équations inchangées...	2
4.1.3 ... et des équations qui permettent de décrire le régime variable	2
4.2 Quelques propriétés des champs électromagnétiques	4
4.2.1 Symétries	4
4.2.2 Relations de passage	4

Capacités exigibles du BO :

- Citer les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday.
- Énoncer les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson.
- Vérifier que le terme de courant de déplacement permet d'assurer la compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge.
- Utiliser les relations de passage fournies.

Dans les chapitres précédents, on a étudié les propriétés électromagnétiques d'un milieu dans lequel existent des charges et des courants stationnaires. On aborde maintenant le cas de distributions de charges et de courants variables $(\rho(M, t), \vec{j}(M, t))$, à l'origine d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) . La théorie des champs électromagnétiques s'est élaborée durant plusieurs siècles, mais ce n'est qu'au XIX^e siècle que Maxwell a unifié plusieurs approches en une seule théorie que l'on utilise toujours aujourd'hui. Notons néanmoins que la formulation moderne des équations de Maxwell est le fruit d'un travail réalisé par Heaviside, qui a synthétisé les 20 équations initiales de Maxwell en 4 équations vectorielles !

I. Les équations de Maxwell

I.1 Insuffisance des équations statiques

En régime variable, les quatre équations de Maxwell précédemment décrites ne permettent pas de décrire l'ensemble des phénomènes que l'on peut observer. Citons notamment :

- * {
 - l'incompatibilité entre les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge, car $\text{div}(\text{rot}(\vec{B})) = \vec{0} = \text{div}(\mu_0 \vec{j})$ incompatible avec $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$;
 - l'incompatibilité entre les équations de Maxwell, qui découplent champs électrique et magnétique, avec les phénomènes inductifs, où l'on a montré la possibilité de générer un champ électrique (et une différence de potentiel) en faisant varier un champ magnétique ;
 - l'observation du temps de retard entre l'évolution temporelle des sources et la détection de cette évolution par un observateur ne peut être expliquée par des équations qui sont indépendantes du temps.

I.2 Des équations inchangées...

On constate que deux équations de Maxwell sont inchangées en régime variable :

$$\boxed{\text{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{div} \vec{B}(M, t) = 0} \quad (4.1)$$

respectivement les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Thomson. Les conséquences observées en statique sont toujours valables :

- le théorème de Gauss reste valable et relie le flux du champ électrique à travers une surface fermée et la charge $Q(t)$ contenue dans le volume délimité par cette surface

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \quad (4.2)$$

- le champ magnétique est toujours à flux conservatif, même si le flux peut dépendre du temps. Ainsi les lignes de champ magnétiques sont toujours bouclées sur elles-mêmes.

I.3 ... et des équations qui permettent de décrire le régime variable

a) Équation de Maxwell-Faraday

En régime variable, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\boxed{\text{rot}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}} \quad (4.3)$$

Cela traduit directement le fait qu'un champ magnétique variable est source d'un champ électrique. On peut alors classiquement passer à l'équation intégrale :

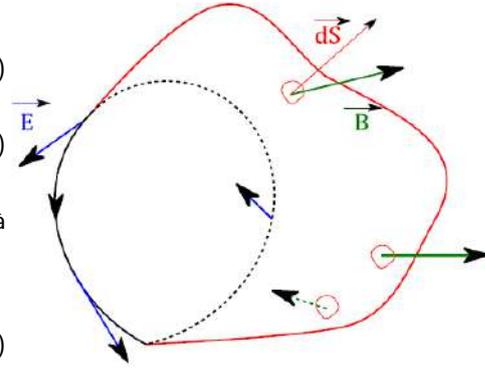
Intégrons l'équation de Maxwell-Faraday à travers une surface (S) immobile qui s'appuie sur un contour (Γ) fermé orienté :

$$\iint_{(S)} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.4)$$

$$\iff \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} \quad (4.5)$$

en utilisant le théorème de Stokes. D'où la **loi de Faraday**, à l'origine des phénomènes d'induction :

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} \quad (4.6)$$



L'égalité $\iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ passe d'une dérivée partielle à une dérivée droite : autant le champ magnétique dépend *a priori* de l'espace et du temps, autant le flux du champ magnétique ne dépend plus que du temps.

b) Équation de Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère doit être conforme à l'équation de conservation de la charge en régime variable. Or :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \text{div}(\vec{E})) = 0 \implies \text{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.7)$$

* En régime variable, ce n'est pas \vec{j} mais $\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ qui est à flux conservatif. Cela revient formellement à rajouter un vecteur densité de courant supplémentaire, appelé **courant de déplacement** $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Attention, il n'est associé à aucun déplacement de matière ! On écrit alors l'équation de Maxwell-Ampère en régime variable :

$$\text{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \quad (4.8)$$

Notons que les deux constantes μ_0 et ϵ_0 vérifient

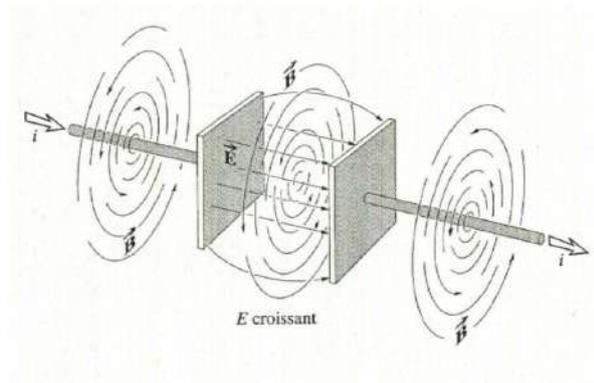
$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \quad (4.9)$$

avec c la célérité de la lumière dans le vide.

Le théorème d'Ampère prend alors une formulation différente :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}(t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (4.10)$$

Remarquons que c'est l'équation de Maxwell-Ampère en régime variable qui permet de justifier le « passage » du courant de part et d'autre d'un condensateur.



En effet, les armatures d'un condensateur sont séparées par un isolant qui interdit tout courant en tant que déplacement de charge. Néanmoins le champ électrique variable à l'intérieur du diélectrique est à l'origine d'un champ magnétique orthoradial, ce dernier permet alors, en appliquant le théorème d'Ampère sur la seconde armature, d'expliquer la présence d'un courant de l'autre côté du condensateur.

II. Quelques propriétés des champs électromagnétiques

II.1 Symétries

Compte-tenu du fait que l'on ne peut plus dissocier les distributions de charges et de courants en régime variable comme sources de champs électromagnétiques, il n'est plus possible non plus de dissocier les propriétés de symétrie du champ électrique et du champ magnétique. Néanmoins, les conclusions obtenues en régime stationnaire se reconduisent en régime variable à condition de prendre en compte les plans de symétrie ou d'antisymétrie communs à l'ensemble des distributions (ρ, \vec{j}) :

- si à chaque instant t , Π_S est un plan de symétrie du couple (ρ, \vec{j}) , pour $M \in (\Pi_S)$, $\vec{E}(M, t)$ est contenu dans (Π_S) et $\vec{B}(M, t)$ lui est orthogonal ;
- si à chaque instant t , Π_A est un plan d'antisymétrie du couple (ρ, \vec{j}) , pour $M \in (\Pi_A)$, $\vec{E}(M, t)$ est orthogonal à Π_S et $\vec{B}(M, t)$ est contenu dans Π_A ;
- en cas d'invariance par translation ou rotation du couple (ρ, \vec{j}) , le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est indépendant du paramètre caractérisant la translation ou la rotation.

II.2 Relations de passage

Nous avons constaté dans les chapitres précédents, au travers d'exemples, que les distributions volumiques de charges et de courants donnaient naissance à des champs continus dans l'espace. Par contre, les distributions surfaciques et linéiques présentaient souvent des singularités (discontinuité ou divergence). Dans le cas particulier des distributions surfaciques, en notant $\sigma(M, t)$ et $\vec{j}_s(M, t)$ les densités surfaciques de charge et de courant présentes sur une surface S , les champs vérifient les relations de passage :

$$\vec{E}(M_2 \approx M, t) - \vec{E}(M_1 \approx M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (4.11)$$

$$\text{et } \vec{B}(M_2 \approx M, t) - \vec{B}(M_1 \approx M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (4.12)$$

avec des points M_1 et M_2 infiniment proches d'un point M appartenant à la surface S et le vecteur $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur normal à S orienté de M_1 vers M_2 .

Cela a pour conséquence que la composante tangentielle du champ électrique est continue au passage de l'interface, tout comme la composante normale du champ magnétique. Nous réutiliserons ces relations de passage prochainement pour l'étude des milieux ferromagnétiques, et également lors de la réflexion des ondes électromagnétiques sur les métaux.

4.1 Décharge d'un conducteur dans l'air

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge initiale q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est faiblement conducteur, de conductivité σ : la densité de charge y est nulle et la densité de courant y est fournie par la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. L'origine de l'espace étant prise au centre O de la boule, on adopte des coordonnées sphériques de centre O et on cherche un champ électromagnétique de la forme $\{\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_r, \vec{B} = \vec{0}\}$.

1. Justifier la forme de \vec{E} par une étude des symétries et invariances.
2. Déterminer $E(r, t)$ en fonction de $q(t)$ pour $r > R$.
3. Vérifier que les expressions de \vec{E} et \vec{B} sont compatibles avec les équations de Maxwell (on pourra utiliser le formulaire d'analyse vectorielle pour l'expression des opérateurs en coordonnées sphériques) et déterminer $q(t)$.
4. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

1. Initialement, la distribution de charge possède les symétries et invariances classiques permettant de chercher un champ électrique sous la forme $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_r$, et $\vec{B} = \vec{0}$ en l'absence de charges mobiles. Lorsqu'on considère l'air conducteur, comme il n'y a pas de direction privilégiée pour le transport de charges, on peut écrire $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$ (invariance par rotation d'angle θ et φ), il en est donc de même pour le champ électrique. Enfin, comme les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de courant, $\vec{B} = \vec{0}$.
2. Pour $r > R$, l'application du théorème de Gauss conduit à

$$\vec{E} = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (4.13)$$

3. Vérifions que les équations de Maxwell sont bien vérifiées :

- pour le champ électrique, $\text{div}(\vec{E}) = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ avec pour $r > R$ une densité volumique de charge nulle ; $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ d'après un formulaire d'analyse vectorielle en coordonnées sphériques, conforme au fait que $\vec{B} = \vec{0}$;
- pour le champ magnétique, $\text{div}(\vec{B}) = 0$ est valide, et l'équation de Maxwell-Ampère nous donne (enfin) une relation permettant de déterminer $q(t)$:

$$\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4.14)$$

c'est-à-dire en utilisant la loi d'Ohm et en projection selon \vec{e}_r :

$$\sigma q(t) + \epsilon_0 \frac{dq}{dt} = 0 \quad (4.15)$$

En posant $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$, $q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$.

4. Si l'air est humide, la permittivité augmente, donc le temps de décharge est plus important et on pourrait penser que les charges resteraient plus longtemps sur des conducteurs. Cependant il y a de fortes chances que l'air devienne aussi beaucoup plus conducteur, cet effet étant sans doute prédominant !

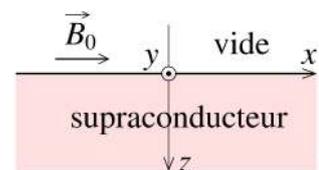
4.2 Effet Meissner

En 1935, les frères London décrivent théoriquement l'« effet Meissner », donnant l'évolution du champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur (dont la permittivité ϵ_0 et la perméabilité μ_0 sont celles du vide).

Lorsque le matériau est dans sa phase supraconductrice et qu'il est soumis à un champ magnétique \vec{B} extérieur, des courants \vec{j} apparaissent. Soient \vec{v} la vitesse instantanée des porteurs de charges associés à ces courants, m leur masse, q leur charge électrique et n leur densité volumique (nombre par unité de volume).

On notera $\vec{E}(M, t)$ le champ électrique à l'intérieur du supraconducteur.

1. (a) À partir de l'équation du mouvement d'un porteur de charge, considéré comme n'étant soumis qu'à la seule action du champ électrique, montrer que $\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$, où l'on exprimera λ en fonction de m , n , q et μ_0 .



(b) Montrer que λ est une longueur.

(c) Calculer λ pour l'aluminium. *Données* : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $n = 1,8 \cdot 10^{29}$ m⁻³, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m⁻¹.

2. Dans toute la suite, on se place dans un cadre (appelé régime quasi-stationnaire magnétique) tel qu'on peut négliger $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant \vec{j} . Le matériau est localement neutre ($\rho = 0$ en tout point). À partir des équations de Maxwell, montrer que $\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} \right) = \vec{0}$. On utilisera $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \Delta$.

On admet qu'on a en réalité $\Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}$

3. Dans toute la suite, on considère le cas d'une plaque supraconductrice infinie dans les directions x et y , occupant le demi-espace $z > 0$, l'origine O étant choisie sur la surface de la plaque.

On applique le champ $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$ uniforme à l'extérieur du matériau et on cherche un champ de la forme $\vec{B} = B(z) \vec{e}_x$ dans le matériau.

- (a) Déterminer $B(z)$ à partir de l'équation différentielle précédente, les courants étant considérés comme répartis dans le volume du matériau (pas de courant surfacique).
 (b) Tracer l'allure du graphe $B(z)$ et commenter.

1. (a) La loi de la quantité de mouvement appliquée à une charge q conduit à

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = q \vec{E} \implies \frac{m}{nq} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = q \vec{E} \iff \vec{E} = \mu_0 \frac{m}{nq^2 \mu_0} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (4.16)$$

(b) Donc $\lambda = \sqrt{\frac{m}{nq^2 \mu_0}}$, homogène à une longueur. On peut le montrer via le fait que $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$ et $[Li^2] = [E]$ conduisant à $[\mu_0] = MLT^{-2}A^{-2}$. Ainsi $[\lambda] = L$.

(c) AN : $\lambda = 12,5$ nm.

2. On va se servir des équations de Maxwell. On cherche à faire apparaître le laplacien de \vec{B} , donc à l'aide de la formule de l'énoncé, prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\mu_0 \vec{j}) \iff -\Delta \vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} \quad (4.17)$$

comme $\text{div}(\vec{B}) = 0$. Soit en dérivant par rapport au temps, en supposant que l'on peut bien intervertir les opérateurs :

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{E}}{\mu_0 \lambda^2} \right) = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.18)$$

avec l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. D'où l'équation demandée.

3. (a) L'équation admise a pour forme de solution :

$$B(z) = A \exp(z/\lambda) + C \exp(-z/\lambda) \quad (4.19)$$

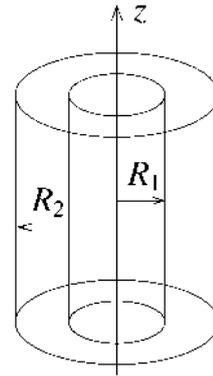
D'après l'énoncé, il n'y a pas de courants surfaciques, donc le champ magnétique est continu à l'interface. On a ainsi $B(z=0) = B_0$. D'autre part le champ magnétique ne diverge pas lorsque $z \rightarrow +\infty$, donc $A = 0$, puis $C = B_0$, ainsi :

$$B(z) = B_0 \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right) \quad (4.20)$$

- (b) Allure exponentiellement décroissante : au bout de quelques λ , le champ magnétique s'annule complètement dans la plaque supraconductrice. Cette dernière repousse le champ, et pourra permettre la lévitation de tels matériaux au-dessus d'un aimant.

4.3 Relaxation dans une enceinte cylindrique

Deux cylindres métalliques coaxiaux, de rayons respectifs R_1 et R_2 , sont séparés par un gaz isolant ayant même permittivité que le vide. À l'instant initial, le conducteur intérieur porte la densité surfacique de charge uniforme σ_0 , tandis que le conducteur extérieur n'est pas chargé. On négligera les effets de bords en raisonnant comme si les cylindres étaient de longueur infinie.



- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_0(\vec{r})$ créé par ces charges en tout point de l'espace.
- On suppose qu'un rayonnement énergétique rend instantanément le gaz conducteur à $t = 0$, avec une conductivité γ . Quelles sont les directions et les dépendances de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(r, t)$?
- (a) À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, établir une équation différentielle temporelle relative au champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$.
 (b) Intégrer cette équation et donner $\vec{E}(\vec{r}, t)$.
 (c) Préciser l'évolution de la densité surfacique de charge $\sigma_1(t)$ sur le conducteur intérieur.
 (d) Interpréter les propriétés obtenues après un temps très long. Vers quelle valeur tend la densité surfacique de charge σ_2 du cylindre extérieur ?
- Déterminer la densité volumique de charge $\rho(\vec{r}, t)$ dans le milieu conducteur de deux manières différentes.

- Calcul classique, $\vec{E} = \vec{0}$ pour $r < R_1$, $\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0 R_1}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r$.
- Le milieu étant isotrope, la conduction s'effectue radialement (cela permet la plus grande répulsion des charges). Par conséquent, les plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétries de la distribution de charges ET de courants, et donc $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ et $\vec{B} = \vec{0}$.

- (a)

$$\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \iff \frac{\epsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} = \vec{0} \quad (4.21)$$

comme $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ pour un milieu conducteur.

- (b) Par intégration, en posant $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-t/\tau} = \frac{\sigma_0 e^{-t/\tau} R_1}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad (4.22)$$

si $r > R_1$, et $\vec{E}(r < R_1) = \vec{0}$.

- (c) En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre de rayon R_1^+ et de hauteur h , connaissant l'expression de \vec{E} , on aboutit à $\sigma_1(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}$.
- (d) Après un temps très long, $\vec{E} = \vec{0}$, $\sigma_1 \rightarrow 0$ et l'ensemble des charges se retrouvent sur le conducteur extérieur, on retrouve une situation statique.

$$Q = \sigma_0 2\pi R_1 h = \sigma_2 2\pi R_2 h \iff \sigma_2 = \sigma_0 \frac{R_1}{R_2} \quad (4.23)$$

- On peut utiliser le théorème de Gauss pour un cylindre de rayon $R_1 < r < R_2$ quelconque :

$$E(r, t) 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_1(t) 4\pi R_1^2 + q) \quad (4.24)$$

avec q la charge contenue dans le gaz du cylindre. On trouve alors $q = 0$! Donc $\rho = 0$. Avec $\text{div} \vec{E} = 0$, on trouve le même résultat (en coordonnées cylindriques).

Électromagnétisme dans l'ARQS

Sommaire

5.1	Approximation des régimes quasi-stationnaires	2
5.1.1	Définition de l'ARQS	2
5.1.2	ARQS électrique (HP)	2
5.1.3	ARQS magnétique	2
5.2	Courants de Foucault	3
5.2.1	Observations expérimentales et définition	3
5.2.2	Évaluation des courants de Foucault dans un conducteur cylindrique	4
5.2.3	Dissipation d'énergie	4
5.2.4	Influence du feuilletage	5
5.2.5	Champ magnétique créé par les courants induits	5
5.3	Phénomènes d'induction dans des circuits électriques filiformes	5
5.3.1	Auto-induction	6
5.3.2	Mutuelle induction	7
5.3.3	Énergie magnétique	9

Questions de cours :

- Notion d'approximation des régimes quasi-stationnaires. Cas particulier de l'ARQS magnétique, conséquences.
- Courants de Foucault : définition, évaluation des courants de Foucault dans un conducteur cylindrique, géométrie des courants de Foucault, puissance moyenne dissipée.
- Inductance mutuelle : définition, exemple de calcul simple, présentation du couplage entre circuits et exemples.
- Énergie magnétique : densité volumique d'énergie magnétique, énergie magnétique lors d'un couplage par mutuelle : notion de couplage parfait ou partiel.

Capacités exigibles du BO :

- Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.
- Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.
- Relier la circulation de \vec{E} à la dérivée temporelle du flux magnétique, faire qualitativement le lien avec la loi de Faraday vue en première année.
- Dans le cas d'un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique parallèle à son axe, uniforme et oscillant, décrire la géométrie des courants de Foucault, exprimer la puissance dissipée par effet Joule en négligeant le champ propre. Expliquer l'influence du feuilletage.
- Exprimer l'énergie magnétique d'une bobine seule ou de deux bobines couplées en fonction des coefficients d'inductance et des intensités.
- Citer l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique. La retrouver dans le cas de la bobine dont on néglige les effets de bord à partir de la relation $E = \frac{1}{L}i^2$.
- Exploiter la continuité temporelle du flux magnétique.
- Dans le cas de deux bobines couplées, établir l'inégalité $M^2 \leq L_1L_2$.

Nous venons de voir que les équations de Maxwell en régime variable couplent fortement le champ électrique avec le champ magnétique. Néanmoins, dans une certaine gamme de fréquences, nous allons voir que ces équations peuvent être simplifiées et permettent de retrouver des résultats démontrés rigoureusement en régime stationnaire.

I. Approximation des régimes quasi-stationnaires

I.1 Définition de l'ARQS

L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à pouvoir négliger la durée de propagation des phénomènes électromagnétiques d'un point à l'autre d'un système devant tous les temps d'évolution caractéristiques du système (période, temps de relaxation,...). Cela signifie que les phénomènes de propagation des signaux sont imperceptibles à l'échelle du système, et donc que toute modification d'une grandeur en un point quelconque du système est instantanément perçue en tout autre point du système.

Considérons un dispositif de taille caractéristique a , source d'un champ électromagnétique où T est le temps caractéristique de sa variation. En notant c la célérité des ondes électromagnétiques, cela revient à la condition :

$$\tau_{\text{propag}} = \frac{a}{c} \ll T \iff a \ll cT = \lambda \quad (5.1)$$

Pour des fréquences de l'ordre de 1 MHz, l'approximation des régimes quasi-stationnaires est donc vérifiée si $a \ll 300$ m.

Dans ce cadre général, on distingue deux cas particuliers selon la prédominance de la distribution de charges ou de courants.

I.2 ARQS électrique (HP)

Dans l'ARQS électrique, on considère que prédomine la distribution de charge. Cela se traduit concrètement, en comparant des grandeurs homogènes, par $\|\vec{j}\| \ll \rho c$, ou encore $\|\vec{E}\| \gg c\|\vec{B}\|$ (cela se démontre, mais avec des outils hors programme). Ainsi les équations de Maxwell dans l'ARQS électriques deviennent :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad , \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.3)$$

Dans l'ARQS électrique, le champ électrique est le même que dans le cas statique, et il existe un champ magnétique dont l'importance énergétique sera faible.

La forme des équations de Maxwell peut se justifier en calculant des ordres de grandeur :

$$\frac{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}} \sim \frac{B}{E} \sim \frac{cB}{E} \times \frac{a}{cT} \ll 1 \quad (5.4)$$

De la même façon pour l'équation de Maxwell-Ampère, en utilisant en ordre de grandeur $\frac{E}{a} \sim \frac{\rho}{\epsilon_0}$:

$$\frac{\|\mu_0 \vec{j}\|}{\left\| \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{j}{\epsilon_0 E/T} \sim \frac{j}{\rho c} \times \frac{cT}{a} \quad (5.5)$$

donc on ne peut rien dire (et il en est de même de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$ par rapport aux deux termes du second membre).

I.3 ARQS magnétique

a) Énoncé

ARQS magnétique

L'ARQS magnétique reprend l'hypothèse générale de l'ARQS, à savoir $a \ll \lambda = cT$, auquel on adjoint l'hypothèse que la distribution de courant prédomine, à savoir $\|\vec{j}\| \gg \rho c$, ou encore $\|\vec{E}\| \ll c\|\vec{B}\|$. Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

*

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (5.6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (5.7)$$

Ainsi **dans l'ARQS magnétique, le champ magnétique est le même que dans le cas statique**, et il existe un champ électrique dont l'importance énergétique sera faible, mais qui est à l'origine des phénomènes inductifs. Cela se justifie en ordre de grandeur car :

$$\frac{\left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \mu_0 \vec{j} \right\|} \sim \frac{\rho c}{j} \times \frac{a}{cT} \gg 1 \quad (5.8)$$

de même $\frac{\left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \operatorname{rot} \vec{B} \right\|} \sim \frac{E}{cB} \times \frac{a}{cT} \ll 1$. Par contre on ne peut rien dire pour l'équation de Maxwell-Faraday, où les deux termes ont même ordre de grandeur.

b) Conséquences

Il en résulte plusieurs conséquences :

- le **vecteur densité de courant est à flux conservatif**, comme en statique, vu que $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ donc $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ car $\operatorname{div}(\operatorname{rot}) = 0$. Par conséquent l'intensité uniforme en tout point d'une branche de circuit, et la loi des nœuds reste valide.
- le champ magnétique dans l'ARQS magnétique a la même expression qu'en régime stationnaire, à condition de remplacer $I(M)$ ou $\vec{j}(M)$ en $I(M, t)$ ou $\vec{j}(M, t)$. D'ailleurs, l'équation de Maxwell-Ampère étant identique au cas statique, le **théorème d'Ampère reste donc valable**.

En pratique, c'est dans l'ARQS magnétique que l'on se place pour étudier l'ensemble des phénomènes d'induction (couplage entre bobines, transformateur, moteurs, freinage ou chauffage par induction, etc.). En effet, l'équation de Maxwell-Faraday reste inchangée au cas général, donc la loi de Faraday est valable :

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} \quad (5.9)$$

Notons que le champ magnétique « inducteur » étant à l'origine d'un champ électrique induit, dans le cadre d'un conducteur ce dernier est donc source d'un courant induit, lui-même source d'un champ magnétique induit. Selon les cas, on pourra ou non négliger son influence par rapport au champ magnétique inducteur.

II. Courants de Foucault

II.1 Observations expérimentales et définition



Manipulation

Expérience de l'anneau de fusion, freinage des oscillations d'un pendule pesant (https://www.youtube.com/watch?v=9_rbI-5RnnU), aimant qui chute dans des tubes de cuivre et PVC.

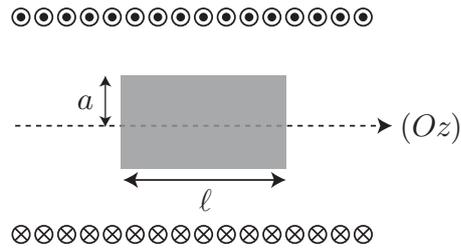
* On met en évidence ici l'apparition de courants induits, dont le but est dans le premier cas de chauffer le matériau par effet Joule dans un conducteur ; et dans les deux cas suivants de s'opposer à un mouvement (freinage), en lien avec la loi de Lenz (le mouvement étant à l'origine d'un phénomène d'induction). Dans tous les cas, cela s'explique par la présence d'un courant.

Définition : courant de Foucault

Les courants de Foucault sont des courants volumiques induits dans des matériaux non filiformes plongés dans des champs magnétiques.

II.2 Évaluation des courants de Foucault dans un conducteur cylindrique

Considérons un conducteur cylindrique massif de longueur ℓ , rayon a et de conductivité γ , qui évolue dans le cadre de l'ARQS magnétique. Il est plongé dans un champ magnétique uniforme sinusoïdal, parallèle à son axe (Oz) produit par un solénoïde de rayon R_1 , longueur $L \gg R_1$ pour négliger les effets de bords, alimenté par un courant d'intensité $I = I_m \cos(\omega t)$, et de densité linéique de spires n :



$$\vec{B} = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z \quad (5.10)$$

avec $B_m = \mu_0 n I_m$.

Le conducteur est alors le siège de courants induits que l'on va quantifier en déterminant le champ électrique dans le matériau, vu que $\vec{j}_i = \gamma \vec{E}$.

Étudions d'abord les symétries : les symétries du courant inducteur du solénoïde se retrouvent dans celles des champs. Comme le plan passant par M et \vec{e}_z est un plan d'antisymétrie pour les courants, le champ électrique lui est donc orthogonal : en se plaçant en coordonnées cylindriques, on écrit donc $\vec{E} = E(M, t) \vec{e}_\theta$. Du fait de l'invariance par rotation d'angle θ et translation d'axe (Oz) (en négligeant les effets de bords), on a donc :

$$\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta \quad (5.11)$$

* Utilisons la loi de Faraday sur un contour circulaire de rayon r , dont le centre passe par l'axe (Oz), orienté de sorte que \vec{S} soit orienté selon $+\vec{e}_z$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \iff 2\pi r E(r, t) = - \frac{d}{dt} (B_m \cos(\omega t) \pi r^2) \quad (5.12)$$

d'où :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} B_m \omega r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta \quad (5.13)$$

Le vecteur densité volumique de courant induit s'écrit :

$$\vec{j}_i = \frac{1}{2} \gamma B_m \omega r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta \quad (5.14)$$

II.3 Dissipation d'énergie

On vient de montrer que la pièce métallique soumise à un champ magnétique variable est siège de courants orthoradiaux, correspondant à la géométrie des courants de Foucault. Elle reçoit donc de l'énergie électromagnétique, de puissance volumique :

$$p = \vec{j}_i \cdot \vec{E} = \frac{1}{4} \gamma B_m^2 \omega^2 r^2 \sin^2(\omega t) \quad (5.15)$$

de valeur moyenne temporelle :

$$p_{\text{moy}} = \langle p(r, t) \rangle = \frac{1}{8} \gamma B_m^2 \omega^2 r^2 \quad (5.16)$$

* On peut alors estimer la puissance moyenne dissipée dans tout le cylindre par intégration :

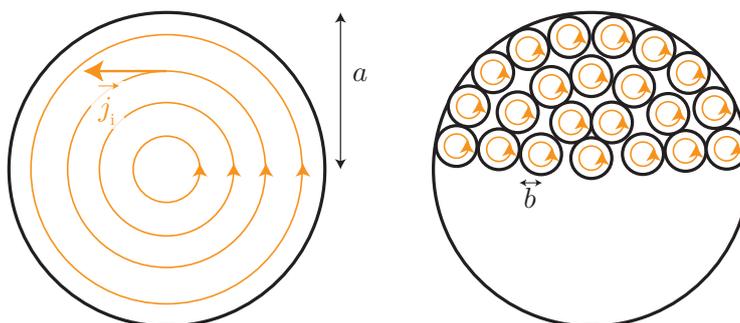
$$P_{\text{moy}} = \iiint_{(V)} p_{\text{moy}} d\tau = 2\pi \ell \frac{1}{8} \gamma B_m^2 \omega^2 \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi \gamma \omega^2 B_m^2 \ell a^4}{16} \quad (5.17)$$

Cette puissance reçue est évidemment dissipée par effet Joule, ce qui explique l'expérience introductive, et le principe général des plaques ou fours à induction.

Notons que l'on pourrait penser utiliser une fréquence très grande, tout en diminuant l'intensité du champ magnétique, de sorte à diminuer la consommation énergétique au niveau de l'inducteur. Néanmoins un effet non inclus dans cette modélisation, **l'effet de peau**, démontre que le champ électrique n'est présent dans un conducteur que sur une certaine épaisseur $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, ce qui astreint à haute fréquence le passage du courant sur une zone réduite du matériau et une diminution des pertes par effet Joule. Il y a donc une pulsation qui maximise la puissance dissipée.

II.4 Influence du feuilletage

Dans certains cas, les pertes liées aux courants de Foucault ne sont pas souhaitables, on cherche donc à les diminuer. Une première approche pourrait consister à diviser le cylindre par N petits cylindres de rayon b .



En ordre de grandeur :

$$N \simeq \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2} \quad (5.18)$$

est le nombre de cylindres nécessaires, en négligeant les interstices. La puissance dissipée dans les N cylindres vaut alors, en notant $K = \frac{\pi \gamma \omega^2 B_{\text{moy}}^2 \ell}{16}$:

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = NKb^4 = NK \frac{b^4}{a^4} \times a^4 = \frac{Ka^4}{N} = \frac{\mathcal{P}_{\text{moy}}}{N} \quad (5.19)$$

C'est-à-dire qu'on réduit d'un facteur N la puissance perdue.

Dans les faits, on procède au feuilletage du matériau, en le découpant de sorte à réduire la taille des lignes de courants. Nous retrouverons ces phénomènes lors de l'étude des transformateurs et moteurs.

II.5 Champ magnétique créé par les courants induits

Pour terminer, discutons de l'influence des courants induits : ces derniers sont à l'origine d'un champ magnétique induit. On peut chercher, en ordre de grandeur, à quelle condition on peut le négliger devant le champ magnétique inducteur.

Le champ magnétique induit \vec{B}_i est lié à l'équation de Maxwell-Ampère, soit en ordre de grandeur :

$$\text{rot } \vec{B}_i = \mu_0 \gamma \vec{E} \implies \frac{B_i}{a} \sim \mu_0 \gamma \omega a B \quad (5.20)$$

car d'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \frac{E}{a} \simeq \omega B \implies E \sim \omega \ell B \quad (5.21)$$

Le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique inducteur dès que :

$$\frac{B_i}{B} \ll 1 \iff \mu_0 \gamma \omega a^2 \ll 1 \iff a \ll \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad (5.22)$$

En notant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ l'épaisseur de peau du conducteur, on trouve donc en ordre de grandeur

$$\frac{B_i}{B} \ll 1 \implies a \ll \delta \quad (5.23)$$

c'est-à-dire que le champ électrique comme les courants se développent dans l'intégralité du matériau conducteur, et non à sa surface.

III. Phénomènes d'induction dans des circuits électriques filiformes

III.1 Auto-induction

a) Exemple du solénoïde

Considérons dans un premier temps un solénoïde d'axe (O, \vec{e}_x) alimenté par un générateur de tension. Dans le cas où cette tension est variable, un phénomène d'induction se produit, que l'on qualifie d'**auto-induction** ou **induction propre**.

Qualitativement, un champ magnétique $\vec{B} = \mu_0 ni(t)\vec{e}_x$ est créé et traverse chacune des spires constitutives du solénoïde. Il existe donc un flux variable au travers de ce circuit, donc une fém induite ; comme le circuit est fermé, on a alors un courant induit, et d'après la loi de Lenz, un champ magnétique est créé dans une direction qui va s'opposer aux variations de champ "propre" de la bobine. Ainsi le circuit agit sur lui-même.

Démonstration

On peut aller plus loin en calculant le flux de ce champ, appelé **flux propre** Φ_p car lié au champ créé par le circuit source du champ magnétique :

- en première approximation, comme le solénoïde est suffisamment long, on considère que le champ magnétique est constant y compris sur les bords ;
- on suppose aussi que le pas de l'hélice formant la bobine est suffisamment petit devant le rayon pour considérer le bobinage comme un ensemble de N spires accolées sur une distance ℓ (on parle de bobine à spires jointives).

Le flux dans une spire de la bobine vaut simplement :

$$\Phi_{\text{spire}} = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 n I S \quad (5.24)$$

où l'on a **orienté les spires dans le sens du passage du courant**. Puis en considérant que le flux est le même dans toutes les spires,

$$\Phi_p = N \Phi_{\text{spire}} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S I \quad (5.25)$$

Flux propre et inductance propre

Pour un circuit parcouru par un courant $i(t)$, le champ magnétique créé par le circuit étant proportionnel à i , il est à l'origine d'un flux dans le circuit pouvant se mettre sous la forme :

$$\Phi_p = L i(t) \quad (5.26)$$

où L est appelé **coefficient d'auto-induction**, ou **inductance propre** ou plus simplement **inductance**, noté L , et mesuré en henry. Il ne dépend que de la structure géométrique du circuit considéré et est toujours positif.

Dans le cas du solénoïde, par identification :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \quad (5.27)$$

Un odg pour $N = 1000$, $r = 5$ cm et $\ell = 20$ cm donne $L = 50$ mH, valeur typique au laboratoire.

L'utilisation de matériaux ferromagnétiques doux (fer) au sein de la bobine est intéressant car il permet de renforcer le champ magnétique traversant le circuit (on atteint le tesla), et donc augmenter le flux propre : on peut ainsi augmenter la valeur de L , ou réduire considérablement la taille de la bobine pour qu'il rentre dans un circuit électronique. Nous étudierons ces phénomènes au prochain chapitre.

b) Fém auto-induite et schéma électrique équivalent

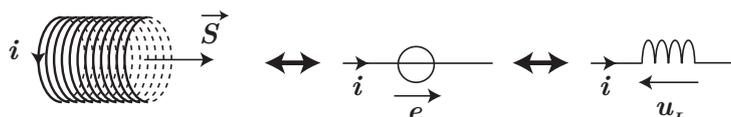
Si le courant circulant dans un circuit fixe est constant, aucun effet d'induction n'est perceptible : il faut que le flux soit variable, et donc que le courant soit variable. Apparaît alors une fém d'auto-induction

$$e = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

correspondant à une tension en convention générateur.

Il est aussi possible d'observer des effets d'auto-induction si la valeur de L varie au cours du temps : le circuit est alors déformable.

On peut faire le lien avec la loi de Lenz : si un générateur externe impose une augmentation du courant, la fém d'auto-induction est négative et s'oppose à l'augmentation du courant !



On peut alors remplacer dans le schéma électrique le bobinage par une inductance L de tension $u_L(t) = L\frac{di}{dt}$.

c) Superposition de l'auto-induction et d'un phénomène d'induction externe

Il est possible que plusieurs effets se combinent : d'une part un phénomène d'auto-induction dû au passage d'un courant dans un élément inductif, et d'autre part un champ magnétique "extérieur" qui vient se superposer au champ propre et engendre un flux supplémentaire. Ainsi il faudra distinguer la fém d'auto-induction de la fém due au champ extérieur : $e = -L\frac{di}{dt} + e_{\text{ext}}$. Cependant, dans la majorité des cas, le phénomène d'induction lié à un champ extérieur est le phénomène prépondérant, et l'on néglige l'inductance propre.

D'un point de vue pragmatique, si un exercice n'évoque pas la notion d'inductance propre, il est probable que l'auto-induction puisse être négligée, particulièrement dans le cas où le bobinage est très faible (quelques spires).

III.2 Induction mutuelle

L'induction propre est un phénomène que l'on exploite avec les bobines, par exemple dans les circuits électriques pour du filtrage ou encore pour produire des étincelles. Néanmoins un phénomène encore plus courant est celui de l'**induction mutuelle**, que l'on retrouve dans les antivols, les systèmes NFC des téléphones portables, etc.

a) Phénomène de couplage entre deux bobines

Considérons pour simplifier le cas deux circuits filiformes pouvant être parcourus par des courants. Outre le phénomène d'auto-induction, le champ créé par le premier circuit peut passer dans le deuxième et provoquer un phénomène d'induction, et vice-versa. On dit que les circuits sont couplés. Le flux dans le premier circuit se décompose alors en deux parties :

$$\Phi_1 = \Phi_{1,p} + \Phi_{2 \rightarrow 1} \quad (5.28)$$

où $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ est le flux du champ magnétique issu du deuxième circuit à travers le premier.

Inductance mutuelle

De la même manière que l'on a défini le coefficient d'auto-induction, le flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ du champ magnétique créé par le circuit 2 dans le circuit 1 est proportionnel au champ magnétique \vec{B}_2 , donc au courant traversé par le deuxième circuit. On appelle la constante de proportionnalité M , **coefficient d'inductance mutuelle**, dont le signe est quelconque (et dépend de l'orientation de chaque circuit), exprimé en henry :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2 \quad (5.29)$$

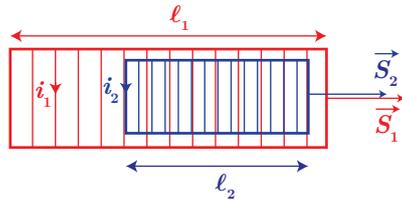
On peut montrer également que, de manière symétrique :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1 \quad (5.30)$$

avec le même coefficient de proportionnalité, ne dépendant que de la géométrie des deux circuits, et leurs positions respectives.

Démonstration

Prenons l'exemple de deux solénoïdes emboîtés, de section S_i et longueur ℓ_i , $i \in 1, 2$ avec $\ell_2 < \ell_1$.



Calculons le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$:

$$\Phi_{1 \rightarrow 2, \text{spire}} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = (\mu_0 N_1 / \ell_1 i_1) S_2 \quad (5.31)$$

puis avec les N_2 spires traversées par le champ magnétique \vec{B}_2 , il vient :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \Phi_{1 \rightarrow 2, \text{spire}} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{\ell_1} i_1 = M i_1 \quad (5.32)$$

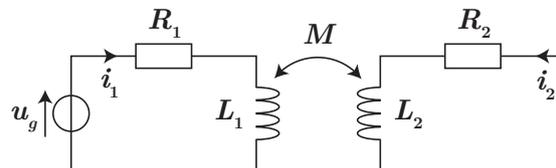
D'un point de vue pratique, il est parfois plus facile de calculer un des deux flux issus du couplage : on peut alors en déduire le coefficient de mutuelle inductance qui sera forcément le même pour l'autre flux.

Exercice

Refaites la même chose avec $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ afin de montrer que le coefficient M est identique.

Le calcul donne $\Phi_{2 \rightarrow 1} = \left(\frac{N_1}{\ell_1}\right) \ell_2 \times \mu_0 N_2 / \ell_2 i_2 S_2 = M i_2$ puisque le nombre de spires du circuit 1 traversé par le champ \vec{B}_2 est $\frac{N_1}{\ell_1} \ell_2$.

Dès que l'on a deux circuits électriques dont les éléments inductifs sont proches, il faut tenir compte de l'inductance mutuelle dans les équations électriques. On peut par exemple étudier le montage ci-dessous :



Pour la bobine 1, $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$ et pour la bobine 2 $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$ conduisant aux équations différentielles suivantes par l'application de la loi des mailles :

$$\begin{cases} u_g = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & (5.33) \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & (5.34) \end{cases}$$

que l'on peut très bien réécrire en régime sinusoïdal forcé si $u_g(t) = u_0 \cos \omega t$:

$$u_0 = \underline{i}_1 (R_1 + jL_1\omega) + jM\omega \underline{i}_2 \quad (5.35)$$

$$0 = \underline{i}_2 (R_2 + jL_2\omega) + jM\omega \underline{i}_1 \quad (5.36)$$

ainsi l'approche du circuit 2 par rapport au circuit 1 **modifie l'impédance branchée au générateur** car on peut alors écrire en combinant les deux équations

$$u_0 = \underline{i}_1 \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega}{R_2 + jL_2\omega} \right) \quad (5.37)$$

Cela permet concrètement la détection du circuit 2, non relié à un générateur, principe que l'on retrouve dans :

- la détection des voitures (la carrosserie jouant alors le rôle de circuit du fait de sa carcasse métallique) ;

- les détecteurs de vols (une étiquette avec un circuit en spirale sur l'objet, et les portiques jouent le rôle de circuit inducteur).

III.3 Énergie magnétique

a) Densité volumique d'énergie magnétique

On a déjà vu que l'énergie stockée dans une inductance s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L i^2 \quad (5.38)$$

Dans le cas particulier d'un solénoïde, on peut exprimer la densité volumique d'énergie magnétique associée :

$$* \quad e_m = \frac{\mathcal{E}_m}{S\ell} = \frac{\frac{1}{2} \mu_0 N^2 S i^2}{S\ell} = \boxed{\frac{B^2}{2\mu_0}} \quad (5.39)$$

car $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ Cette expression est en fait très générale et sera revue lors des bilans d'énergie pour les ondes électromagnétiques.

Notons que l'énergie magnétique peut s'exprimer en fonction du flux et de L :

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2} L \left(\frac{\Phi}{L} \right)^2 = \frac{\Phi(t)^2}{2L} \quad (5.40)$$

- * Comme l'énergie est une grandeur continue en physique, on en déduit que **le flux magnétique est une fonction continue du temps.**

b) Énergie magnétique lors d'un couplage par mutuelle

D'un point de vue strictement énergétique, comment doit-on prendre en compte le couplage par inductance mutuelle? En effet, on pourrait s'attendre à ce que l'énergie totale sous forme magnétique soit simplement

$$E_t = E_{L_1} + E_{L_2} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \quad (5.41)$$

mais ce n'est pas le cas. En reprenant l'exemple précédent des deux circuits électriques couplés par mutuelle, on va conduire un **bilan énergétique global en multipliant chaque loi des mailles par le courant le traversant** :

$$\begin{cases} u_g i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} & (5.42) \\ 0 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} & (5.43) \end{cases}$$

que l'on peut réécrire ainsi :

$$\begin{cases} P_{\text{fournie}} = P_{1,J} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} & (5.44) \\ 0 = P_{2,J} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_2 \frac{di_1}{dt} & (5.45) \end{cases}$$

Plusieurs termes sont limpides (effet Joule, puissance fournie au générateur, puissance au niveau des inductances), mais les deux termes liés à la mutuelle ne sont pas clairs. Sommons les deux équations :

$$P_{\text{fournie}} = P_{1,J} + P_{2,J} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \quad (5.46)$$

où les derniers termes se réécrivent sous la forme $\frac{d(M i_1 i_2)}{dt}$. Ainsi le bilan de puissance devient plus clair :

$$P_{\text{fournie}} = P_{1,J} + P_{2,J} + \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \quad (5.47)$$

où

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2} \quad (5.48)$$

est l'énergie magnétique stockée dans les deux bobines, en tenant compte du fait qu'il y a de l'énergie magnétique liée au couplage par mutuelle, *via* le terme Mi_1i_2 .

Comme l'énergie magnétique est positive quels que soient les courants (et le signe de M n'y change rien), il vient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}i_2^2 \left(L_1 \frac{i_1^2}{i_2^2} + 2M \frac{i_1}{i_2} + L_2 \right) \geq 0 \quad (5.49)$$

En posant $x = \frac{i_1}{i_2}$, il faut donc que le polynôme en x $L_1x^2 + 2Mx + L_2$ n'ait aucune racine réelle (sinon changement de signe). Donc le discriminant doit être négatif :

*

$$\Delta = M^2 - L_1L_2 \leq 0 \iff |M| \leq \sqrt{L_1L_2} \quad (5.50)$$

- Le cas $M = 0$ correspond aux circuits non couplés ;
- le cas $|M| = \sqrt{L_1L_2}$ correspond aux circuits **parfaitement couplés**, pour lesquels toutes les lignes de champ magnétique d'un des circuits traversent l'autre circuit et réciproquement ;
- entre ces deux valeurs limites, les circuits sont **partiellement couplés**.

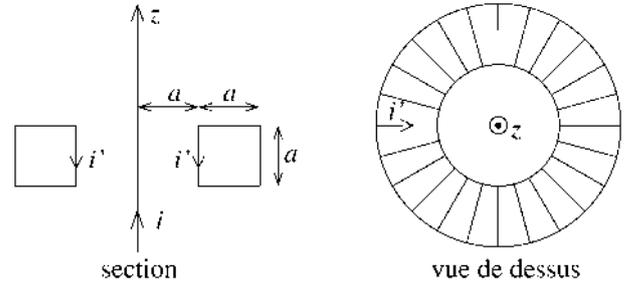
Exercices

5.1 Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est un appareil permettant de mesurer des intensités.

Elle est constituée par un tore de section carrée de côté $a = 5 \text{ cm}$, d'axe (Oz) sur lequel on a bobiné régulièrement un grand nombre $N = 10^4$ de spires carrées de côté a en série. Ceci forme un circuit de résistance $R = 0,2 \Omega$, fermé sur un ampèremètre de résistance $r' = 0,3 \Omega$.

Le tore encercle un fil infini confondu avec l'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I \cos \omega t$ de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$. C'est I qu'on souhaite mesurer.



- En régime permanent, le circuit de la pince ampèremétrique est parcouru par un courant $i' = I' \cos(\omega t + \varphi)$. Expliquer l'existence de ce courant.
- Soit \vec{B} le champ magnétique total, créé par le fil et la pince.
 - Justifier que $\vec{B} = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$.
 - En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer $B_\theta(r, z)$ en un point M situé dans la section d'une spire carrée du tore.
 - En déduire le flux magnétique total ϕ à travers les N spires.
- Montrer qu'on a $\frac{I'}{I} = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{2\pi(r'+R)}{N\mu_0\omega a \ln 2}\right)^2}}$. En utilisant les valeurs numériques, justifier la simplification $\frac{I'}{I} \simeq \frac{1}{N}$.
- En quoi cet appareil permet-il de mesurer I ? Quels avantages et inconvénients voyez-vous par rapport à l'utilisation directe d'un ampèremètre?

-
- Le fil étant parcouru par un courant d'intensité variable, il génère un champ magnétique variable orthoradial. Son flux à travers le tore est donc variable, ce qui crée bien dans un circuit fermé un courant électrique, de même fréquence que le courant i .
 - Invariance par rotation d'angle θ , mais pas par translation selon (Oz) si on tient compte du champ créé par la pince également. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant, donc $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$.
 - Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle de rayon r , d'axe (Oz) , d'altitude telle que le cercle soit contenu dans le tore :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B(r, z) = \mu_0(i - Ni') \iff B(r, z) = \frac{\mu_0(i - Ni')}{2\pi r} \quad (5.51)$$

- Le flux magnétique total à travers les N spires vaut :

$$\phi = N \iint_{(S)} B(r, z) dr dz = Na \frac{\mu_0(i - Ni')}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Na(i - Ni')}{2\pi} \ln(2) \quad (5.52)$$

- Appliquons la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 Na}{2\pi} \ln(2) \frac{d}{dt}(i - Ni') \quad (5.53)$$

Dans le tore, la loi des mailles s'écrit alors :

$$e = (r' + R)i' \implies \underline{e} = -\frac{\mu_0 Na}{2\pi} \ln(2) j\omega(\underline{i} - N\underline{i}') = (r' + R)\underline{i}' \quad (5.54)$$

soit en regroupant les termes :

$$\left(N + j \frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 Na \omega \ln(2)}\right) \underline{i}' = \underline{i} \quad (5.55)$$

soit en module :

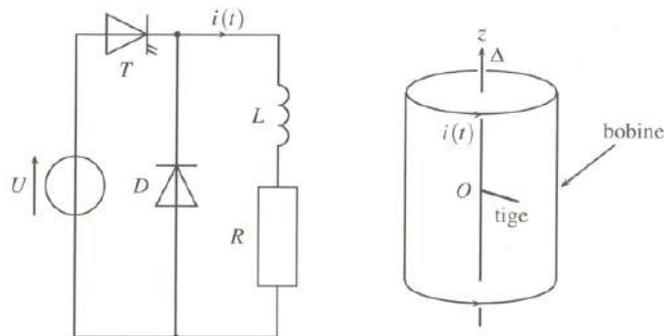
$$\frac{I'}{I} = \left| \frac{1}{N + j \frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 Na \omega \ln(2)}} \right| = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 Na \omega \ln(2)}\right)^2}} \quad (5.56)$$

Comme $\frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 N a \omega \ln(2)} = 23 \ll N$, on a bien $\frac{I'}{I} \simeq \frac{1}{N}$.

4. L'ampèremètre branché à la pince permet donc de mesurer l'intensité efficace de $i'(t)$, elle-même reliée à I . Ce dispositif est donc efficace lorsqu'il est nécessaire de mesurer des intensités importantes, du fait du facteur d'atténuation de $N = 10^4$. Ainsi, dans les avantages : mesure sans contact électrique, pour des intensités élevées. Inconvénients : le résultat dépend de la fréquence, on ne peut pas mesurer l'intensité d'un courant continu, peu précis si I est petit (typiquement, si la résolution de l'ampèremètre est r , il faut que $I > Nr$).

5.2 Mise en rotation d'une tige

Considérons le circuit ci-dessous, où $U > 0$ est une tension constante. Pour $t < 0$, l'interrupteur T est fermé et l'interrupteur D est ouvert. À la date $t = 0$ on ouvre T et on ferme D . La bobine a un rayon a , une longueur ℓ , comporte n spires par unité de longueur. Sa résistance électrique est R . La bobine a un axe vertical Δ . On attache au centre de la bobine et perpendiculairement à l'axe (Oz) une tige homogène de moment d'inertie J , de longueur b . La tige peut pivoter sans frottement orthogonalement à (Oz). Elle est isolante et porte une charge de densité linéique λ positive et uniforme.



- Établir l'expression de l'intensité du courant dans la bobine pour $t < 0$ puis $t > 0$.
- Établir l'expression du champ électrique dans le solénoïde.
- Calculer la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la tige considérant qu'elle est immobile à $t = 0$.

1. Pour $t < 0$, l'intensité du courant dans la bobine est $I_0 = \frac{U}{R}$ par une loi des mailles. Pour $t > 0$, on déconnecte le générateur, donc l'énergie stockée dans la bobine est libérée et l'intensité diminue selon :

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (5.57)$$

car i vérifie $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$.

2. La bobine crée un champ magnétique $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$, variable, à l'origine d'un champ électrique. On néglige ici la contribution de la tige. Du fait de la distribution des courants, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie, le champ électrique lui est orthogonal, donc $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta$ (invariance par rotation d'angle θ et translation d'axe (Oz)). En écrivant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \iff \frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} \vec{e}_z = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = \quad (5.58)$$

donc

$$rE(r, t) = -\mu_0 n \frac{r^2}{2} \frac{di}{dt} \implies \vec{E} = -\mu_0 n \frac{r}{2} \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta \quad (5.59)$$

3. On peut maintenant s'intéresser au mouvement de la tige. Qualitativement, le champ électrique orthoradial exerce une force de Lorentz sur les charges qui composent la tige, elle peut donc se mettre à tourner.

- Pour une portion dr de tige située à une distance r de l'axe (Δ), la force associée est $\delta \vec{F} = \lambda dr \vec{E}$;
- cette force élémentaire est associée à un moment élémentaire (bras de levier r) :

$$\delta \mathcal{M}_\Delta = (\lambda E(r, t) dr) r \quad (5.60)$$

- donc le moment résultant est :

$$\mathcal{M}_\Delta = -\mu_0 n \lambda \frac{di}{dt} \int_0^b \frac{r^2}{2} dr = -\frac{\mu_0 n \lambda b^3}{6} \frac{di}{dt} \quad (5.61)$$

En appliquant la loi du moment cinétique scalaire à la tige, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta = -\frac{\mu_0 n \lambda b^3}{6} \frac{di}{dt} \quad (5.62)$$

dont l'intégration conduit, avec $\omega(t=0) = 0$:

$$\omega(t) = \frac{\mu_0 n \lambda b^3}{6J} (i(0) - i(t)) = \frac{\mu_0 n \lambda b^3 U}{6JR} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (5.63)$$

5.3 Étude d'une table à induction

Le chauffage du fond métallique (plaque circulaire) des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen des courants de Foucault induits par un champ magnétique variable. Logé dans une table en céramique, un bobinage inducteur alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire. Dans le domaine de la cuisson, il s'agit de créer une forte dissipation par effet Joule dans le fond des récipients tout en limitant au plus bas l'échauffement de l'inducteur. Pour atteindre cet objectif, il faut faire un choix judicieux quant au métal à chauffer. Nous allons comparer les propriétés d'un fond en acier amagnétique à celui d'un fond en acier magnétique.

1. L'inducteur est un bobinage de 20 spires dont la résistance totale est $R_1 = 1,80 \cdot 10^{-2} \Omega$. Pour mesurer son inductance propre L_1 on l'alimente sans poser le récipient de cuisson, sous une tension efficace de 24 V à la fréquence de 25 kHz. On mesure alors un courant efficace de 5,1 A. Exprimer L_1 en fonction des données et exprimer sa valeur numérique.
2. L'induit, c'est-à-dire la plaque circulaire constituant le fond métallique du récipient de cuisson, a un rayon de 10 cm et une épaisseur de 1 cm. Lorsqu'elle est en acier magnétique, sa résistance est $R_2 = 8,26 \cdot 10^{-2} \Omega$ et son inductance propre est $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$. Montrer que l'on pourra négliger R_2^2 devant $(L_2\omega)^2$ avec une erreur inférieure à 5%.
3. L'inducteur est alimenté sous une tension $v_1(t)$. Sachant que l'ensemble inducteur-induit se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle inductance M :
 - (a) Écrire sans approximation les équations temporelles de couplage entre le courant $i_1(t)$ circulant dans l'inducteur et $i_2(t)$ circulant dans la plaque.
 - (b) En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{I_2}{I_1}$.
 - (c) En déduire l'expression littérale de l'impédance complexe $\underline{Z} = \frac{V_1}{I_1}$ associée à l'inducteur.
 - (d) Simplifier les expressions ci-dessus puis effectuer le calcul numérique de leurs modules, sachant que la mutuelle est estimée à $2 \mu\text{H}$.
4. Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 W. Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur? En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, de l'intensité du courant dans la plaque et de la puissance de chauffe développée dans celle-ci.

1. On considère un circuit RL série en régime sinusoïdal forcé, dont la loi des mailles permet d'écrire :

$$e(t) = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \xrightarrow{c} \underline{e} = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i} \quad (5.64)$$

Ainsi l'amplitude du courant vérifie :

$$I = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}} = I_{\text{eff}}\sqrt{2} \iff L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E^2}{2I_{\text{eff}}^2} - R_1^2} = 30 \mu\text{H} \quad (5.65)$$

2. $\frac{R_2^2}{L_2^2\omega^2} = 0,048$, soit moins de 5%.
3. (a) On a les deux équations (lois de mailles) pour l'inducteur et l'induit respectivement :

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (5.66)$$

(b) En passant en notations complexe :

$$V_1 = (R_1 + jL_1\omega)I_1 + jM\omega I_2 \quad \text{et} \quad 0 = (R_2 + jL_2\omega)I_2 + jM\omega I_1 \quad (5.67)$$

soit à l'aide de la deuxième équation

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \quad (5.68)$$

(c) On injecte cette équation dans la première loi des mailles pour aboutir à :

$$\underline{Z} = \frac{V_1}{I_1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega} \quad (5.69)$$

(d) En se servant de l'approximation de la question 2 :

$$\frac{I_{2,\text{eff}}}{I_{1,\text{eff}}} \simeq \frac{|M|}{L_2} \simeq 8,3 \quad (5.70)$$

puis, comme $L_1\omega \gg R_1$:

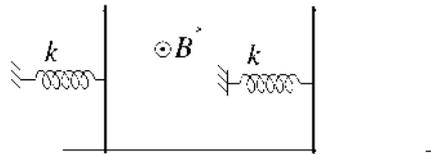
$$\underline{Z} \simeq j \left(L_1\omega - \frac{(M\omega)^2}{L_2\omega} \right) = jL_1\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2} \right) \quad (5.71)$$

donc $|\underline{Z}| \simeq L_1\omega \left| 1 - \frac{M^2}{L_1L_2} \right| = 2,1\Omega$.

4. Dans l'inducteur, la puissance dissipée provient simplement, en régime sinusoïdal forcé, de la partie résistive : $\langle P_{1,j} \rangle = \langle Ri_1^2(t) \rangle = RI_{1,\text{eff}}^2$ par définition de la valeur efficace. Ainsi $I_{1,\text{eff}} < \sqrt{P_{1,\text{max}}/R_1} = 53\text{ A}$. D'où les résultats suivants :

$$V_{1,\text{eff,max}} = |\underline{Z}| I_{1,\text{eff,max}} = 110\text{ V} \quad , \quad I_{2,\text{eff,max}} = 8,3I_{1,\text{eff,max}} = 439\text{ A} \quad \text{et} \quad \langle P_{2,j} \rangle = R_2 I_{2,\text{eff,max}}^2 = 1,6\text{ kW} \quad (5.72)$$

5. 4 Oscillateurs couplés



Deux barres conductrices horizontales identiques reposent sur des rails conducteur dirigés suivant (Ox) et distants de a . Les barres sont libres de se translater sans frottement dans la direction (Ox) . Elles sont reliées à des ressorts identiques dont l'autre extrémité est fixe, et sont distantes initialement de ℓ , à l'équilibre.

Le tout est plongé dans un champ magnétique \vec{B} . On écarte la barre gauche de x_0 depuis sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. On supposera la résistance totale du circuit R constante et on négligera l'auto-induction.

1. Étudier les mouvement des deux barres dans le cas où la raideur des ressorts est grande (on précisera ce que cela signifie).
2. Conduire un bilan énergétique.

1. Déterminons l'expression de l'intensité du courant circulant dans le circuit du fait du phénomène d'induction (la taille du circuit varie).

- En notant x_1 et x_2 la position des deux barres par rapport à leur position d'équilibre, le flux du champ magnétique vaut, en orientant le circuit dans le sens trigonométrique :

$$\Phi = Ba(x_2 - x_1 + \ell) \quad (5.73)$$

- la fém d'induction vaut d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = Ba(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (5.74)$$

- la loi des mailles permet enfin d'écrire $e = Ri$, donc l'intensité du courant vaut

$$i(t) = \frac{Ba}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (5.75)$$

D'un point de vue mécanique, on peut appliquer la loi de la quantité de mouvement à chaque barre, de masse identique, que l'on projette selon l'axe horizontal :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - \ell_0) - iaB = -kx_1 - \frac{B^2a^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - \ell_0) + iaB = -kx_2 + \frac{B^2a^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases} \quad (5.76)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - \ell_0) - iaB = -kx_1 - \frac{B^2a^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - \ell_0) + iaB = -kx_2 + \frac{B^2a^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases} \quad (5.77)$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles couplées. On peut vérifier les signes facilement : les équations différentielles doivent décrire des systèmes stables si on fixe $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. On les réécrit en introduisant $\omega_0^2 = k/m$ et $\alpha = \frac{B^2 a^2}{mR}$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases} \quad (5.78)$$

$$\quad (5.79)$$

On constate que la somme des deux équations conduit à quelque chose de simple à résoudre :

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0 \quad (5.80)$$

soit en posant $x_+ = x_1 + x_2$:

$$x_+(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (5.81)$$

L'intuition nous pousse à écrire la différence des deux équations différentielles couplées, soit en posant $x_- = x_2 - x_1$:

$$\ddot{x}_- + 2\alpha\dot{x}_- + \omega_0^2 x_- = 0 \quad (5.82)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti, dont la résolution est simplifiée si $Q \gg 1$, c'est-à-dire en identifiant $\frac{\omega_0}{Q} = 2\alpha$:

$$\frac{\omega_0}{2\alpha} \gg 1 \iff k \gg 4m\alpha^2 = \frac{4(Ba)^4}{mR^2} \quad (5.83)$$

Dans ce cas, la solution s'écrit :

$$x_-(t) \simeq e^{-\alpha t} (C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)) \quad (5.84)$$

car la pseudo-pulsation se confond avec la pulsation propre si $Q \gg 1$.

On détermine enfin les constantes d'intégration avec les conditions initiales :

$$x_1(0) = x_0 \quad \text{et} \quad x_2(0) = 0 \quad \implies A = x_0 \quad \text{et} \quad C = -x_0 \quad (5.85)$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad \implies B\omega_0 = 0 \quad \text{et} \quad -\alpha C + D\omega_0 = 0 \quad (5.86)$$

d'où $B = 0$ et $D = \frac{-\alpha x_0}{\omega_0} \ll C$ si $Q \gg 1$. Ainsi les solutions simplifiées s'écrivent :

$$x_+(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad x_-(t) \simeq -x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) \quad (5.87)$$

On revient alors aux positions de chaque barre :

$$x_1(t) = \frac{x_+ - x_-}{2} \simeq \frac{x_0}{2} \cos(\omega_0 t) (1 + e^{-\alpha t}) \quad \text{et} \quad x_2(t) \simeq \frac{x_0}{2} \cos(\omega_0 t) (1 - e^{-\alpha t}) \quad (5.88)$$

2. Pour conduire un bilan énergétique, on multiplie par i l'équation électrique, et par \dot{x}_i chaque équation mécanique :

$$\begin{cases} ei = Ri^2 \iff P_{\text{fem}} = P_{\text{joule}} & (P1) \\ m\dot{x}_1\ddot{x}_1 = -k\dot{x}_1x_1 - iaB\dot{x}_1 \iff \frac{dE_{c,1}}{dt} = -\frac{dE_{p,1}}{dt} + P_{L,1} & (P2) \\ m\dot{x}_2\ddot{x}_2 = -k\dot{x}_2x_2 + iaB\dot{x}_2 \iff \frac{dE_{c,2}}{dt} = -\frac{dE_{p,2}}{dt} + P_{L,2} & (P3) \end{cases} \quad (5.89)$$

où on introduit les énergies cinétiques $E_{c,i} = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2$, potentielles $E_{p,i} = \frac{1}{2}kx_i^2$ et on fait apparaître la puissance des forces de Laplace. L'équation (P1) s'interprète par le fait que la puissance fournie par le fém induite est intégralement dissipée par effet Joule. En effectuant la somme des équations (P1), (P2) et (P3), en posant $E_m = E_{c,1} + E_{c,2} + E_{p,1} + E_{p,2}$:

$$\frac{dE_m}{dt} + P_{\text{joule}} = P_{\text{fem}} + P_{L,1} + P_{L,2} = 0 \quad (5.90)$$

car $P_{\text{fem}} = \frac{(Ba)^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 = -P_{L,1} - P_{L,2}$ (couplage électromécanique parfait).

On peut calculer finalement l'énergie dissipée par effet Joule durant tout le mouvement :

$$E_{\text{joule}} = E_m(0) - E_m(+\infty) = \frac{1}{2}kx_0^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}k \left(\frac{x_0}{2} \right)^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \left(\frac{x_0}{2} \right)^2 \sin^2(\omega_0 t) \right) = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{4}kx_0^2 = \frac{1}{4}kx_0^2 \quad (5.91)$$

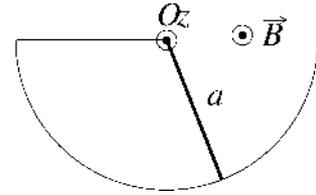
car $m\omega_0^2 = k$.

5.5 Pendule magnétique

Une barre conductrice de longueur a , de masse m , de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}ma^2$ par rapport à (Oz) , de résistance R peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal Oz .

La barre glisse sans frottement sur un support conducteur circulaire de résistance négligeable. On ferme le circuit entre le support et O . Le système est placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ uniforme et permanent.

La tige est écartée d'un angle θ_0 de sa position d'équilibre et abandonnée sans vitesse initiale.



1. Décrire qualitativement les phénomènes qui se produisent.
2. Calculer la force électromotrice induite dans la barre et en déduire l'équation électrique du circuit.
3. Établir l'équation du mouvement de la barre.
4. Dans le cas où $\theta_0 \ll 1$, déterminer la valeur minimale du champ magnétique pour que la barre n'oscille pas.

1. Du fait du mouvement de la barre (moment du poids), le flux du champ magnétique à travers la surface fermée varie temporellement, ce qui crée une fém induite et donc un courant dans le circuit fermé. Un moment de Laplace s'exerce donc sur la tige, qui va s'opposer au moment du poids, à l'origine du phénomène d'induction. La tige va être freinée.

2. Le flux vaut $\Phi = B \times \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} + \theta$ car l'aire d'une portion de disque d'angle α vaut $\frac{\alpha}{2}a^2$. Ainsi la fém $e = Ri$ (équation électrique) vaut d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Ba^2}{2}\dot{\theta} = Ri \quad (5.92)$$

3. On va appliquer la loi du moment cinétique scalaire à la tige, par rapport à l'axe (Oz) , dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$J\ddot{\theta} = -\frac{mga}{2}\sin\theta + \int_0^a (idrB) \times r = -\frac{mga}{2}\sin\theta - \frac{B^2a^4}{4R}\dot{\theta} \quad (5.93)$$

où le moment de Laplace correspond bien à un moment de freinage. En divisant par $J = \frac{1}{3}ma^2$ et en réarrangeant les termes :

$$\ddot{\theta} + \frac{3(Ba)^2}{4mR}\dot{\theta} + \frac{3g}{2a}\sin\theta = 0 \quad (5.94)$$

Cela correspond à l'équation d'un pendule (caractérisé par la présence de $\sin\theta$) amorti par frottements fluides.

4. Dans le cas où l'angle initial est petit, on peut faire l'hypothèse que $\sin\theta \simeq \theta$. On aboutit donc à une équation d'oscillateur amorti de forme canonique :

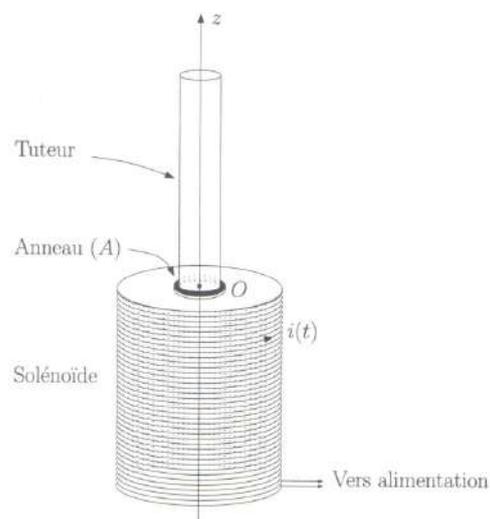
$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{4mR}{3(Ba)^2} \sqrt{\frac{3g}{2a}} \quad (5.95)$$

La barre ne va pas osciller si le régime de l'oscillateur est apériodique. Il faut donc :

$$Q < \frac{1}{2} \iff \dots \iff B > \left(\frac{32g(mR)^2}{3a^5} \right)^{1/4} \quad (5.96)$$

5.6 Expérience d'Elihu Thomson

L'expérience d'Elihu Thomson est une expérience spectaculaire illustrant la loi de Faraday (<https://www.youtube.com/watch?v=PL7KyVIJ1iE>). Le dispositif, représenté ci-contre, peut être réalisé soit avec une alimentation continue soit avec une alimentation alternative. Dans le cas d'une alimentation continue, le protocole est le suivant : on place l'anneau métallique (A) sur l'axe du solénoïde alimenté en courant continu puis, à l'aide d'un interrupteur adapté, on inverse rapidement le sens du courant. On constate alors que l'anneau est projeté vers le haut puis redescend. Dans le cas d'une alimentation alternative, l'anneau est également projeté vers le haut, mais on constate que la lévitation de l'anneau est possible.



On donne l'expression approchée du champ magnétique \vec{B} , créé par le solénoïde au niveau de l'anneau (A), situé à l'altitude z :

$$\vec{B} = B_z(z, t)\vec{e}_z + B_r(r, z, t)\vec{e}_r, \text{ où :} \quad (5.97)$$

- B_z est de la forme $B_z(z, t) = \mu_0 k(z) i(t)$ (avec k une fonction à valeurs positives) ;
- $B_r(r, z, t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$ et $\frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu_0 k'(z) i(t)$ (avec k' une fonction à valeurs négatives).

On note a le rayon de l'anneau, R sa résistance et L son inductance propre.

1. En appliquant la loi de Faraday, établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i_a(t)$ induit dans l'anneau en fonction de $k(z)$ et $\frac{di}{dt}$.
2. Exprimer la force agissant sur l'anneau en fonction de $k'(z)$, $i(t)$ et $i_a(t)$.
3. Dans le cas d'une alimentation continue, justifier du mouvement de l'anneau. On pourra dans cette question négliger l'inductance propre de l'anneau. Pourquoi l'anneau ne peut-il pas léviter ?
4. (a) Dans le cas d'une alimentation alternative générant un courant de la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t)$, on admet que l'anneau est sensible uniquement à la valeur moyenne de la force qui s'exerce sur lui. Justifier du mouvement de l'anneau et notamment de la possibilité de le faire léviter.
 (b) L'expérience est réalisée avec un anneau de cuivre de masse $m = 0,87$ g, de résistance $R = 1 \cdot 10^{-4} \Omega$ et d'inductance propre $L = 1 \cdot 10^{-8}$ H. On souhaite faire léviter l'anneau à $h = 1$ cm du solénoïde. Sachant que $k(h) = 5 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$, $k'(h) = -9 \cdot 10^4 \text{ m}^{-2}$, $k''(h) > 0$ et qu'on travaille à $f = 1$ kHz, déterminer l'amplitude I_m de l'intensité du courant parcourant le solénoïde, pour que l'anneau lévite. Cet équilibre est-il stable ?
5. On constate expérimentalement que si quelques instants avant l'expérience, l'on plonge l'anneau métallique dans un bain d'azote liquide, il monte beaucoup plus haut. Justifier.

1. Le flux de B valant $\Phi = B_z(z, t)\pi a^2$, en orientant la spire de sorte que le vecteur surface soit selon \vec{e}_z . Alors l'application de la loi de Faraday conduit à :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di_a}{dt} + Ri_a = -\mu_0 k(z)\pi a^2 \frac{di}{dt} \quad (5.98)$$

2. La force élémentaire qui s'exerce sur un élément de longueur $d\vec{r} = a d\theta \vec{e}_\theta$ de l'anneau s'écrit :

$$\delta \vec{F} = i_a(t) d\vec{r} \wedge \vec{B} = i_a(t) a d\theta (B_z(z, t)\vec{e}_r - B_r(r = a, z, t)\vec{e}_z) \quad (5.99)$$

En sommant, seule la contribution selon \vec{e}_z est non nulle :

$$\vec{F} = -2\pi a i_a(t) B_r(r = a, z, t)\vec{e}_z = + \pi a^2 \mu_0 i_a(t) k'(z) i(t) \vec{e}_z \quad (5.100)$$

3. Il est fort probable que l'inductance propre de l'anneau soit négligeable, donc :

$$i_a(t) = -\frac{\mu_0 \pi a^2}{R} k(z) \frac{di}{dt} \quad (5.101)$$

donc la force de Laplace qui s'exerce sur l'anneau vaut :

$$\vec{F} = -\frac{(\mu_0 \pi a^2)^2}{R} k(z) k'(z) i \frac{di}{dt} \vec{e}_z \quad (5.102)$$

Ainsi, durant l'établissement du courant dans le solénoïde (qui n'est pas instantané par continuité du courant dans une bobine), $\frac{di}{dt} > 0$, et $k(z)k'(z) < 0$, donc la force est orientée selon $+\vec{e}_z$. Si elle compense le poids, l'anneau peut décoller.

Par contre il ne peut pas léviter, car en régime stationnaire, $\frac{di}{dt} = 0$.

4. (a) En écrivant $i_a(t) = I_a \cos(\omega t + \varphi)$, la force moyenne exercée sur l'anneau vaut :

$$\langle \vec{F} \rangle = \mu_0 \pi a^2 k'(z) \langle i_a(t) i(t) \rangle \vec{e}_z = \mu_0 \pi a^2 k'(z) I_a I_m \frac{\cos(\varphi)}{2} \vec{e}_z \quad (5.103)$$

comme en moyenne, $\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = 0$. Il est donc nécessaire de déterminer $I_a \cos \varphi$, en utilisant les complexes. L'équation électrique se réécrit :

$$-\mu_0 k(z) \pi a^2 j \omega i = (R + jL\omega) i_a \iff i_a = -\frac{\mu_0 k(z) \pi a^2 j \omega i}{R + jL\omega} \quad (5.104)$$

donc :

$$I_a \cos(\varphi) = \Re \left(-\frac{\mu_0 k(z) \pi a^2 j \omega}{R + j L \omega} I_m \right) = -\frac{\mu_0 k(z) \pi a^2 L \omega^2}{R^2 + (L \omega)^2} I_m \quad (5.105)$$

donc la force moyenne vaut :

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{(\mu_0 \pi a^2)^2 k(z) k'(z) L \omega^2}{2(R^2 + (L \omega)^2)} I_m^2 \vec{e}_z \quad (5.106)$$

On constate ici le rôle essentiel de l'inductance propre de l'anneau : sans elle, la force moyenne serait nulle ! La force moyenne est bien orientée vers le haut, ce qui explique la possibilité de le faire léviter si elle compense le poids.

(b) En renversant l'équation précédente, en prenant $\|\vec{F}\| = mg$ pour compenser le poids :

$$I_m = \frac{1}{\mu_0 \pi a^2} \sqrt{\frac{2mg(R^2 + (L \omega)^2)}{L \omega^2 k(h) |k'(h)|}} = 37 \text{ A} \quad (5.107)$$

Pour justifier de la stabilité, on peut soit :

- discuter qualitativement, en constatant que si $z > h$, la force de Laplace décroît en amplitude car $k''(h) > 0$ donc k' est une fonction croissante autour de h , mais négative donc décroît en valeur absolue ; $k'(h) < 0$ donc k est une fonction positive décroissante. Donc $\|\vec{F}(z > h)\| < \|\vec{F}(z = h)\|$ donc le poids ramène l'anneau vers le bas ;
- déterminer le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} + m\vec{g} = -\frac{dE_p}{dz} \vec{e}_z = -\left(mg + \frac{(\mu_0 \pi a^2)^2 k(z) k'(z) L \omega^2}{2(R^2 + (L \omega)^2)} I_m^2 \right) \vec{e}_z \quad (5.108)$$

donc

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dz^2} \right)_{z=h} > 0 \iff k'(h)^2 + k(h)k''(h) > 0 \quad (5.109)$$

ce qui est bien vérifié.

5. La diminution de température se traduit très certainement par une diminution de la résistance électrique (anneau en cuivre, un métal voit sa conductivité augmenter si la température diminue). En diminuant R , on augmente donc la force de Laplace !

Ferromagnétisme

Sommaire

6.1 Dipôles magnétiques	3
6.1.1 Moment magnétique	3
6.1.2 Champ créé par un aimant droit	3
6.1.3 Action d'un champ magnétique sur un moment magnétique	4
6.2 Milieux magnétiques dans l'ARQS	5
6.2.1 Description mésoscopique	5
6.2.2 Vecteur excitation magnétique et équations de Maxwell	5
6.2.3 Conséquences	6
6.2.4 Relations de passage entre deux milieux magnétiques	6
6.3 Milieux ferromagnétiques	6
6.3.1 Relation constitutive des milieux magnétiques linéaires homogènes et isotropes	6
6.3.2 Différents types de matériaux magnétiques	7
6.3.3 Étude des milieux ferromagnétiques	8
6.4 Circuits magnétiques	11
6.4.1 Influence de la perméabilité	11
6.4.2 Circuit magnétique fermé	11
6.4.3 Électroaimant	12
6.4.4 Bobine à noyau de fer	14

Questions de cours :

- Moment magnétique : intérêt d'introduire cette grandeur, allure des lignes de champ, action d'un champ extérieur sur un moment magnétique. Conséquences.
- Milieux magnétiques : aimantation, excitation magnétique. Réécrire les équations de Maxwell et interpréter.
- Relation constitutive des milieux magnétiques linéaires homogènes et isotropes (MLHI) ; présentation des trois principaux types de milieux magnétiques.
- Milieu ferromagnétique : courbe de première aimantation, cycle d'hystérésis, ordres de grandeur. Milieux doux / durs : exemples et applications.
- Électroaimant : principe, allure des lignes de champ, calcul du champ magnétique dans l'entrefer.
- Bobine à noyau : expression de l'inductance, énergie stockée dans le cas d'un MLHI et dans le cas général. Pertes.

Capacités exigibles du BO :

- À partir d'une formule fournie exprimant le champ d'un dipôle magnétique, décrire le champ créé par un aimant à grande distance et représenter qualitativement les lignes de champ magnétique.
- Utiliser les expressions fournies de l'énergie potentielle, de la résultante et du moment. Décrire qualitativement l'évolution d'un dipôle magnétique dans un champ extérieur.
- Citer l'ordre de grandeur du champ géomagnétique en France.
- Définir le champ d'aimantation d'un milieu magnétique.
- Associer à une distribution d'aimantation une densité de courants liés équivalente $\vec{j}_{\text{lié}} = \text{rot}(\vec{M})$ (relation admise).
- Définir l'excitation magnétique \vec{H} et écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique.
- En déduire qualitativement que les sources de \vec{H} sont les courants électriques libres, et que les sources de B sont les courants électriques libres et l'aimantation.
- Représenter l'allure des cycles d'hystérésis (H, M) et (H, B) d'un milieu ferromagnétique.
- Distinguer milieu dur et milieu doux, citer des exemples.
- Tracer le cycle d'hystérésis d'un milieu ferromagnétique.
- Modéliser un milieu doux par une relation constitutive linéaire. Définir la perméabilité relative et donner un ordre de grandeur.
- Décrire l'allure des lignes de champ dans un circuit magnétique sachant que les lignes de champs sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer.
- En appliquant le théorème d'Ampère et la conservation du flux magnétique, exprimer le champ magnétique produit dans l'entrefer d'un électroaimant.

- Établir l'expression de l'inductance propre de la bobine à noyau, vérifier l'expression de l'énergie magnétique
$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint \frac{1}{2\mu_0\mu_r} B^2 d\tau.$$
- Exprimer le lien entre l'aire du cycle hystérésis et la puissance moyenne absorbée. Décrire les différents termes de perte d'une bobine à noyau : pertes fer par courants de Foucault et par hystérésis, pertes cuivre.

Le magnétisme a été découvert par l'observation de pierres particulières, découvertes en Magnésie (Asie mineure), qui pouvaient attirer le fer. Il fallut attendre 1044, pour que les chinois découvrent l'utilisation de cette matière en compas magnétique, utilisé près de 50 ans plus tard pour la navigation. Des propriétés magnétiques sont perceptibles pour tout matériau, du fait des électrons qui se comportent de la même manière qu'un aimant : cependant elles sont généralement peu visibles excepté pour certains matériaux dits « ferromagnétiques ». Ces derniers, sous l'effet d'un champ magnétique externe, peuvent conduire à la création de sources de champs magnétiques plus intenses encore, utilisables dans les moteurs, les transformateurs, certains systèmes de levage, etc.

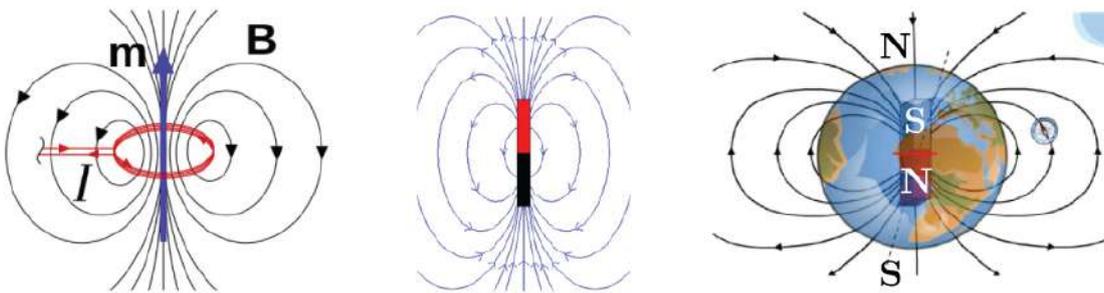
I. Dipôles magnétiques

I.1 Moment magnétique

En première année a été soulignée la grande similitude entre les cartes de champ d'un aimant droit, d'une spire parcourue par un courant constant, ou même d'une bobine. Afin de comparer ces différents systèmes, une grandeur physique a été introduite, le **moment magnétique**. En particulier pour une spire orientée parcourue par un courant d'intensité I et de vecteur surface \vec{S} (orienté par le sens du courant), le moment magnétique associé est :

$$\vec{M} = I\vec{S} \quad (6.1)$$

Il s'exprime en $A \cdot m^2$. Cette grandeur est étendue aux objets aimantés, bien qu'ils ne soient pas parcourus par des courants internes, et à toute distribution de courant d'extension finie. En effet, **à grande distance la structure géométrique du champ magnétique créé par une spire circulaire de moment \vec{M} est identique à celle de toute distribution de même moment magnétique.**



Dans la matière, les électrons « tournant » autour du noyau décrivent aussi des boucles de courant auquel correspond un moment magnétique. Dans les faits, d'après la mécanique quantique, ce moment magnétique \vec{M} est quantifié et vérifie :

$$\|\vec{M}\|^2 = \mu_B \ell(\ell + 1) \quad \text{et} \quad \vec{M} \cdot \vec{e}_z = -m_\ell \mu_B \quad (6.2)$$

avec $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \sim 10^{-23} A \cdot m^2$ le magnéton de Bohr, ℓ le nombre quantique secondaire et m_ℓ le nombre quantique magnétique de l'électron. L'électron possède de plus un moment magnétique intrinsèque (indépendant de son mouvement autour du noyau), le spin (quantifié par $m_s = \pm 1/2$). Le proton possède lui aussi un spin.

Quelques ordres de grandeur : atome $\sim \mu_B$; bobine de TP de 500 spires parcourue par 1 A : $1 A \cdot m^2$; aimant droit 1 à $10 A \cdot m^2$; dipôle terrestre $\sim 10^{23} A \cdot m^2$.

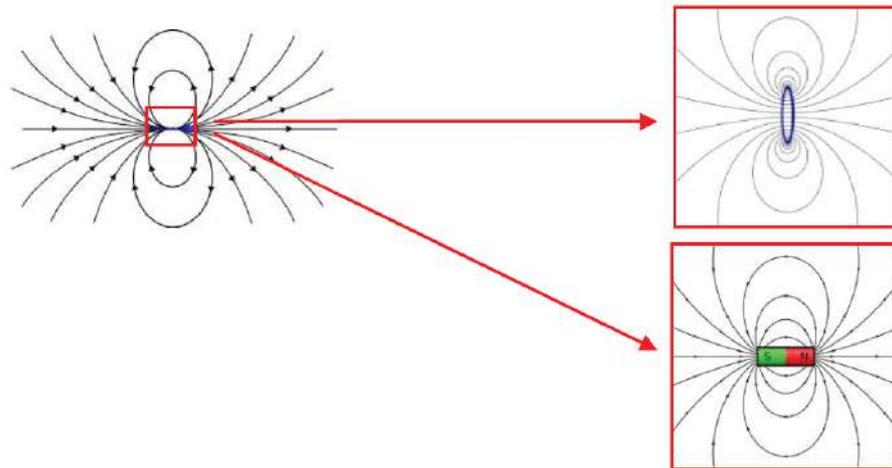
I.2 Champ créé par un aimant droit

Un dipôle magnétique $\vec{M} = M\vec{e}_z$ situé au centre O d'un repère sphérique crée un champ magnétique dans le vide, dont les composantes ont pour expression **à grande distance** du point O :

$$B_r = \frac{2\mu_0 M \cos \theta}{4\pi r^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^3} \quad \text{et} \quad B_\varphi = 0 \quad (6.3)$$

On constate que le champ magnétique décroît rapidement avec la distance (en $1/r^3$). Ces expressions ne reflètent pas la réalité du champ réel créé par une spire ou un aimant droit lorsqu'on s'en approche (divergence).

Pour la spire, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie pour les courants, donc $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan.



* Cette formule permet par exemple de calculer la norme du champ géomagnétique au centre de la France métropolitaine, où $r = 6370 \text{ km}$, $\theta = 42^\circ$. Le champ est créé dans le noyau ferreux de la Terre, et est assimilable en première approximation à celui créé par un dipôle magnétique **dirigé du pôle nord géographique vers le pôle sud** :

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} \simeq 5,1 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (6.4)$$

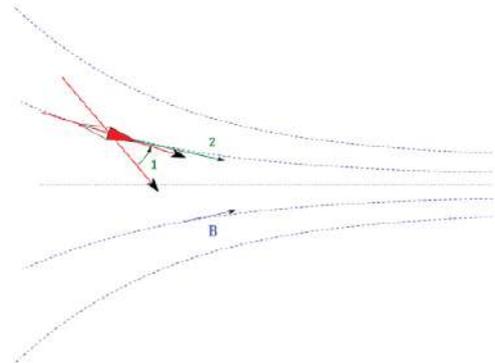
I.3 Action d'un champ magnétique sur un moment magnétique



On peut parfois lire à la place de « moment magnétique » un **dipôle magnétique**, voire un **spin** !

* Lorsqu'un moment magnétique est plongé dans un champ magnétique, il est soumis à :

- un effet de rotation tendant à aligner le moment magnétique selon la direction du champ magnétique ;
- un effet de translation vers les zones de fort champ magnétique.



On admet les résultats suivant :

Interaction entre un moment magnétique et un champ magnétique

* L'interaction entre un aimant de moment magnétique \vec{M} et un champ magnétique extérieur \vec{B}_{ext} est décrit par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$. Il en résulte les actions suivantes :

- une force exercée sur l'aimant $\vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}_{\text{ext}}$;
- un moment de force exercé sur l'aimant $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$.



Exercice

Justifier de deux manières qu'il existe une position d'équilibre stable pour un moment magnétique soumis à un champ magnétique externe uniforme.

D'après l'expression de l'énergie potentielle, en notant α l'angle orienté entre \vec{M} et \vec{B}_{ext} , $E_p = -\mathcal{M}B_{\text{ext}} \cos \alpha$, minimal pour $\alpha = 0$, ce qui correspond à la position d'équilibre stable : le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique extérieur. C'est également conforme avec l'expression du moment de force : $\Gamma = \mathcal{M}B_{\text{ext}} \sin \alpha \vec{e}_z$, en considérant que le moment magnétique peut tourner autour de l'axe (Oz) orthogonal au champ et au moment magnétique. Ainsi, si $\alpha > 0$, le moment de force fait tourner le moment magnétique dans le sens trigonométrique et le ramène vers $\alpha = 0$.

Si le champ magnétique est uniforme, la force exercée sur l'aimant est nulle. Dans le cas d'un champ magnétique non uniforme, on observe que la force tend à déplacer le moment magnétique vers les zones de champ magnétiques intenses. Pour l'illustrer, considérons le cas simplifié où le champ magnétique s'écrit $\vec{B}_{\text{ext}} = B(x)\vec{e}_x$ avec $B(x)$ une fonction croissante. La force a alors pour expression :

$$\vec{F} = \mathcal{M}_x \frac{dB}{dx} \vec{e}_x \quad (6.5)$$

Elle est bien orientée selon $+\vec{e}_x$, c'est-à-dire dans le sens où le champ magnétique est croissant.

Nous venons de décrire les actions qui s'exercent sur un moment magnétique, penchons-nous maintenant sur la matière aimantée qui compose les aimants usuels.

II. Milieux magnétiques dans l'ARQS

II.1 Description mésoscopique

Le phénomène fondamental intervenant dans les milieux magnétiques est celui d'**aimantation** : l'application sur un échantillon d'un champ extérieur aboutit à l'apparition à l'échelle mésoscopique de moments dipolaires magnétiques non nuls au sein de ces milieux, soit simplement par orientation de dipôles magnétiques déjà existants (orientés initialement de manière aléatoire), soit par création puis orientation de dipôles magnétiques microscopiques.

On définit l'aimantation d'un milieu comme étant la densité volumique de moment magnétique :

$$\vec{M}(P, t) = \frac{\delta \vec{\mathcal{M}}(P, t)}{d\tau} \quad (6.6)$$

* où $\delta \vec{\mathcal{M}}(P, t)$ est le moment magnétique que possède le volume élémentaire $d\tau$ entourant le point P . Elle s'exprime en $A \cdot m^{-1}$. L'aimantation du milieu crée un champ magnétique comme le ferait une densité de courant volumique dont l'expression est admise :

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \text{rot}(\vec{M}) \quad (6.7)$$

L'indiqué « lié » signifie que ces courants sont liés au matériau, c'est-à-dire que ce ne sont pas des vrais courants (dus à un mouvement de charges mobiles). Il s'agit là d'un artifice mathématique de sorte à conduire les mêmes méthodes que dans le cours de magnétostatique.

II.2 Vecteur excitation magnétique et équations de Maxwell

On se place dans l'ARQS magnétique, où l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}} + \mu_0 \vec{j}_{\text{lié}} \quad (6.8)$$

* en distinguant dans un milieu magnétique les courants liés $\vec{j}_{\text{lié}}$ des courants dits « libres », c'est-à-dire ceux issus du déplacement de porteurs de charge libres. En utilisant le vecteur aimantation :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}} + \mu_0 \text{rot} \vec{M} \iff \text{rot} \left(\frac{B}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_{\text{libre}} \quad (6.9)$$

Cela conduit à introduire un nouveau champ de vecteur :

Excitation magnétique

Dans les milieux magnétiques, le champ de vecteur $\vec{H} = \frac{B}{\mu_0} - \vec{M}$ appelé **excitation magnétique** vérifie l'équation :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{libre}} \quad (6.10)$$

Les autres équations de Maxwell sont inchangées :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (6.11)$$

L'approche développée historiquement par Ampère consistant à considérer des boucles de courant internes est fautive mais a permis de faire un parallèle avec la magnétostatique. Elle est remplacée par des considérations quantiques de spin des électrons.

II.3 Conséquences

Dans un milieu magnétique, d'après les équations de Maxwell qui précèdent :

- l'équation de Maxwell-Gauss est inchangée, mais est globalement sans intérêt car les matériaux sont globalement neutres (dans l'ARQS magnétique $\rho_c \ll \|\vec{j}\|$);
 - l'équation de Maxwell-Thomson conduit toujours au fait que le champ magnétique est à flux conservatif;
 - l'équation de Maxwell-Faraday permet de traiter les phénomènes d'induction comme dans les milieux non magnétiques à l'aide de la loi de Faraday;
- * finalement, seul change de forme le théorème d'Ampère :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{libre}} \iff \oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\text{libre, enlacé}} \quad (6.12)$$

avec $I_{\text{libre, enlacé}}$ l'intensité du courant libre enlacé par le contour d'Ampère (Γ).

Distinction entre \vec{B} et \vec{H}

L'intérêt de l'introduction de l'excitation \vec{H} réside dans le fait qu'elle est calculable simplement à partir de la connaissance de la distribution des courants libres (en général connue voire contrôlée par l'opérateur).

Retenons que :

- les sources du champ magnétique \vec{B} sont les courants libres et liés;
- les sources du champ d'excitation magnétique \vec{H} sont les courants libres uniquement.

II.4 Relations de passage entre deux milieux magnétiques

Soient deux milieux notés 1 et 2 séparés par une surface pouvant éventuellement présenter une répartition superficielle de courants \vec{j}_s (conçue comme un cas limite de répartition d'une densité volumique de courant). Dans le milieu 1, on a le couple de champs (\vec{B}_1, \vec{H}_1) et dans le milieu 2, on a le couple (\vec{B}_2, \vec{H}_2) . À partir de l'équation $\text{div}(\vec{B}) = 0$, on peut montrer que la composante normale du champ magnétique est continue :

$$\vec{B}_{1,n} = \vec{B}_{2,n} \quad (6.13)$$

Et à partir de l'équation de Maxwell-Ampère faisant intervenir \vec{H} , on observe une discontinuité de sa composante tangentielle :

$$\vec{H}_{t,2} - \vec{H}_{t,1} = \vec{j}_{\text{libre,s}} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (6.14)$$

avec $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ un vecteur unitaire normal à l'interface orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

III. Milieux ferromagnétiques

III.1 Relation constitutive des milieux magnétiques linéaires homogènes et isotropes

Bien que l'on ait l'impression que l'équation de Maxwell-Ampère soit simplifiée par l'introduction d'un nouveau vecteur \vec{H} , on n'a plus assez d'équations pour connaître l'ensemble des champs connaissant les sources extérieures. Dans certains cas, on peut expliciter le lien entre \vec{M} et \vec{H} sous la forme d'une relation constitutive :

Relation constitutive d'un MLHI

Pour un milieu magnétique appelé Milieu Linéaire (lien de proportionnalité) Homogène (indépendance de la position dans tout le matériau) et Isotrope (indépendance de la direction de \vec{H}) = MLHI, l'aimantation est proportionnelle à l'excitation magnétique :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (6.15)$$

* avec χ_m la **susceptibilité magnétique du matériau** (sans dimension). Cela conduit à :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6.16)$$

avec $\mu_r = 1 + \chi_m$ la **perméabilité relative du milieu** et $\mu = \mu_0 \mu_r$ la perméabilité du milieu.

Dans ce type de milieu, l'équation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS se réécrit :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu \vec{j} \quad (6.17)$$

Ainsi dans les MLHI, les résultats établis dans le vide sont utilisables à condition d'effectuer la substitution de μ_0 par μ .

III.2 Différents types de matériaux magnétiques

Manipulation

Vidéo expliquant les différentes familles de milieux magnétiques (avec exemples), et leur comportement dans un champ magnétique.

a) Milieux diamagnétiques

Tous les matériaux ont un comportement diamagnétique lié à l'induction. En imposant un champ magnétique dans un matériau, cela crée des boucles de courant lié (moment magnétique orbital des électrons) qui crée une aimantation qui s'oppose au champ magnétique (en réalité il s'agit d'un phénomène quantique). Dans ce cas, $\chi_m < 0$ et est très faible : de l'ordre de 10^{-5} (solides et liquides) à 10^{-9} (gaz) en valeur absolue.

On peut exprimer le vecteur aimantation :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{\mu_0(1 + \chi_m)} \vec{B} \simeq \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B} \quad (6.18)$$

et l'énergie potentielle volumique vaut alors :

$$e_p = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\chi_m \frac{B^2}{\mu_0} \quad (6.19)$$

Ainsi, comme $\chi_m < 0$, e_p décroît quand le champ magnétique décroît : les **milieux diamagnétiques sont attirés par les zones de champ faible**.

b) Milieux paramagnétiques

Si naturellement un matériau est constitué d'atomes ou de molécules possédant un moment magnétique non nul, même en l'absence de champ magnétique appliqué, il est paramagnétique. L'excitation magnétique appliquée tend à orienter ces dipôles dans le sens du champ, renforçant ainsi le champ appliqué de l'extérieur.

- χ_m est positif, de l'ordre de 10^{-3} , le diamagnétisme est donc masqué ;
- χ_m dépend fortement de la température.

Exercice

Expliquer la dépendance avec la température, et prévoir le sens d'évolution de χ_m si T augmente.

Le phénomène en compétition avec l'alignement des moments magnétiques est l'agitation thermique, qui tend à ce qu'en moyenne les moments s'orientent aléatoirement. Ainsi on peut s'attendre à ce que χ_m décroisse fortement avec la température (selon un... facteur de Boltzmann!).

Notons enfin que les **milieux paramagnétiques sont attirés par les zones de champ fort**, comme $e_p = -\chi_m B^2 / \mu_0$, avec $\chi_m > 0$.

c) Milieux ferromagnétiques

Dans certains milieux, il y a une interaction importante entre les moments magnétiques (d'origine quantique), qui tend à les garder parallèle, même en l'absence de champ magnétique. C'est par exemple le cas du fer, du cobalt ou du nickel (et de certains alliages). Ces milieux ne sont pas linéaires, même si on continue d'écrire :

$$\vec{M} = \chi_m(\vec{H}) \times \vec{H} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r(\vec{H}) \times \vec{H} \quad (6.20)$$

c'est-à-dire que χ_m et μ_r dépendent de l'excitation magnétique appliquée au matériau et ne sont plus des constantes. On peut atteindre $\chi_m \sim 10^4 \sim \mu_r$, pouvant conduire à des champs magnétiques importants (ou des valeurs d'inductance importantes si on place un noyau de matériau ferromagnétique dans une bobine, comme nous le verrons plus loin).

Il est à noter qu'au-delà d'une certaine température, appelée **température de Curie**, les propriétés magnétiques disparaissent ($T_c = 1043 \text{ K}$ pour le fer par exemple).



Manipulation

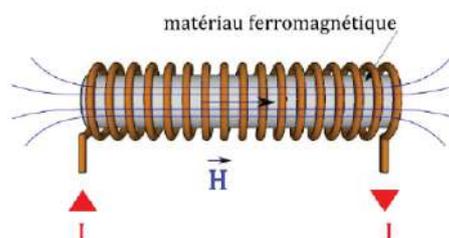
Température de Curie en vrai ou en vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=dtmgpy8gxao>.
Oscillateur de Curie : <https://www.youtube.com/watch?v=0detZxDJFbw>.

III.3 Étude des milieux ferromagnétiques

Étant donné l'importance des milieux ferromagnétiques dans l'industrie, étudions plus précisément leur comportement.

a) Courbe de première aimantation

Plaçons un barreau de fer **initialement non aimanté** à l'intérieur d'un solénoïde.



Exercice

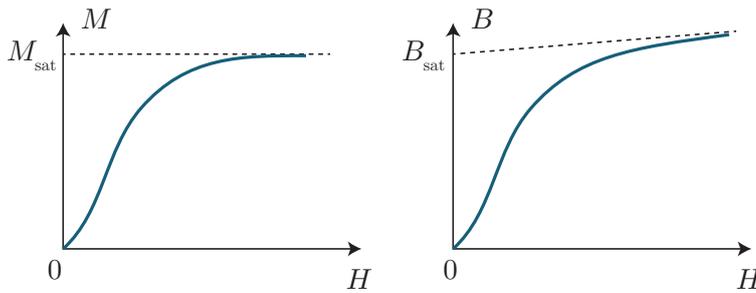
Justifier que ce dispositif permet d'appliquer une excitation magnétique proportionnelle à l'intensité du courant circulant dans le solénoïde.

On suppose que l'excitation magnétique est nulle à l'extérieur de la bobine, et suit les mêmes propriétés de symétrie que le champ magnétique dans un solénoïde contenant du vide. L'application du théorème d'Ampère à un contour rectangulaire orienté et de longueur ℓ conduit à

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = n\ell I = H\ell \quad \text{soit} \quad H = nI \quad (6.21)$$

avec n la densité linéique de spire.

En mesurant le champ magnétique (par un moyen non décrit ici, cf. TP), on peut donc en déduire $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$ et tracer son module en fonction du module de \vec{H} : cela s'appelle la **courbe de première aimantation**. Aux faibles valeurs de H , la portion de courbe est sensiblement linéaire (1), puis croît rapidement (2) et finit par atteindre une asymptote horizontale où l'aimantation sature et tend vers M_{sat} . Couramment, $M_{\text{sat}} \sim 10^6 \text{ A}\cdot\text{m}^2$. La saturation est prévisible et correspond au fait que tous les moments magnétiques du matériau sont alignés.



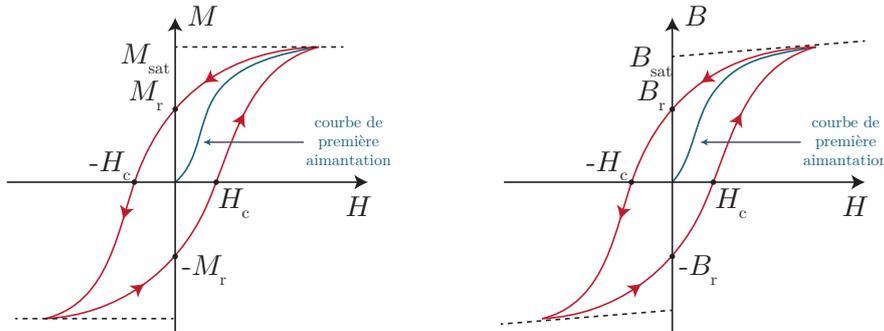
On peut également tracer le graphique (H, B) d'allure similaire à celui de (H, M) , à l'exception près que le champ magnétique atteint une valeur quasi-constante $B_{\text{sat}} = \mu_0 M_{\text{sat}} \simeq 1,5 \text{ T}$, mais continue à croître :

$$B = \mu_0(H + M) \simeq \mu_0 M_{\text{sat}} + \mu_0 H \quad (6.22)$$

L'asymptote est donc très faiblement inclinée à l'échelle de B_{sat} .

b) Cycle d'hystérésis

* Un fait moins prévisible se produit lorsqu'on diminue l'excitation magnétique : on ne passe plus par le même chemin que celui que l'on vient de décrire. En particulier à excitation nulle, l'aimantation conserve une valeur non nulle appelée **aimantation rémanente** M_r , et donc un champ magnétique rémanent B_r : on a alors aimanté le matériau.

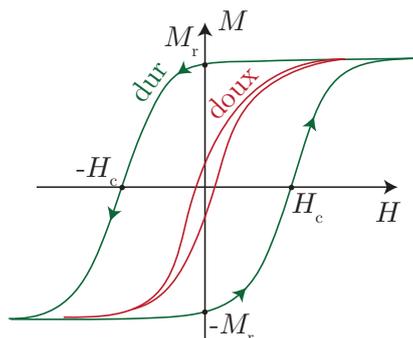


* Pour retrouver une situation d'aimantation nulle, il faut imposer une excitation négative $H = -H_c$, où H_c est appelée **excitation coercitive**. Si on continue à diminuer l'intensité du courant, on retrouve une saturation symétrique de l'aimantation.

En augmentant à nouveau H , le chemin est toujours différent : l'aimantation augmente à nouveau mais avec une valeur plus faible qu'à la descente, possède une aimantation rémanente $M = -M_r$ pour $H = 0$, s'annule pour $H = H_c$ puis sature à nouveau. On a alors tracé le **cycle d'hystérésis** du matériau ferromagnétique. Ce dernier est important car bien souvent les matériaux ferromagnétiques sont soumis à une excitation magnétique qui varie sinusoidalement (dans les transformateurs, par exemple). La notion d'hystérésis provient du fait que l'état d'aimantation dépend non seulement du champ H mais également de son « histoire » antérieure : on constate que pour une valeur de H , il y a deux valeurs possibles de M .

c) Milieux doux / durs

Parmi les matériaux ferromagnétiques, on distingue deux types de comportement selon l'allure du cycle d'hystérésis :



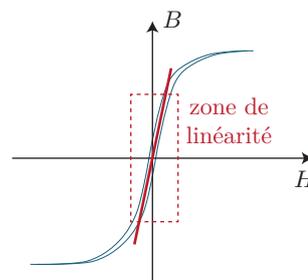
Hystérésis, mot issu du grec *husterein*, « être en retard » : à la remontée, pour une même valeur de H , l'aimantation n'est pas aussi forte qu'à la descente, d'où l'image de retard.

Notons que le stockage d'information sur les disques durs repose sur cette propriété d'hystérésis.

- les **ferromagnétiques durs** ont un cycle d'hystérésis large, signifiant que l'excitation coercitive est élevée $H_c > 10^3 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$. Ils sont utilisés pour fabriquer des aimants permanents, car difficiles à désaimanter. Citons notamment l'acier, certains alliages (aimant néodyme = alliage de néodyme, fer et bore) ou certaines ferrites (le plus courant) à base d'oxyde de fer Fe_2O_3 et de zinc ou de magnésium.
- * les **ferromagnétiques doux** ont un cycle étroit, l'excitation coercitive est plus faible ($H_c < 10^2 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$). Ils sont utilisés dans les moteurs, les inductances et les transformateurs, du fait de faibles pertes énergétiques (cf. plus loin). On les trouve également sur de nombreux câbles électriques pour protéger des parasites à haute fréquence (il joue le rôle de passe-bas). Les permalloys (alliage de fer et de nickel) sont des ferromagnétiques doux connus pour leur grande perméabilité relative (jusqu'à $\mu_r \sim 10^5$!).

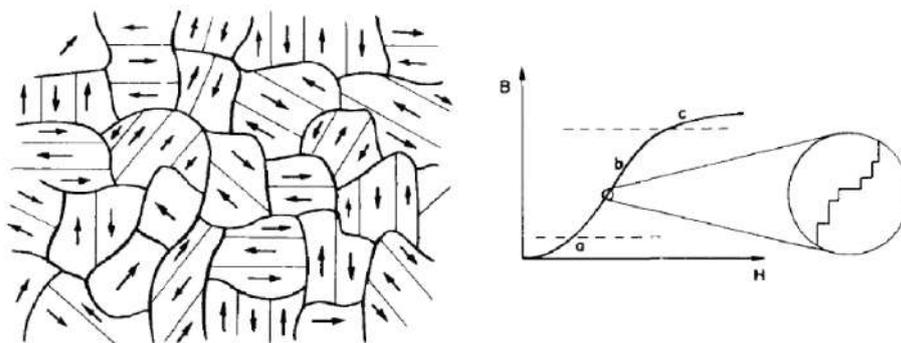
Les ferromagnétiques doux ont une caractéristique idéalisée linéaire tant que l'excitation a une amplitude suffisamment faible pour ne pas saturer le matériau. On peut alors l'assimiler à un MLHI de perméabilité relative μ_r constante allant de 10 à 10^5 :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6.23)$$

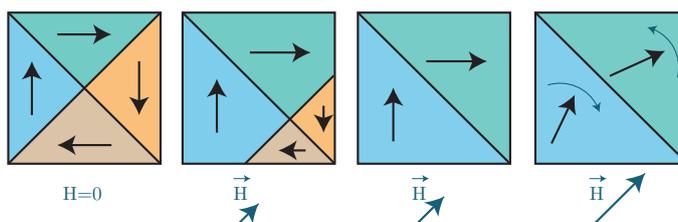


d) Origine physique (HP)

Pour comprendre l'origine de certaines propriétés précédentes, il faut pouvoir décrire à l'échelle microscopique un matériau ferromagnétique. On constate qu'il est constitué de petits domaines (de taille comprise entre 0,1 mm et 1 mm) appelés **domaines de Weiss**, d'aimantation uniforme dans chaque domaine. Ils sont séparés par des **parois de Bloch** dans lesquelles les moments changent continûment d'orientation. Pour un matériau non aimanté, les domaines ont des orientations quelconque, et le matériau présente une aimantation macroscopique nulle.



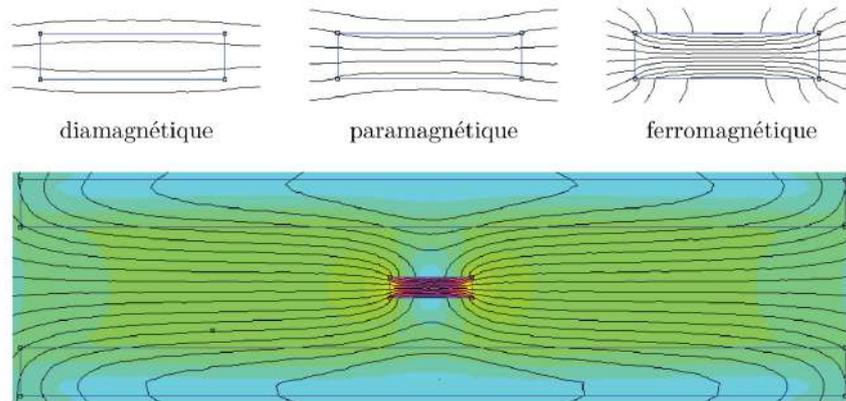
Lorsqu'on applique une excitation magnétique, ces petits domaines changent de taille, avec un déplacement des parois. Pour de faibles valeurs de H (zone (a)), ces déplacements sont réversibles et conduisent à grossir les domaines qui ont une orientation proche de celle de \vec{H} , mais sans rotation. Du fait des obstacles (impuretés, défauts cristallins), l'aimantation varie ensuite par petits sauts discontinus, rendant ces déplacements de parois irréversibles (b). Il faut donc fournir de l'énergie pour augmenter l'aimantation du milieu. Enfin, les moments magnétiques au sein des domaines de Weiss agrandis finissent par s'orienter dans la direction de H jusqu'à maximiser M .



IV. Circuits magnétiques

IV.1 Influence de la perméabilité

La perméabilité d'un matériau permet de caractériser sa faculté à modifier le champ magnétique, et les lignes de champ créées initialement par un excitateur externe. Sur les simulations ci-dessous, on illustre l'effet des matériaux diamagnétiques (qui diminuent légèrement le champ magnétique en son sein, les tubes de champ s'évasent) et paramagnétiques (qui augmentent légèrement le champ magnétique, les tubes de champ se rétrécissent).

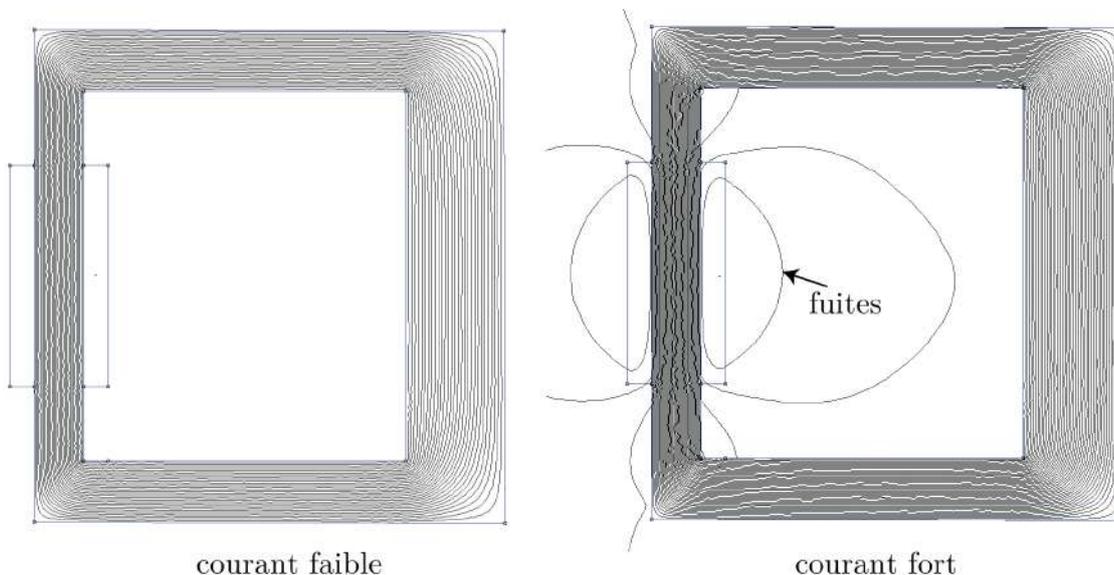
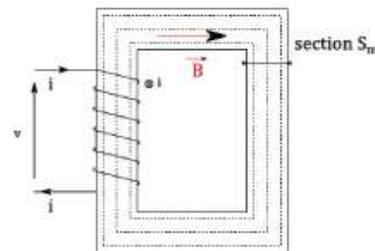


L'effet est par contre très spectaculaire pour les matériaux ferromagnétiques, qui augmentent considérablement le champ magnétique : les tubes de champ rétrécissent et les lignes de champ sont canalisées, du fait d'une perméabilité magnétique très supérieure à l'air.

IV.2 Circuit magnétique fermé

a) Allure des lignes de champ

L'utilisation de matériaux ferromagnétiques permet alors de réaliser des **circuits magnétiques** conduisant les lignes de champ magnétique. Prenons l'exemple d'un circuit rectangulaire fermé entouré localement par un bobinage parcouru par un courant. Ce dernier est à l'origine d'un champ magnétique, dont on observe l'allure des lignes de champ. On constate qu'elles sont canalisées et bouclées dans tout le matériau, de manière quasi-homogène (hormis au niveau des coins).



Cependant, dans le cas d'un courant important, le matériau est saturé, des lignes de champ sortent alors, notamment au voisinage de la bobine. Notons qu'on parle couramment de matériau **ferromagnétique parfait** lorsque $\mu_r \rightarrow +\infty$, où les lignes de champ sont parfaitement canalisées, sans fuites.

b) Champ magnétique dans le matériau

En considérant une ligne de champ moyenne d'un tube de champ à l'intérieur du matériau ferromagnétique, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = Ni \quad (6.24)$$

* avec N le nombre de spires de la bobine. Si la longueur ℓ du circuit magnétique est très grande devant \sqrt{S} , on peut considérer \vec{B} uniforme sur la section S du matériau. Si les courants sont suffisamment faibles pour que le matériau soit dans son domaine linéaire, on aboutit à :

$$\frac{B}{\mu} \ell = Ni \iff B = \frac{\mu Ni}{\ell} \quad (6.25)$$

Le champ magnétique dans le matériau est donc augmenté d'un facteur μ_r par rapport à celui d'un solénoïde.

Le flux du champ magnétique s'écrivant $\Phi = BS$, on peut injecter l'expression du champ B :

$$\Phi = \frac{\mu S}{\ell} Ni \iff Ni = \frac{\ell}{\mu S} \Phi \quad (6.26)$$

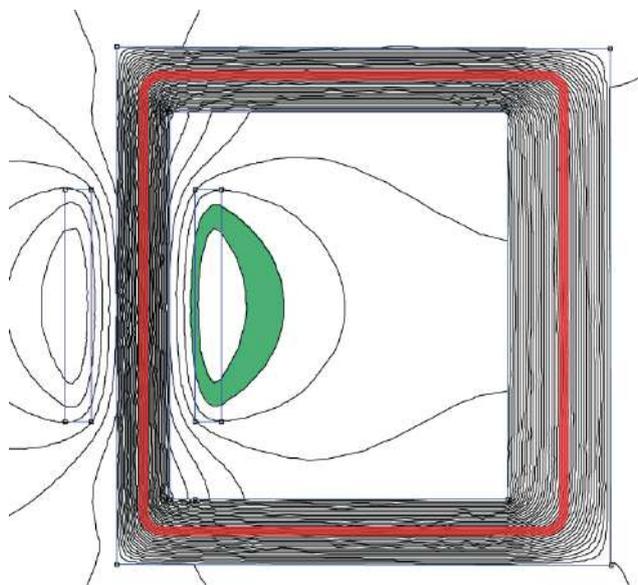
où l'on appelle reluctance $\mathcal{R} = \frac{Ni}{\Phi} = \frac{\ell}{\mu S}$ le rapport entre la « force magnétomotrice » (fmm) et le flux magnétique. On peut ainsi conduire des analogies électriques pour des circuits magnétiques.

c) Fuites de champ

On peut estimer l'effet de la canalisation en appliquant le théorème d'Ampère sur deux lignes de champ, l'une à l'intérieur du tore magnétique, et l'autre à l'extérieur :

$$H_{\text{ext}} \ell_{\text{ext}} = Ni = H_{\text{ferro}} \ell_{\text{ferro}} \quad (6.27)$$

Choisissons deux tubes de champ de même section S au voisinage du circuit magnétique, l'un associé aux lignes de champ de fuite, et l'autre aux lignes de champ canalisé.



On a alors :

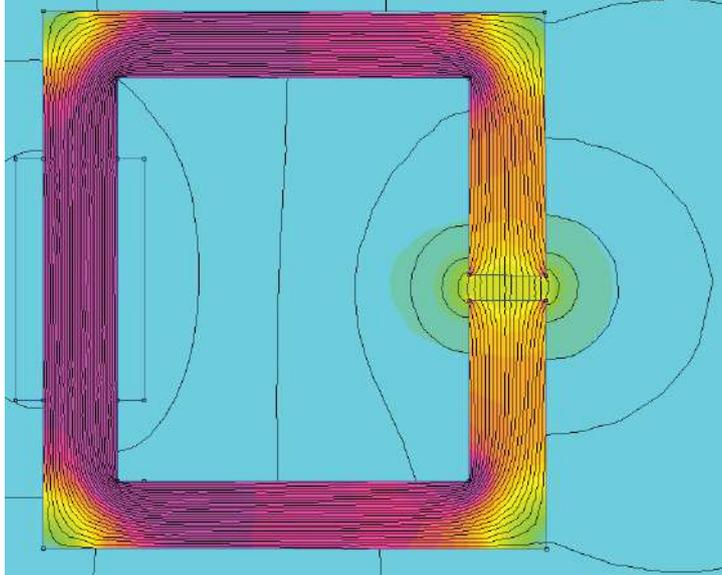
$$\frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_{\text{ferro}}} = \frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{ferro}}} \simeq \frac{\mu_0 H_{\text{ext}}}{\mu_0 \mu_r H_{\text{ferro}}} = \frac{\ell_{\text{ext}}}{\ell_{\text{ferro}} \mu_r} \ll 1 \quad (6.28)$$

pour un circuit magnétique de grande perméabilité.

IV.3 Électroaimant

a) Présentation

À l'aide de courants électriques alimentant un circuit magnétique, nous savons désormais créer des champs magnétiques intenses. Pour y accéder, rien de plus simple : on découpe localement le circuit magnétique de sorte à former un **entrefer**, c'est-à-dire une zone où le circuit magnétique est interrompu.

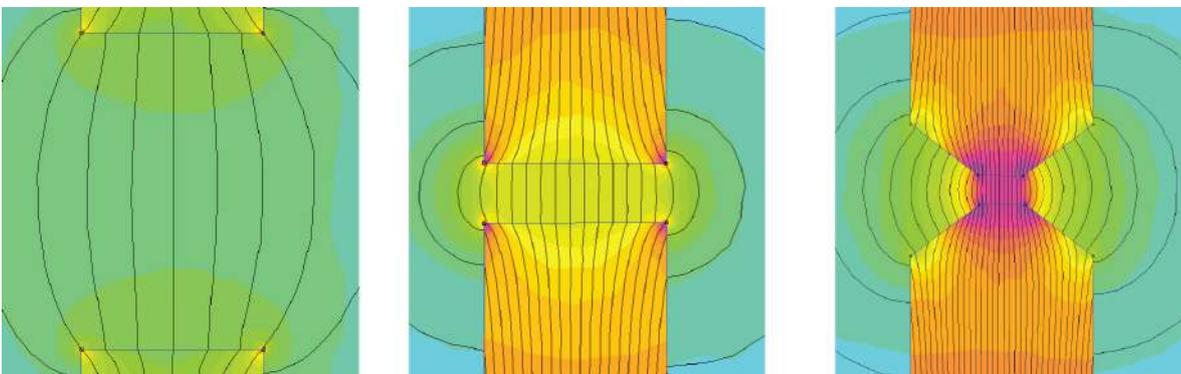


L'examen des lignes de champ montre qu'elles sont toujours canalisées par le matériau, et globalement assez bien canalisées dans l'entrefer. On constate même qu'elles sortent orthogonalement à l'interface entre le matériau ferromagnétique et l'air. Cela se justifie à l'aide des relations de passage, en indiquant e pour entrefer et f pour ferromagnétique :

$$* \quad B_{n,e} = B_{n,f} \quad \text{et} \quad H_{t,e} = H_{t,f} \iff \frac{B_{t,e}}{\mu_0} = \frac{B_{t,f}}{\mu_0 \mu_r} \quad (6.29)$$

conduisant à $B_{t,e} \simeq 0$ pour un matériau de forte perméabilité ($B_{t,e} = 0$ pour un ferromagnétique parfait).

Si l'épaisseur e de l'entrefer est suffisamment petite devant la longueur ℓ du circuit magnétique, on peut négliger les effets de bords et **la majorité des lignes de champs dans l'entrefer sont parallèles entre elles et sortent orthogonalement à l'interface.**



b) Calcul du champ magnétique dans l'entrefer

Notons S la section droite du ferromagnétique (considéré comme un MLHI) et de l'entrefer, ℓ sa longueur et e l'épaisseur de l'entrefer. Soient les couples (B_f, H_f) et (B_e, H_e) respectivement le champ et l'excitation dans le ferromagnétique et dans l'entrefer.

On peut réaliser des entrefers de section inférieure pour concentrer les lignes de champ



Démonstration

- Le champ magnétique est à flux conservatif : $B_e S = B_f S$, donc $B_e = B_f$;
- l'application du théorème d'Ampère à un contour moyen au circuit magnétique conduit à

$$H_f \ell + H_e e = Ni \quad (6.30)$$

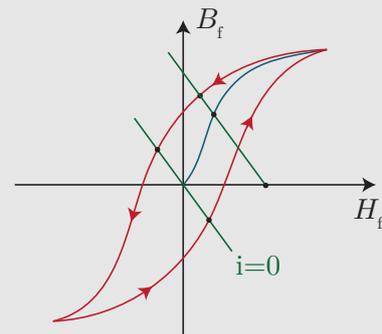
* soit avec l'hypothèse d'un ferromagnétique linéaire et $B_f = \mu_r \mu_0 H_f$:

$$\frac{B_e}{\mu_0 \mu_r} \ell + \frac{B_e}{\mu_0} e = Ni \iff B_e = \frac{\mu_0 Ni}{e + \frac{\ell}{\mu_r}} \simeq \frac{\mu_0 Ni}{e} \quad (6.31)$$

si $\mu_r \gg 1$

On peut ainsi obtenir très facilement des champs magnétiques de l'ordre de 1 T au sein de l'entrefer.

Si le matériau n'est pas linéaire, on peut conduire une détermination graphique pour obtenir la relation entre H_f et B_f . On superpose la courbe de première aimantation et le cycle d'hystérésis à la droite d'équation $\ell H_f + \frac{e B_f}{\mu_0} = Ni$. On observe plusieurs intersections. Une seule solution est possible et dépend de l'état antérieur du matériau. Notons que même à courant nul, on peut avoir une solution si le ferromagnétique est initialement magnétisé.



IV.4 Bobine à noyau de fer

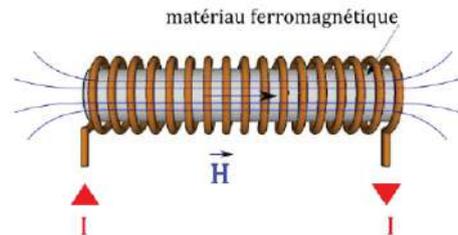
a) Inductance



Manipulation

Mesure au RLC-mètre de l'inductance d'une bobine avec et sans noyau de fer.

L'utilisation d'une bobine à noyau augmente considérablement la valeur de l'inductance que l'on peut atteindre. Pour le justifier, calculons le flux magnétique à l'intérieur du solénoïde rempli d'un matériau ferromagnétique.



Partons du champ magnétique déterminé précédemment $B = \frac{\mu N i}{\ell}$, avec ℓ la longueur du solénoïde, en négligeant les effets de bords. Ainsi le flux vaut :

$$* \quad \Phi = N \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBS = \frac{\mu N^2 S}{\ell} i \quad (6.32)$$

conduisant à une inductance :

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{\ell} \quad (6.33)$$

Par rapport à un solénoïde vide, on augmente donc d'un facteur μ_r la valeur de l'inductance. Cela permet d'expliquer pourquoi on trouve des très petites inductances (à noyau de fer) dans les circuits électroniques, de valeur $L \sim 1$ mH.

b) Aspects énergétiques

i) Cas d'un MLHI

L'énergie emmagasinée par un tel composant peut s'exprimer simplement dans le cas d'un MLHI (c'est-à-dire d'un ferromagnétique doux non saturé, où $\mu_r = \text{cste}$), car l'inductance est constante. Ainsi la puissance reçue en convention récepteur est :

$$\mathcal{P} = u(t)i(t) = \frac{d\Phi}{dt}i(t) = \frac{dL i(t)}{dt}i(t) \quad (6.34)$$

Si $L = \text{cste}$,

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \quad (6.35)$$

On retrouve donc l'énergie stockée dans un solénoïde, en remplaçant μ_0 par μ :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2 = \dots = \frac{B^2}{2\mu} S\ell \quad (6.36)$$

c'est-à-dire qu'on stocke de l'énergie avec une densité volumique $e_m = \frac{B^2}{2\mu}$. Plus généralement, si B n'est pas uniforme dans le matériau, l'énergie stockée s'exprime par :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint_{(V)} \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau \quad (6.37)$$

À intensité du courant identique, une bobine à noyau stocke davantage d'énergie qu'une bobine à air. Par contre, à champ magnétique identique, c'est bien dans l'air qu'est stockée la majorité de l'énergie. C'est d'ailleurs ce que l'on observe pour l'électroaimant : la majorité de l'énergie est concentrée dans l'entrefer.

ii) Cas quelconque

Dans le cas général d'un matériau ferromagnétique quelconque, on peut relier l'énergie stockée ou dissipée à la courbe $B = f(H)$:

$$\mathcal{P} = \frac{d\Phi}{dt} i(t) = NS \frac{dB}{dt} i(t) \quad (6.38)$$

Or le théorème d'Ampère nous avait initialement donné $H\ell = Ni$, donc :

$$\mathcal{P} = NS \frac{dB}{dt} \frac{H\ell}{N} = H \frac{dB}{dt} S\ell \quad (6.39)$$

* c'est-à-dire, avec $V = S\ell$ le volume du matériau ferromagnétique :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \left(\int H dB \right) V \quad (6.40)$$

c'est-à-dire que la densité volumique d'énergie magnétique est reliée à l'aire sous la courbe $H = f(B)$.

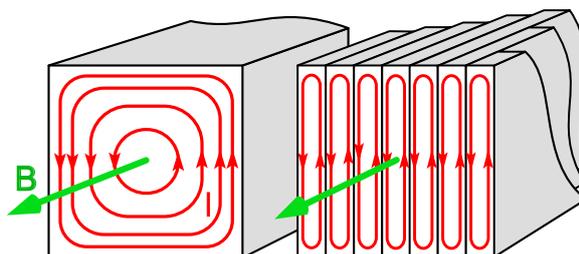
c) Pertes d'une bobine réelle à noyau

Il ya plusieurs types de pertes au sein d'une bobine à noyau, en particulier lorsqu'elle est utilisée en régime variable :

- les **pertes cuivre** correspondent aux pertes par effet Joule au sein du bobinage de cuivre ;
- les **pertes fer**, composées des pertes **par courant de Foucault** et les **pertes par hystérésis**.

i) Pertes par courant de Foucault

Du fait du champ magnétique variable, il y a création de courants volumiques au sein du matériau ferromagnétique, qui est également un conducteur électrique. On peut les limiter en feuilletant le matériau, ou en diminuant la fréquence d'utilisation (les pertes étant proportionnelles à f^2 , cf. EM5).



ii) Pertes par hystérésis

Nous avons vu précédemment qu'une bobine à noyau stockait dans le matériau une énergie magnétique volumique $\int H dB$. Cependant, du fait de l'hystérésis, le trajet lors de l'augmentation de l'excitation diffère du trajet lors de la diminution. L'énergie qui peut être stockée n'est ensuite pas intégralement cédée, une partie est dégradée sous forme thermique : c'est lié à l'irréversibilité du mouvement et de l'apparition (ou disparition) des parois de Bloch entre les domaines de Weiss.

La puissance moyenne perdue par hystérésis est calculée sur une période selon :

$$\mathcal{P} = \frac{V}{T} \int_0^T H \frac{dB}{dt} dt = \frac{V}{T} \oint_{(\text{cycle})} H dB \quad (6.41)$$

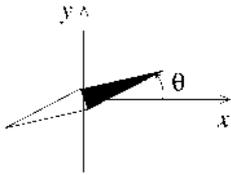
* Cette intégrale correspond à l'aire \mathcal{A} du cycle d'hystérésis tracé en coordonnées (H, B) . On en déduit donc que la puissance moyenne nécessaire pour faire parcourir le cycle d'hystérésis au matériau ferromagnétique en régime alternatif est égal à

$$\mathcal{P} = Vf\mathcal{A} \quad (6.42)$$

avec V le volume du matériau, f la fréquence de parcours du cycle et \mathcal{A} son aire.

On comprend donc qu'il faut choisir un matériau doux, dont le cycle est d'aire très réduite, pour limiter les pertes par hystérésis. Typiquement, pour ce type de matériau, sous 50 Hz, on a des pertes massiques de l'ordre de $1 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$.

6.1 Mesure de champ magnétique terrestre



Sur une paillasse de laboratoire, une boussole assimilable à un dipôle magnétique de moment dipolaire \vec{m} est libre de tourner autour de l'axe vertical $\Delta = Oz$. On note J son moment d'inertie par rapport à Δ . Elle est plongée dans un champ magnétique horizontal uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$, les frottements sont négligés.

- Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle et le champ et en déduire les positions d'équilibre.
- On libère la boussole sans vitesse angulaire initiale, alors qu'elle fait un angle droit avec la direction du champ. Décrire le mouvement et préciser sa plus grande valeur de vitesse angulaire.
- Représenter l'allure du portrait de phase du système.
- Aucun autre champ n'est présent que le champ magnétique terrestre, dont la composante horizontale est dirigée selon Ox et d'intensité notée B_0 . On constate que, libérée avec un petit angle par rapport à cet axe, la boussole oscille avec une période T_0 . Quelle relation relie B_0 à T_0 ? Quelle difficulté rencontre-t-on pour déduire la valeur B_0 de la mesure de T_0 ?
- On crée un champ magnétique supplémentaire $\vec{B}_1 = B_1\vec{e}_x$, d'intensité réglable et connue, à l'aide d'un ensemble de bobines de Helmholtz parcourues par un courant électrique. On mesure la période T des petites oscillations autour de l'axe Ox lorsque le champ supplémentaire et le champ géomagnétique ont même direction et même sens. En inversant alors le sens de l'intensité du courant électrique, on constate que les oscillations ont toujours lieu autour de la même position angulaire, mais qu'elles s'effectuent avec une période T' . Relier B_0 à B_1 , T et T' . A-t-on remédié aux difficultés citées précédemment?

- $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos(\theta)$. On a donc des positions d'équilibre aux extrema d'énergie potentiel, c'est-à-dire pour $\frac{dE_p}{d\theta} = 0 = mB \sin \theta$, soit $\theta = 0[\pi]$. En particulier on a un minimum en $\theta = 0$ (stable) et un maximum en $\theta = \pi$ (instable).

- Si on applique la loi du moment cinétique scalaire sur la boussole, on aboutit à :

$$J\ddot{\theta} = -mB \sin \theta \iff \ddot{\theta} + \frac{mB}{J} \sin \theta = 0 \quad (6.43)$$

c'est-à-dire l'équation différentielle associée à un pendule simple. Attention, du fait que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, on ne peut PAS simplifier $\sin \theta$ par θ . On a donc un mouvement oscillatoire de $\theta = \pi/2$ vers $\theta = -\pi/2$, périodique, sans dissipation d'énergie. La vitesse angulaire sera maximale en $\theta = 0$. On l'obtient par exemple en utilisant la conservation de l'énergie mécanique entre $\theta = \pi/2$ et $\theta = 0$:

$$0 + 0 = \frac{J\dot{\theta}^2}{2} - mB \iff \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2mB}{J}} \quad (6.44)$$

- Attention, pas un cercle, c'est déformé : FIGURE
- Si petits angles, l'approximation $\sin \theta \simeq \theta$ est valable, on a donc l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

propre $\omega = \sqrt{\frac{mB_0}{J}} = \frac{2\pi}{T_0}$. La difficulté de cette mesure provient du fait qu'il faut connaître m et J avec précision.

- Dans le cas où les deux champs sont dans le même sens :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m(B_0 + B_1)}} \quad (6.45)$$

et dans le sens opposé, avec forcément $B_1 < B_0$ sinon l'oscillation aurait lieu autour de $\theta = \pi$:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m(B_0 - B_1)}} \quad (6.46)$$

En écrivant le quotient :

$$\frac{T}{T'} = x = \sqrt{\frac{B_0 - B_1}{B_0 + B_1}} \iff \frac{B_0 - B_1}{B_0 + B_1} = x^2 \iff B_0 = B_1 \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \quad (6.47)$$

On a ainsi éliminé dans cette expression la connaissance de m et J , mais il faudra connaître avec précision B_1 (on a déplacé le problème), et savoir positionner également avec précision \vec{B}_1 pour qu'il soit aligné avec \vec{B}_0 .

6. 2 Réfraction des lignes de champ magnétique

Considérons l'interface entre deux milieux magnétiques indicés 1 et 2 de perméabilité respective μ_1 et μ_2 .

1. À partir des relations de passage, démontrer la loi de la réfraction du champ magnétique à l'interface entre deux MLHI sans courant surfacique

$$\frac{\tan(i_1)}{\mu_1} = \frac{\tan(i_2)}{\mu_2} \quad (6.48)$$

où les angles des lignes de champ sont repérés par rapport à la normale à l'interface entre les deux milieux.

2. Conclure en ce qui concerne l'interface entre un milieu magnétique et l'air.

1. Les relations de passage entre deux milieux conduisent d'une part à $B_{1,n} = B_{2,n}$ et d'autre part à $H_{t,1} = H_{t,2}$ s'il n'y a pas de courants surfaciques. En supposant des MLHI, on a donc :

$$B_{1,n} = B_{2,n} \iff \frac{H_{1,n}}{\mu_1} = \frac{H_{2,n}}{\mu_2} \quad (6.49)$$

soit à l'aide d'un petit schéma $\tan(i) = \frac{H_n}{H_t}$. D'où en divisant l'équation précédente par $H_{t,1}$:

$$\frac{\tan(i_1)}{\mu_1} = \frac{\tan(i_2)}{\mu_2} \quad (6.50)$$

2. Ainsi à l'interface entre un milieu magnétique 1 où $\mu_1 = \mu_0 \mu_r$ et l'air de perméabilité $\mu_2 \simeq \mu_0$, $\tan(i_2) \simeq 0$ si $\mu_r \gg 1$, c'est-à-dire que les lignes de champ sortent perpendiculairement à la surface du milieu magnétique.

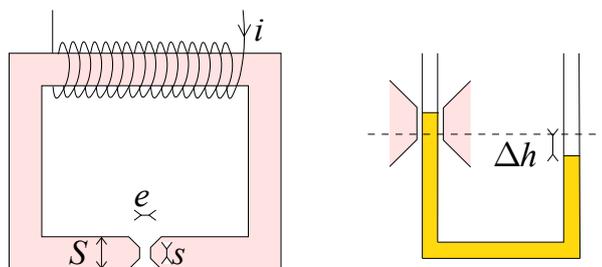
6. 3 Mesure d'une susceptibilité

On souhaite mesurer la susceptibilité d'une solution de FeCl_3 , de masse volumique ρ .

Pour cela, on place cette solution dans un tube en U. L'une des extrémités est placée entre les pièces polaires d'un électroaimant, l'autre extrémité est loin de toute source de champ magnétique.

Lorsqu'on allume l'électroaimant, le niveau du fluide varie de Δh (tout en restant dans l'entrefer de l'aimant).

Le champ magnétique dans l'entrefer est mesuré par un teslamètre à effet Hall.



1. Étude de l'électroaimant. Celui-ci est constitué d'un noyau ferromagnétique de perméabilité relative μ_r , de longueur ℓ et de section S sur la quasi-totalité de la longueur. Les extrémités ont une section $s \simeq S/10$. Sur ce matériau est enroulée une bobine de N spires parcourue par un courant d'intensité i . L'entrefer est de largeur $e \simeq \ell/100$.

Montrer que le champ dans l'entrefer peut s'écrire $B \simeq \frac{\mu_0 N i}{\frac{\ell s}{\mu_r S} + e} \simeq \frac{\mu_0 N I}{e}$.

2. Montrer que la force magnétique volumique peut s'écrire $\vec{f} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \text{grad}(B^2)$, où χ_m est la susceptibilité magnétique. On admettra qu'ici, $(\vec{B} \cdot \text{grad})\vec{B} = \frac{1}{2} \text{grad}(B^2)$.
3. En déduire la relation entre B et Δh . Le niveau du fluide s'élève-t-il ou s'abaisse-t-il dans l'entrefer ?
4. A.N. : on a $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On mesure $\Delta h = 8 \text{ mm}$ pour $B = 2,0 \text{ T}$. En déduire la susceptibilité de la solution.

1. Cf cours. Ce qui change est seulement l'écriture de la conservation du flux avec le changement de section : $B_e s = B_f S$.

2. La force magnétique volumique étant $\vec{f} = (\vec{M} \text{grad}) \vec{B}$, avec $\vec{M} = \chi_m \vec{H} \simeq \chi_m \vec{B}$. Ainsi, avec l'indication de l'énoncé :

$$\vec{f} = \frac{\chi_m}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{B} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \text{grad} (B^2) \quad (6.51)$$

3. Si on applique la relation de la statique des fluides :

$$-\text{grad} P + \rho \vec{g} + \vec{f} = \vec{0} \quad (6.52)$$

soit en intégrant, en remarquant que $\rho g = -\text{grad}(\rho g z)$

$$P + \rho g z - \frac{\chi_m}{2\mu_0} B^2 = \text{cste} \quad (6.53)$$

ce qui constitue la loi de l'hydrostatique en présence d'un champ magnétique. En exprimant cette relation entre les deux points de la surface libre, de pression constante :

$$\rho g(2\Delta h) = \frac{\chi_m}{2\mu_0} B^2 \quad (6.54)$$

en supposant la nullité du champ magnétique au niveau de l'autre surface libre. Le niveau du fluide s'élève donc bien dans l'entrefer.

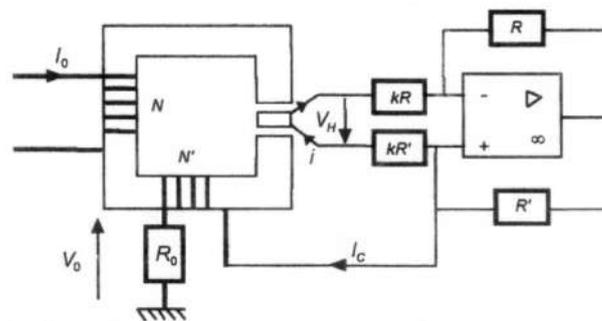
4. Numériquement, on trouve $\chi_m = 1,1 \cdot 10^{-4}$, ce qui est relativement faible. On pourrait montrer que c'est cohérent avec la susceptibilité du FeCl_3 solide.

6.4 Capteur d'intensité électrique

Le dispositif ci-dessous est utilisé comme sonde ampèremétrique dans divers dispositifs de régulation de commande de forte puissance. Le circuit magnétique est constitué d'un matériau magnétique de très forte perméabilité et d'un entrefer d'épaisseur e faible devant la longueur totale ℓ du circuit.

Le courant I_0 dont on cherche à mesurer l'intensité est injecté dans un circuit électrique comportant N spires bobinées autour du circuit magnétique. Une sonde de Hall, placée dans l'entrefer, mesure alors une tension V_H proportionnelle à l'intensité du champ magnétique B_e qui y règne (on note α cette constante de proportionnalité). La tension V_H est appliquée aux bornes d'un dispositif électronique à amplificateur linéaire intégré, dont l'une des branches est enroulée (N' spires) autour du circuit magnétique précédent. On suppose que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

Données : $e = 1,0 \text{ mm}$; $\alpha = 0,1 \text{ V} \cdot \text{T}^{-1}$; $kR = 0,1 \Omega$; $N = 1$ et $N' = 1000$.



1. Donner une relation entre V_H , N , N' , I_0 et I_c . On précisera les hypothèses effectuées.
2. Déterminer la relation entre I_c et V_H lorsque l'ALI fonctionne en régime linéaire.
3. Déterminer la valeur de la résistance R_0 permettant d'obtenir, en sortie de dispositif, une tension V_0 telle que $V_0 = \gamma I_0$ avec $\gamma = 0,25 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1}$.

1. Appliquons le théorème d'Ampère à une ligne de champ moyenne du circuit magnétique, orientée sur le schéma dans le sens trigonométrique :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\text{enlacé}} \iff H_f(\ell - e) + H_{me}e = NI_0 - N'I_c \quad (6.55)$$

On suppose que le matériau est LHI, donc $H_f = \frac{B_f}{\mu_0 \mu_r} \ll \frac{B_e}{\mu_0} = H_e$, sachant que la conservation du flux nous donne $B_f = B_e$. D'où :

$$B_e = \frac{\mu_0}{e} (NI_0 - N'I_c) \implies v_H = \frac{\alpha \mu_0}{e} (NI_0 - N'I_c) \quad (6.56)$$

2. L'ALI est supposé idéal, donc les courants d'entrée sont nuls, et on suppose qu'il fonctionne en régime linéaire. L'utilisation de la loi des nœuds en termes de potentiels est ici la plus rapide, en notant que le courant i traversant kR' traverse également de gauche à droite kR :

$$I + \frac{V_s - V_-}{R} = 0 \quad \text{et} \quad I + I_c + \frac{V_+ - V_s}{R'} = 0 \quad (6.57)$$

En injectant la première dans la deuxième, avec $V_- = V_+$, on aboutit à $I = -\frac{R'}{R+R'}I_c$. Puis, comme $V_+ - V_B = kR'I$ et $V_A - V_- = kRI$, avec $V_B - V_A = V_H$:

$$V_H = -k(R+R')I \iff V_H = kR'I_c \quad (6.58)$$

3. Comme

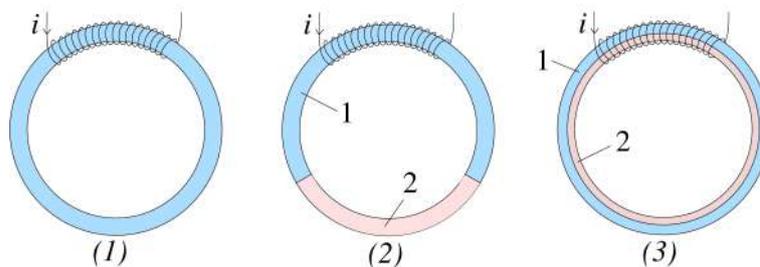
$$V_H = kR'I_c = kR' \frac{V_0}{R_0} = \frac{\alpha \mu_0 e (NI_0 - N' \frac{V_0}{R_0})}{R_0} \quad (6.59)$$

il vient après simplification

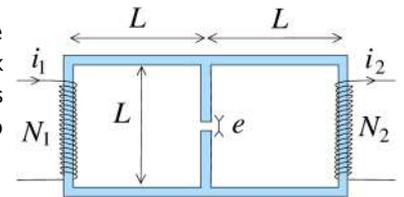
$$V_0 = \frac{NR_0}{N' + \frac{kR'e}{\alpha \mu_0}} V_0 \quad (6.60)$$

il faut donc $R_0 = 449 \Omega$.

6.5 Reluctance et analogie électrique



- On considère le circuit magnétique (1), constitué d'un milieu ferromagnétique torique de perméabilité μ , de longueur ℓ , section S . Une bobine de N spires parcourue par un courant I est enroulée autour du ferromagnétique. Montrer qu'on peut écrire une « loi d'Ohm magnétique » $\epsilon = R\phi$, où $\epsilon = Ni$ est appelée force magnétomotrice, et ϕ est le flux du champ \vec{B} à travers une section du tore. Donner l'expression de la **réductance** R en fonction des paramètres du ferromagnétique.
- On considère le circuit magnétique (2) constitué de deux matériaux ferromagnétiques différents (même section S , perméabilité μ_1 , longueur ℓ_1 pour le premier, μ_2 , ℓ_2 , pour le second). Montrer qu'on peut définir une réductance R équivalente dont on donnera l'expression en fonction des réductances R_1 et R_2 des deux ferromagnétiques.
- On considère le circuit magnétique (3) constitué de deux matériaux ferromagnétiques différents (même longueur ℓ , perméabilité μ_1 , section S_1 pour le premier, μ_2 , S_2 , pour le second). Même question.
- On considère l'électroaimant ci-contre, constitué d'un milieu ferromagnétique de section $S = 4,0 \text{ cm}^2$ et de perméabilité relative $\mu_r = 10^4$ et de deux bobines de nombres de spires $N_1 = 200$ et $N_2 = 300$ parcourues par des courants d'intensité respectives $i_1 = 3,0 \text{ A}$ et $i_2 = 2,0 \text{ A}$. Calculer le champ dans l'entrefer de largeur $e = L/100$, avec $L = 20 \text{ cm}$.



- Cf. cours, on a montré que $\epsilon = R\phi$ avec $R = \frac{\ell}{\mu S}$.
- On recommence la même démonstration, à savoir que l'on applique le théorème d'Ampère :

$$H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 = Ni = \epsilon = \frac{B_1}{\mu_1} \ell_1 + \frac{B_2}{\mu_2} \ell_2 \quad (6.61)$$

soit avec la conservation du flux $B_1 S = B_2 S = \phi$:

$$\epsilon = \phi \left(\frac{\ell_1}{\mu_1 S} + \frac{\ell_2}{\mu_2 S} \right) = \phi (R_1 + R_2) \quad (6.62)$$

c'est-à-dire que l'on a constitué un circuit magnétique contenant deux réductances en série.

3. On écrit cette fois le théorème d'Ampère sur deux contours, l'un passant dans le milieu 1, l'autre dans le milieu 2 :

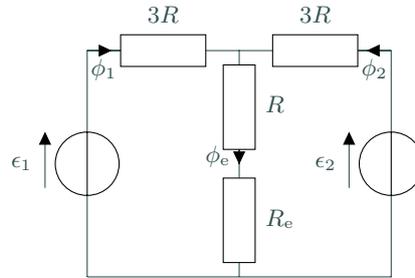
$$Ni = \epsilon = \frac{B_1 \ell_1}{\mu_1} = \frac{B_2 \ell_2}{\mu_2} \quad (6.63)$$

puis le flux à travers la section du tore complet s'écrit $\phi = B_1 S_1 + B_2 S_2$. En utilisant les relations précédentes des champs :

$$\phi = \epsilon \left(\frac{\mu_1 S_1}{\ell_1} + \frac{\mu_2 S_2}{\ell_2} \right) \iff \epsilon = \frac{\phi}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = R_{\text{eq}} \phi \quad (6.64)$$

avec la reluctance équivalente $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

4. On représente le circuit électrique équivalent :



La loi des nœuds conduit à $\phi_1 + \phi_2 = \phi_e$, les lois des mailles à :

$$\begin{cases} N_1 i_1 = \epsilon_1 = 3R\phi_1 + (R + R_e)\phi_e & (6.65) \\ N_2 i_2 = \epsilon_2 = 3R\phi_2 + (R + R_e)\phi_e & (6.66) \end{cases}$$

$$\quad \quad \quad (6.67)$$

soit en les sommant :

$$(N_1 i_1 + N_2 i_2) = (5R + 2R_e)\phi_e \quad (6.68)$$

soit avec $\phi_e = B_e S$, $R = \frac{L}{\mu_0 \mu_r S}$ et $R_e = \frac{e}{\mu_0 S}$:

$$B_e = \frac{\mu_0 (N_1 i_1 + N_2 i_2)}{2e + \frac{5L}{\mu_r}} = 0,37 \text{ T} \quad (6.69)$$

6.6 Transition paramagnétisme - ferromagnétisme

On considère un milieu constitué d'atomes (densité volumique n) possédant chacun un moment magnétique $\vec{m} = \pm \mu_B \vec{e}_z$ où μ_B est le magnéton de Bohr. Ce milieu est placé dans un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, à température T .

On posera $x = \frac{\mu_B B_0}{k_B T}$.

1. Donner les valeurs possibles E_i de l'énergie d'interaction magnétique d'un atome dans le champ magnétique.
2. On admet que le nombre d'atomes dans chaque état d'énergie E_i est proportionnel à $\exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$ (statistique de Boltzmann). Calculer la densité volumique n_i d'atomes dans chaque état.
3. Exprimer l'aimantation M . Donner son allure en fonction de x . Interpréter cette courbe.

Pour expliquer le comportement des corps ferromagnétiques, on suppose que chacun des atomes est soumis, outre à l'action du champ magnétique \vec{B}_0 , à celle d'un champ moyen \vec{B}_w (ou « champ moléculaire » de Weiss) qui traduit l'action du milieu sur lui-même.

Celui-ci est supposé proportionnel à l'aimantation, soit $\vec{B}_w = \mu_0 \alpha \vec{M}$ où α est une constante positive indépendante de la température. On suppose applicables les résultats obtenus à condition de remplacer \vec{B}_0 par $\vec{B} + \vec{B}_w$.

4. Montrer qu'en l'absence de champ appliqué, il peut exister une aimantation non nulle à condition que la température T soit inférieure à une température T_c (température de Curie) que l'on exprimera en fonction de μ_0 , α , n , μ_B et k_B .

1. $E_i = \mp \mu_B B_0$ comme l'énergie potentielle est $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$.

2. La probabilité d'avoir un atome dans l'état d'énergie E_i est donc proportionnel à $e^{-E_i/k_B T} = e^{\pm x}$, donc $p_+ \propto e^{-x}$ et $p_- \propto e^x$. En normalisant les probabilités :

$$p_+ = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \quad \text{et} \quad p_- = \frac{e^x}{e^{-x} + e^x} \quad (6.70)$$

donc

$$n_+ = np_+ = n \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \quad \text{et} \quad n_- = n \frac{e^x}{e^{-x} + e^x} \quad (6.71)$$

Cela paraît logique, lorsque la température tend vers 0, l'agitation thermique ne gêne pas l'alignement des moments magnétiques dans la direction de \vec{B}_0 , c'est-à-dire que les moments sont selon $+\vec{e}_z$ et $n_+ \rightarrow n$ quand $x \rightarrow +\infty$.

3. L'aimantation est donc la somme des aimantations des n_+ atomes où $m = +\mu_B$ et des n_- atomes où $m = -\mu_B$:

$$M = \mu_B n_+ - \mu_B n_- = \mu_B n \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = \boxed{\mu_B n \tanh(x)} \quad (6.72)$$

Courbe classique th !

Cette courbe s'interprète aisément : quand $x \rightarrow 0$, c'est-à-dire $T \rightarrow +\infty$, l'agitation thermique est telle que l'aimantation globale est nulle, il y a autant d'atomes orientés dans le sens du champ que dans le sens opposé ; à l'inverse quand $x \rightarrow +\infty$, l'aimantation est maximale car les moments magnétiques sont orientés dans le sens du champ magnétique.

4. En l'absence de champ appliqué, l'aimantation doit à la fois vérifier $M = \mu_B n \tanh(x_w)$ et $M = \frac{B_w}{\mu_0 \alpha} = \frac{k_B T}{\mu_0 \mu_B \alpha} x_w$. L'intersection entre ces deux courbes n'est possible que si la droite possède une pente inférieure à la tangente à la courbe représentative de $f(x_w) = \mu_B n \tanh(x_w)$ en $x_w = 0$. Or $f'(0) = \mu_B n$. Donc il y a une intersection si :

$$\frac{k_B T}{\mu_0 \mu_B} < \mu_B n \iff T < T_c = \frac{\mu_B^2 \mu_0 \alpha n}{k_B} \quad (6.73)$$