Oscillateurs à 2 degrés de liberté en méca classique. Systèmes à 2 niveaux en méca quantique. Analogies et différences

Niveau : L3

Prérequis : Méca du point (TMC) Formalisme de Dirac, calcul de vecteur d'état et vecteur propre, équation de Schrödinger, Modes propres.

Intro : On va étudier deux problèmes physiques différents : les oscillateurs à 2 degrés de liberté à travers les pendules couplés et les systèmes quantiques à 2 niveaux par le biais de la molécule d'ammoniac. Nous verrons que le formalisme de l'étude est équivalent pour les deux systèmes ce qui nous permettra de tirer de l'étude un certain nombre d'analogies mais aussi de différences.

Commençons par étudier le cas des pendules couplés.

I) Oscillateurs à 2 degrés de liberté

1) Position du problème

2 pendules couplés → ici fil de torsion.

Hypothèses du pb : (* pendules équilibrés) (* pendules id)

* moment d'inertie id J
* masses identiques m
* longueurs identiques l
* constante de couplage C
* petits angles pour être dans le cadre de l'oscillateur harmonique

On applique le TMC aux deux pendules : schéma D

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -mgl\sin(\theta_1) - C(\theta_1 - \theta_2) \\ J\ddot{\theta}_2 = -mgl\sin(\theta_2) + C(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Si on pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}}$ et $\omega_c = \boxed{\sqrt{\frac{C}{J}}}$

Avec passage aux petits angles $\sin(\theta) \simeq \theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = (-\omega_0^2 - \omega_c^2)\theta_1 + \omega_c^2\theta_1 \\ \ddot{\theta}_2 = \omega_c^2\theta_1 + (-\omega_0^2 - \omega_c^2)\theta_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, si $\Phi = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\Phi} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_c^2 & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & -\omega_0^2 - \omega_c^2 \end{pmatrix} \Phi}$$

Rq : Avec un autre sys d'oscillateurs à 2 degrés de liberté, on obtiendrait la m̂ eq final en redéfinissant les pulsations.

2) Modes propres

Si on diagonalise la matrice précédente, on fait alors apparaître les modes propres.

$$M = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_c^2 & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & -\omega_0^2 - \omega_c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - \mathrm{Tr}(M)\lambda + \det(M) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2(\omega_0^2 + \omega_c^2)\lambda + (\omega_0^2 + \omega_c^2)^2 - \omega_c^4$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(\omega_0^2 + \omega_c^2)^2 - 4((\omega_0^2 + \omega_c^2)^2 - \omega_c^4) = (2\omega_c^2)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_\pm = -\omega_0^2 - \omega_c^2 \pm \omega_c^2 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_s &= \underbrace{\omega_0}_{\text{freq non couplé}} \\ \omega_a &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2} \end{aligned}}$$

En se plaçant dans la base propre associée, on peut considérer le problème comme deux oscillateurs harmoniques découplés de fréquence ω_a et ω_s resp.

Mise en évidence exp des modes propres.

Rq importantes : * indep des sol sym et antisym
les deux pendules oscillent à la m freq.
* une seule freq nécessaire pour décrire sys
* fréquence différente suivante mode excité

3) Battements

On s'intéresse à l'évolution d'un état initial (4)
particulier : $\boxed{\theta_1 = \theta_0 \quad \theta_2 = 0 \quad \dot{\theta}_1 = 0 \quad \dot{\theta}_2 = 0}$

Solution est combinaison linéaire des
modes propres : $\begin{cases} \theta_1 = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) + C_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) \\ \theta_2 = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) - C_a \cos(\omega_a t + \varphi_a) \end{cases}$

Avec les cond init
à $t = 0$

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 = C_s \cos(\varphi_s) + C_a \cos(\varphi_a) & (1) \\ \theta_2 = 0 = C_s \cos(\varphi_s) - C_a \cos(\varphi_a) & (2) \\ \dot{\theta}_1 = 0 = -C_s \omega_s \sin(\varphi_s) - C_a \omega_a \sin(\varphi_a) & (3) \\ \dot{\theta}_2 = 0 = -C_s \omega_s \sin(\varphi_s) + C_a \omega_a \sin(\varphi_a) & (4) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (3)+(4), (3)-(4) $\begin{cases} \varphi_s = 0 \\ \varphi_a = 0 \end{cases}$ et (2), (1) $\begin{cases} C_s = C_a \\ \theta_0 = 2C_s = 2C_a \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\theta_0}{2}\left(\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_a t)\right) \\ \theta_2 = \dfrac{\theta_0}{2}\left(\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_a t)\right) \end{cases}$$

On utilise formule trigo → Diapo

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \cos\left(\dfrac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \cos\left(\dfrac{\omega_a - \omega_s}{2} t\right) \\ \theta_2 = \theta_0 \sin\left(\dfrac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \sin\left(\dfrac{\omega_a - \omega_s}{2} t\right) \end{cases}}$$

ω_a et ω_s voisins

On a alors apparition de battements.
à la pulsation $\boxed{\dfrac{\omega_a - \omega_s}{2}}$

Mise en évidence exp battements.
On a alors besoin de deux fréq pour décrire le sys
Couplage permet transfert d'NRJ entre les deux pendules.
On va maintenant essayer de réutiliser les notions que l'on vient de mettre en place pour expliquer le phénomène d'inversion de la molécule d'ammoniac VIDEO

II) Système à deux niveaux

1) Mise en place du problème

Modélise par un double puit → schéma D
On ne considère ici que l'état fondamental pour chaque puit car sinon trop hauts en NRJ. On a donc un sys à deux niveaux $|d\rangle$ et $|g\rangle$ d'énergie E_0 chacun.
De plus, proba non nulle de passer de l'un à l'autre par effet tunnel A.
introduit couplage
On a donc le hamiltonien suivant:

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix} |\psi\rangle}$$

2) Etats propres

On applique ici la même méthode que pour les modes propres.

On diagonalise H $\rightarrow$ $\boxed{H_{dig} = \begin{pmatrix} E_0 - A & 0 \\ 0 & E_0 + A \end{pmatrix}}$

et vect propre $\boxed{\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\rangle + |g\rangle) \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\rangle - |g\rangle) \end{aligned}}$

Base sym
anti-sym
à nouveau

On observe un abaissement de l'énergie.

schéma fct d'onde $\rightarrow$ diapo

3) Inversion

On va ici faire le m̂ raisonnement que pour battements et voir si on peut faire apparaître un résultat similaire qui expliquerait inversion.

On cherche $|\psi(t)\rangle$ pour $|\psi(t=0)\rangle = |d\rangle$ dans la base des vecteurs propres $\{|+\rangle ; |-\rangle\}$.

On a donc $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(-\frac{iE_+t}{\hbar}\right)|+\rangle + \exp\left(-\frac{iE_-t}{\hbar}\right)|-\rangle\right)$

Ainsi $P_d = |\langle d|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{iE_+t}{\hbar}\right) + \exp\left(-\frac{iE_-t}{\hbar}\right)\right)\right|^2$

$$= \left|\frac{\exp\left(-\frac{iAt}{\hbar}\right) + \exp\left(\frac{iAt}{\hbar}\right)}{2}\right|^2 = \boxed{\cos^2\left(\frac{At}{\hbar}\right)}$$

Ce sont des oscillations de Rabi

Prog → observe inversions.

AN: freq d'inversion sachant $2A \simeq 10^{-4}$ eV

$$f = \frac{A}{h} \simeq 12 \text{ GHz}$$

Rq : On peut aussi généraliser le raisonnement à d'autres sys quantiques à 2 niveaux.

Ici pour ammoniac, inversion base de MASer avec champ $\vec{E}$

III) Analogies et différences

Analogies : * résolution matricielle
* fcts propres (modes ou états)
* "levée de dégénérescence"
* analogie battements et inversion.

Différences : * abaissement de l'NRJ en quantique
* freq échange dépend que de couplage en quantique

D ?

Ccl : On voit donc que par analogie avec un sys classique, on peut être lin un modèle simple permettant d'expliquer l'inversion de la molécule d'ammoniac.

Oscillateurs à 2 degrés de liberté en méca classique. Systèmes à 2 niveaux en méca quantique. Analogies et différences

1 Correction et remarques (merci Charles !)

Molécule d'ammoniac forcément en couplage faible, le mouvement de parapluie est négligeable devant la rigidité des liaisons.

Pour aller un peu plus dans l'analogie: le couplage pilote la fréquence des transferts d'énergie. On peut le voir en mécanique classique dans une limite de couplage faible en faisant un DL de $\omega_s - \omega_a$

Pour les petits angles, on peut aller jusqu'à $30°$ tranquille.

Comment il marche le capteur d'angle du pendule ? Surement un potentiomètre, c'est-à-dire une résistance qui varie selon l'angle du pendule, dans laquelle on fait passer un courant constant. En mesurant la tension aux bornes de la résistance on remonte à l'angle.

Ça veut dire quoi pulsation symétrique et antisymétrique indépendante ? Pourquoi quand on injecte de l'énergie dans un mode ça va pas dans l'autre ? Les états propres symétriques et antisymétriques sont orthogonaux, car les couplages entre les deux oscillateurs (de 1 vers 2 et de 2 vers 1) sont identiques. Du point de vue quantique, on a supposé que l'hamiltonien est hermitique.

Ça marche une matrice non hermitique ? Ça traduirait quoi ? On aurait des valeurs propres complexes pour le hamiltonien, et donc une atténuation. On cherche ici à traduire une non conservation de l'énergie. Pour le cas classique, on peut aussi faire des couplages non identiques même si ça reste tout aussi exotique.

Quelle conséquence ça aurait pour les fonctions d'onde ? Les états ne vont plus être normalisés. Il y aura perte d'information vers des degrés de liberté extérieurs qu'on ne contrôle pas vraiment.

A quoi il va être lié le θ_0 ? à l'amplitude des battements, elle peut être aussi grande que l'on veut. C'est une différence avec la molécule d'ammoniac : le vecteur d'état des pendules n'obéit pas à une condition de normalisation.

L'énergie du pendule 1 se transfert vers le pendule 2 puis inversement au cours du temps. On peut faire l'analogie avec la probabilité de transition. La probabilité de transition est en quelque sorte relié à l'énergie avec la probabilité d'émission / d'absorption d'un photon.

" abaissement d'énergie " : on n'a pas changé la géométrie du potentiel, on a fait que baisser un mur. Un peu compliqué de justifier une baisse d'énergie du coup.

Qu'est-ce que ça pourrait être un système à deux niveaux en méca q ? Tout ce qui ressemble à un spin $\frac{1}{2}$, et beaucoup de transitions en physique atomique.

Comment on peut approcher un problème par un système à deux niveaux ? La sélectivité des transitions, la plupart des niveaux n'étant pas accessible, permet de réaliser un système à deux niveaux effectif.

Qu'est ce qui va se passer quand on couple plus de deux oscillateurs ? On fait apparaitre plus de modes propres. Par exemple on décrit quoi si on couple N oscillateurs dans les solides ? On décrit les phonons, en physique statistique, et la propagation du son.

En mécanique quantique, on a décrit un gentil système à deux niveaux. Qu'est-ce qu'il faudrait prendre en compte comme interaction entre les particules ? L'interaction dipolaire, l'interaction avec un champ extérieur, ou encore la statistique fermion / boson.

Ça pourrait mériter d'être investigué : le cas où on couple deux oscillateurs de caractéristiques différentes.

On peut prendre quelques minutes pour exploiter un peu plus la manip et ce qu'il se passe sur l'oscillo, et discuter de l'aspect énergétique des pendules couplés.