Oscillateurs

Niveau : CPGE/L2

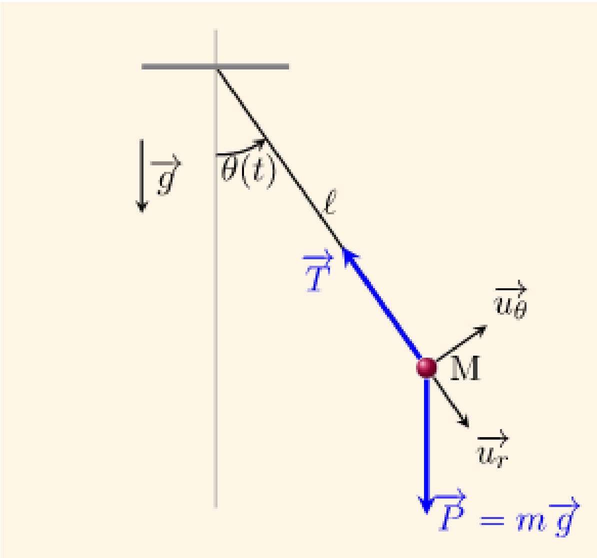
Prérequis : Lois de Newton, oscillateur harmonique, théorèmes énergétiques, électrocinétique, amplificateurs opérationnels, développement de Taylor

Introduction

Un oscillateur est un système évoluant de part et d'autre d'un équilibre stable. Les variations des grandeurs décrivant le système se font en fonction du temps. On distingue plusieurs types d'oscillateurs selon leur fonctionnement et leurs effets. Les exemples les plus courants proviennent de la mécanique classique et de l'électricité, et c'est ce que nous allons voir dans cette leçon.

I Oscillateurs en mécanique

1) Pendule simple



Le pendule subit le poids et la tension du fil, on considère qu'il n'y a pas de frottements.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $ml\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -mgsin(\theta)$

On obtient ainsi l'équation du pendule simple : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$

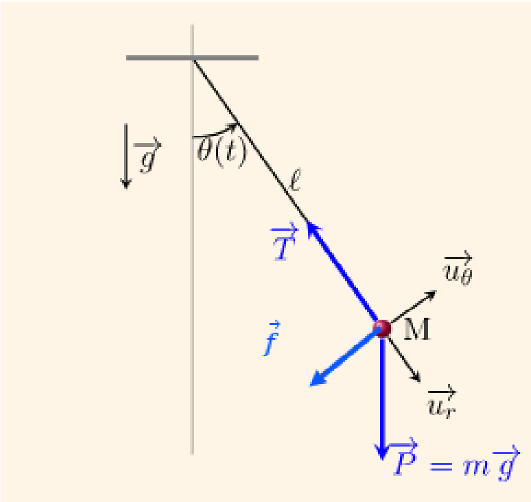
Dans l'approximation des petits mouvements, on peut écrire : $\sin(\theta) \sim \theta$

Donc : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$, on reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique déjà vue pour le système masse-ressort ou le circuit LC, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (ordre de grandeur de la période :

La solution s'écrit : $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

L'oscillateur harmonique est un cas idéal : nous avons négligé les frottements. Nous allons désormais les prendre en compte afin d'affiner le modèle du pendule.

2) Pendule amorti



On reprend le modèle précédent et on ajoute la force de frottements : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

Le travail du poids et de la tension du fil est nul. Le travail élémentaire de la force de frottements s'écrit : $\delta W = -\alpha v^2 dt$

L'énergie cinétique s'écrit : $E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

L'énergie potentielle s'écrit : $E_p = mgl(1 - \cos(\theta))$

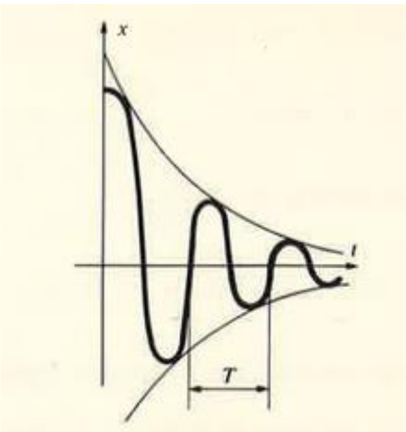
D'après le théorème de la puissance mécanique : $ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}sin(\theta) = -\alpha l^2\dot{\theta}^2$

On obtient l'équation du mouvement : $ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + mglsin(\theta) = 0$

Dans l'hypothèse des petits angles : $ml\ddot{\theta} + \alpha l\dot{\theta} + mg\theta = 0$ (équation d'un oscillateur amorti)

On introduit le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 : $\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\omega_0 \xi t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



On peut faire le parallèle avec le circuit RLC, pour lequel l'équation est : $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

L'introduction des frottements est l'équivalent mécanique de la résistance électrique, ce qui est très satisfaisant dans la mesure où ce sont ces termes qui sont responsables de la dissipation de l'énergie sous forme de chaleur.

Nous allons de nouveau négliger les frottements et considérer les non-linéarités du pendule.

3) Pendule : non-linéarités

Comme nous l'avons vue, l'équation du pendule simple est : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$

Au voisinage de la position d'équilibre $\theta = 0$, l'oscillateur est harmonique. En revanche, pour des angles plus importants, il faut envisager des termes correctifs : $\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + o(\theta^5)$

On ne s'en tiendra qu'au premier terme correctif, l'équation devient donc :

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2(\theta - \frac{\theta^3}{6}) = 0$$

Pour résoudre cette équation non linéaire, on peut penser à chercher une solution sinusoïdale de la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$, on obtient donc : $-\omega^2\theta_0\sin(\omega t) + {\omega_0}^2\theta_0 \sin(\omega t) - {\omega_0}^2\frac{{\theta_0}^3}{6}sin^3(\omega t) = 0$

Or, $sin^3(\omega t) = \frac{3}{4}\sin(\omega t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega t)$

La présence du terme non linéaire entraîne l'apparition d'une harmonique de pulsation triple 3ω, dont l'amplitude, de l'ordre de ${\theta_0}^3$, est beaucoup plus faible. Il faudrait donc chercher la solution sous la forme : $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) + \theta_1 \sin(3\omega t)$, avec $\theta_1 \ll \theta_0$. Mais en reportant cette solution dans l'équation, on obtiendrait de nouvelles harmoniques de fréquence 5ω, 7ω, 9ω et d'amplitudes toujours plus faibles. En résumé, la solution de l'équation semble être de la forme :

$\theta(t) = \theta_0(\sin(\omega t) + \varepsilon_1 \sin(3\omega t) + \varepsilon_2 \sin(5\omega t) + \ldots)$, avec $1 \gg \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 \gg \ldots$

Le terme non linéaire crée ainsi une multitude d'harmoniques, l'évolution n'est plus sinusoïdale. On remarque par ailleurs que le spectre de θ ne contient que les harmoniques impaires. Cela provient de la symétrie du système par rapport à la position d'équilibre $\theta = 0$. En effet, au bout d'une demi-période par rapport à une position quelconque, le pendule se trouve dans une position symétrique :

$\theta\left(t + \frac{T}{2}\right) = -\theta(t)$ ➔ pour tout n, $A_n \sin\left(n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right) = -A_n \sin(n\omega t)$

➔ $A_n \sin(n\omega t + n\pi) = -A_n \sin(n\omega t)$

Donc $A_n = 0$ pour n pair.

Déterminons la période du phénomène (ou la pulsation fondamentale ω). On reporte l'expression de $\theta(t)$ dans l'équation et on néglige les termes en ε. On obtient alors : $-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega^2{\theta_0}^2}{8} = 0$

Ainsi, $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{{\theta_0}^2}{8}}$, et comme $\theta_0 << 1$, $T \approx T_0(1+\frac{\theta_0^2}{16})$ (formule de Borda) avec T_0 la période de l'oscillateur harmonique. En résumé, si l'amplitude n'est pas assez faible, l'oscillateur est anharmonique : la période de l'oscillation dépend de l'amplitude (pas d'isochronisme) et les termes non linéaires génèrent de nouvelles fréquences (le signal est alors composé d'harmoniques).

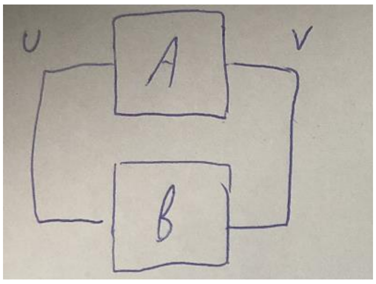
Comme on vient de le voir, la présence de phénomènes non linéaires implique qu'une auto-oscillation ne peut être purement sinusoïdale, son spectre possède forcément des harmoniques. Ce résultat est généralisable à l'électronique, où des oscillateurs auto-entretenus sont présents par exemple dans les montres à quartz et permettant ainsi la mesure du temps.

Autre possibilité : traiter l'aspect énergétique et ne pas faire la formule de Borda

II Oscillateurs électroniques

1) Oscillateur quasi-sinusoïdal

Un oscillateur est un système qui présente une variation périodique d'une de ses grandeurs sans source périodique.



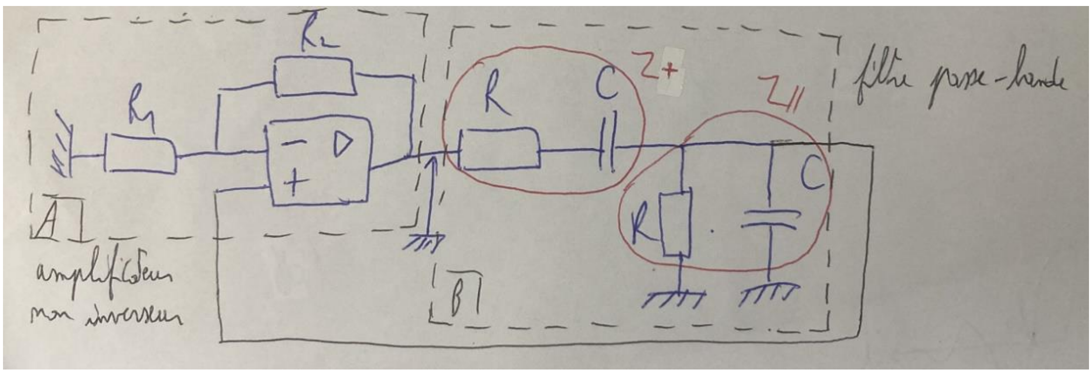
$v = Au$ et $u = Bv$ donc : $vu = ABuv$ → $v = ABv$, $v(1-AB) = 0$

Pour avoir $v \neq 0$, il faut 1 – AB = 0. Les éventuelles pertes sont compensées par A.

La fonction de transfert s'écrit : $H(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1-A(j\omega)B(j\omega)}$

<u>Critère de Barkhausen</u> : un système bouclé peut osciller spontanément, il existe ω_0 réel tel que $A(j\omega_0)B(j\omega_0) = 1$.

2) Exemple : oscillateur de Wien



Étude fréquentielle :

Le bloc A est un amplificateur non inverseur, le gain est $A = \frac{u}{v} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

On cherche la fonction de transfert du bloc B :

$H_B = \frac{v}{u} = \frac{Z_{//}}{Z_{//} + Z_{+}} = \frac{1}{1 + Z_{+} Y_{//}}$, avec $Y_{//} = \frac{1}{Z_{//}}$ l'admittance

On a donc : $\frac{v}{u} = \frac{1}{1 + (R + \frac{1}{j\omega C})(\frac{1}{R} + j\omega C)} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + (1 + jRC\omega)^2} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $Q = \frac{1}{3}$ et $H_0 = \frac{1}{3}$

On cherche ω_r tel que $A(j\omega_r)B(j\omega_r) = 1$: $\frac{jA\tau\omega_r}{1 + 3\tau\omega_r - (\tau\omega_r)^2} = 1$

Donc : $(j\tau\omega_r)^2 + j(3-A)\tau\omega_r + 1 = 0$

Pour avoir une solution réelle, il faut que $A = 3$ et $\omega_r = \omega_0$

Étude temporelle :

D'après la loi des mailles : $u = Ri + u_{C_1} + v$, de plus $i = C\frac{du_{C_1}}{dt}$

En dérivant la loi des mailles, on obtient : $\frac{du}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{dv}{dt}$

D'après la loi des nœuds : $i = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt}$

$\frac{du}{dt} = 3\frac{dv}{dt} + RC\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{RC} = A\frac{dv}{dt}$, on obtient donc : $R^2C^2\frac{d^2v}{dt^2} + (3 - A)RC\frac{dv}{dt} + v = 0$

On voit que si A = 3, on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique.

Conclusion

Dans cette leçon, nous avons vu différents types d'oscillateurs, en mécanique et en électronique. Nous avons mis en évidence les limites du modèle de l'oscillateur harmonique dans le cas du pendule et nous l'avons amélioré, en réalité il faut prendre en compte à la fois les frottements et les non-linéarités. Les oscillateurs ont de nombreuses applications : on peut citer les montres à quartz ou la modulation de fréquences, par exemple dans le cas du synthétiseur DX7 de Yamaha.

Bibliographie

-BFR Mécanique, chapitres 13 et 14

-Brasselet Mécanique, chapitres 3 et 4