Particules dans un champ électromagnétique

Valentin DUMAIRE

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : lois de Newton, électrostatique, magnétostatique, nombre de Reynolds

Introduction

Le mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique est un sujet important du fait du grand nombre d'applications qui l'utilisent. En 1897, Thomson prouve expérimentalement l'existence des électrons, prédite par Stoney en 1874. La même année, il énonce le modèle de l'atome qui portera son nom. Ses recherches lui ont valu le prix Nobel en 1906. Nous allons d'abord nous intéresser à des particules quelconques plongées dans un champ électrique uniforme.

Pour rappel, la force de Lorentz s'écrit : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, on se place dans le cas non relativiste.

I Particules dans un champ électrique uniforme

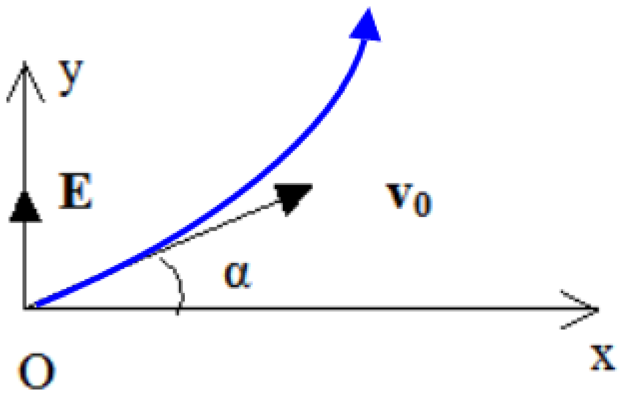
1) Accélération par un champ électrique

On considère une particule de masse m, de charge q et de vitesse $\vec{v}$ en un point M.

On se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen et on utilise les coordonnées cartésiennes. Bilan des forces : la particule subit le poids et la force de Lorentz.

$|\vec{P}| = mg \sim 10^{-29} N$ pour un électron, alors que $|q\vec{E}| \sim 10^{-15} N$ (pour un champ d'environ 10^4 V.m^{-1})

On peut donc raisonnablement négliger le poids.



Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$

Ainsi, $\vec{v}(t) = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v_0}$ et $\overrightarrow{OM} = \frac{q}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v_0}t$ en considérant que la particule est en O à t = 0.

En projetant selon $\vec{e_x}$, et $\vec{e_y}$, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos(\alpha) \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\, sin(\alpha) \end{cases}$$

Remarque : on obtient des équations similaires à la chute libre.

Pour trouver la trajectoire de la particule, on élimine t : $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$

Ainsi, $y = \frac{qE}{2m{v_0}^2 cos^2(\alpha)}x^2 + x\tan(\alpha)$ (parabole)

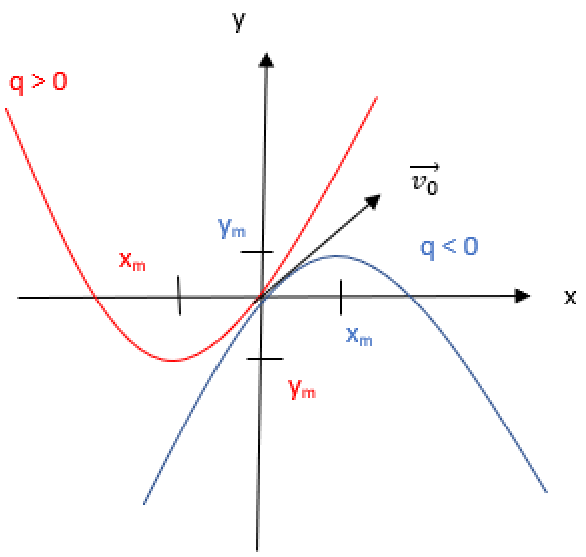
Pour accélérer une particule sans la dévier, il faut que $\overrightarrow{v_0}$ soit parallèle à $\vec{E}$, soit α = 90°

Ainsi, $y(t) = \frac{qE}{2m}t^2 + v_0 t$ (mouvement rectiligne accéléré)

(mouvement uniformément varié si l'angle entre $\overrightarrow{v_0}$ et $\vec{E}$ est inférieur à 90°, si cet angle est supérieur à 90° la particule rebrousse chemin)

La trajectoire est caractérisée par un sommet qui correspond à un extrémum de y, on cherche donc des valeurs de x qui annulent $\frac{dy}{dx}$.

On trouve $x_m = -\frac{mv_0^2 \cos(\alpha)\sin(\alpha)}{qE}$ et $y_m = -\frac{m{v_0}^2 sin^2(\alpha)}{2qE}$



Animation : jouer sur les valeurs du champ électrique et de la vitesse pour montrer ce qui se passe

2) Modèle de Drude

On considère maintenant les électrons dans un métal, de densité n. On modélise l'agitation thermique des électrons et leurs collisions entre eux et avec les cations par une force de frottements : $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$

On reprend le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron en ajoutant la force de frottements, on obtient :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

Soit : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

Donc $\vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0}e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{e\tau}{m}\vec{E}$

Pour t >> τ, $\vec{v} \sim -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$

Les électrons transportent un courant représenté par la densité volumique : $\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$

On pose $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$

Or $i = jS$ et $U = El$ → on retrouve la loi d'Ohm U = Ri, $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ est en fait la loi d'Ohm locale.

Application numérique pour le cuivre : $\gamma = 6.10^7$ S.m^{-1}, M = 63,5 g.mol^{-1}, $\rho = 9.10^3$ kg.m^{-3}

m = 9,1.10^{-31} kg, e = 1,6.10^{-19} C

Donc τ = 2,5.10^{-14} s

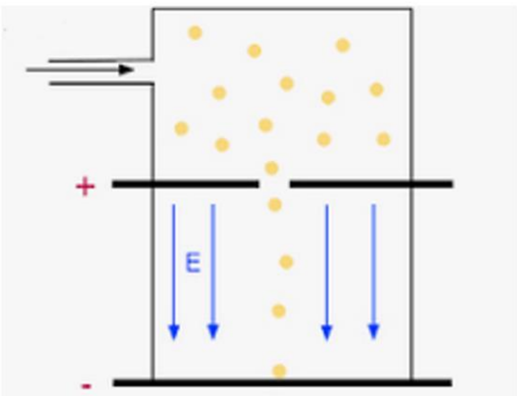
La loi d'Ohm est applicable dans les métaux si la durée caractéristique d'évolution du champ électromagnétique est très supérieure à τ.

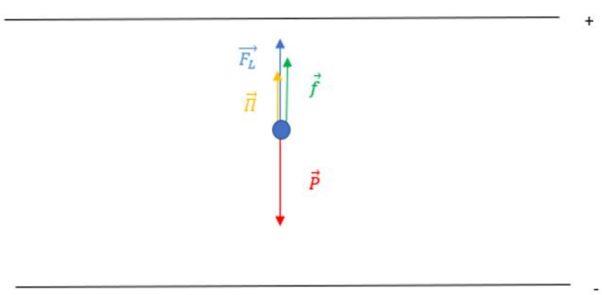
On va maintenant s'intéresser à des particules à plus grande échelle.

3) Expérience de Millikan

L'expérience de la goutte d'huile, réalisée par Millikan au début du XXe siècle, consiste à pulvériser de minuscules gouttes d'huiles électrisées entre les deux électrodes d'un condensateur plan chargé.

On considère une goutte d'huile, on se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. La goutte est soumise au poids, à la poussée d'Archimède, à la force de Lorentz et à une force de Stokes.





Le PFD s'écrit : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F_L} + \vec{f}$

Ainsi, $m\frac{d\vec{v}}{dt} + 6\pi\eta R v = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_h - \rho_{air})g - qE$

Donc $v = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_h - \rho_{air})g - qE}{6\pi\eta R}\left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}\right)$

La vitesse limite s'écrit : $v_{lim} = v_0 - \frac{qE}{6\pi\pi R}$, v_0 est la vitesse en champ nul.

On peut alors mesurer la charge : on annule la tension aux bornes du condensateur et on mesure v_0, puis on fait varier le champ électrique de manière à immobiliser la goutte, on peut alors remonter à la charge q.

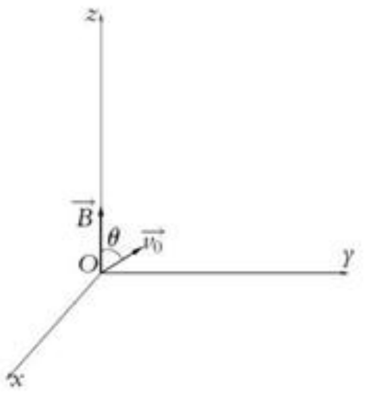
Millikan a observé expérimentalement, en irradiant les gouttes par rayons X, que les valeurs d'ionisation étaient toutes des multiples de la charge élémentaire.

II Particules dans un champ magnétique uniforme

1) Champ magnétique seul

On considère une particule de masse m, de charge q et de vitesse $\vec{v}$. On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on utilise les coordonnées cartésiennes. On néglige le poids, la particule n'est donc soumise qu'à la force de Lorentz. Le PFD s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$



Particule de masse m, charge q, vitesse initiale $\vec{v}_0$, non relativiste

$$\vec{B} = B\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v}_0 = v_0(\cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

Donc $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{q}{m}\vec{B}\wedge\vec{v} = \vec{\Omega}\wedge\vec{v}$, $\Omega_c = \frac{|q|B}{m}$ est la pulsation cyclotron

Pour rappel, la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas, l'énergie cinétique d'une particule dans un champ magnétique est donc constante. On ne peut pas accélérer une particule avec un champ magnétique mais simplement dévier sa trajectoire.

En projetant le PFD, on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Donc : v_z = cste

On pose u = x + iy

Ainsi, $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \frac{qB}{m}(\dot{y} - i\dot{x}) = -i\frac{qB}{m}\dot{u}$

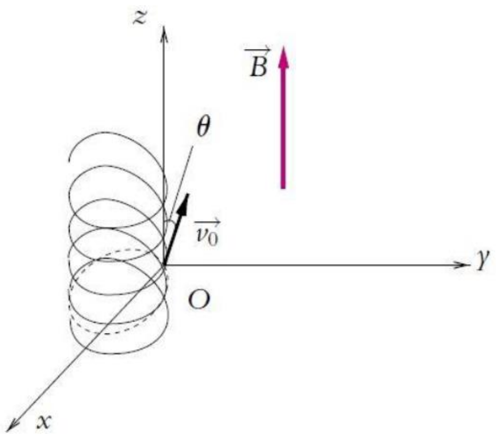
Donc $\dot{u} = \dot{u}(0)e^{-i\Omega_c t} = iv_0 \sin(\theta) e^{-i\Omega_c t}$

$u = \frac{-v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c} e^{-i\Omega_c t} + K$, or u(0) = 0, donc $u = \frac{-v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}(1 - e^{-i\Omega_c t})$

Par identification, $x(t) = \frac{-v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}(1 - \cos(\Omega_c t))$ et $y(t) = \frac{v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}\sin(\Omega_c t)$

On a dans ce plan un cercle de rayon $R = \frac{v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}$ de centre ($\frac{v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}$, 0)

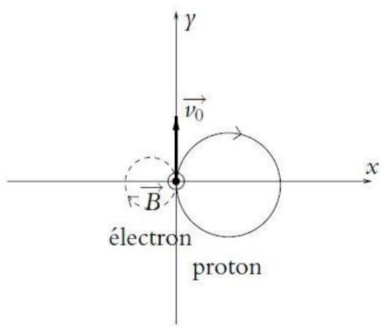
La trajectoire globale est donc une hélice : mouvement circulaire translaté selon z, avec un pas de $v_0 \cos(\theta)\frac{2\pi}{\Omega_c}$



Remarque : le signe de la charge de la particule modifie le sens de parcours de l'hélice.

Pour un électron, en prenant B = 0,1 T, $\Omega_c = 1,8.10^{10}$ rad.s^{-1} et R = 0,6 mm.

Pour un proton, $\Omega_c = 9,5.10^{6}$ rad.s^{-1} et R = 1 m.

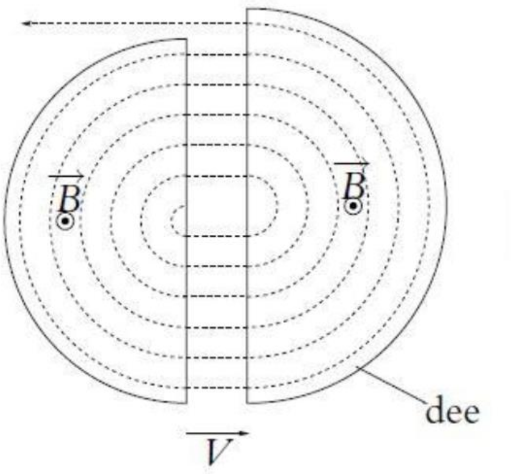


Pour un électron, le rayon de gyration est plus petit et le sens de parcours est inversé.

Animation : jouer sur les valeurs du champ magnétique et de la vitesse pour montrer ce qui se passe

On va maintenant s'intéresser à ce qu'il se passe en couplant le champ magnétique avec un champ électrique.

2) Étude du cyclotron



Dans chaque dee règne un champ magnétique uniforme. Une différence de potentiel accélère les électrons à chaque fois qu'ils passent entre les deux.

Pour éviter la décélération, la différence de potentiel s'inverse à chaque passage, elle est sinusoïdale de pulsation Ω_c. Ce dispositif présente deux avantages : on peut accélérer les électrons sans appliquer une énorme différence de potentiel (puisqu'ils repassent plusieurs fois entre les deux dees), le dispositif est compact.

Pour B = 0,1 T et R = 1m, f_c = 1,5 MHz, v = 10^7 m.s^{-1} (proton)

La différence à appliquer pour atteindre cette vitesse est : $U = \frac{mv^2}{2q} 522kV$

Conclusion

Nous avons vu les effets des champs électrique et magnétique seuls ou couplés sur la trajectoire d'une particule. Nous avons également établi le modèle de Drude, permettant de retrouver la loi d'Ohm et étudié l'effet d'un champ électromagnétique sur des particules dans un cyclotron.

Bibliographie

-Dunod, Tout en un MPSI-PTSI, p651

-Électromagnétisme, Roux, p103

-animation : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/general.php

Questions/remarques

- Quelle valeur de E pour l'ordre de grandeur et pourquoi ?
- ➔ 10^4 V.m^{-1}, typiquement dans un orage E est de l'ordre de 10^6 V.m^{-1} (voir champ disruptif de l'air)
- Que représente la force de frottements dans le modèle de Drude ? Hypothèses du modèle ?
- Incertitudes sur l'expérience de Millikan ?
- ➔ Différence de masses volumiques, vitesse de chute libre
- Caractéristiques du synchrotron ? Synchrotron pas loin ? Fonctionnement du synchrotron ?
- ➔ Champ magnétique dépend du temps (champ électrique aussi), trajectoire grossièrement circulaire. Synchrotron Soleil → rayonnement synchrotron : rayonnement électromagnétique émis par les particules
- Champ magnétique que l'on est capable de faire ? Champ magnétique dans les étoiles ?
- ➔ De l'ordre de 10 T, étoiles à neutrons : 10^{11} T
- Comment faire un piège ?
- ➔ Champ magnétique variable, la Terre piège les particules → aurores boréales…
- Que faut-il pour faire une fusion ? Température au cœur des étoiles ?
- ➔ Soleil : 10^7 K
- Qu'est-ce qu'un tokamak ?
- ➔ Tore magnétisé (plasma chauffé → fusion)

-Le correcteur aurait fait soit le modèle de Drude, soit l'expérience de Millikan (au pire faire l'un des deux sur diapo pour gagner du temps et faire un III)

-Faire variation d'énergie pour un champ électrique et pour un champ magnétique

-Attention : le cyclotron ne combine pas vraiment les champs électrique et magnétique puisque les particules ne les subissent pas en même temps ! Le cyclotron est toutefois un bon exemple

-Pour le III, faire la bouteille magnétique et l'appliquer à la Terre

-Attention au titre, ici c'est « particules », la leçon aurait été différente si ça avait été « particule » (pas question d'utiliser le modèle de Drude dans ce cas-là, qui est hors-sujet)