# LP0660: Exemples de phénomènes quantiques

Biblio:
- Physique tout en un PC/PC*, J'intègre Dunod
- Cours de Basdevant de Polytechnique
- Physique quantique tome 1 Fondements, Michel Le Bellac.

Niveau: L3

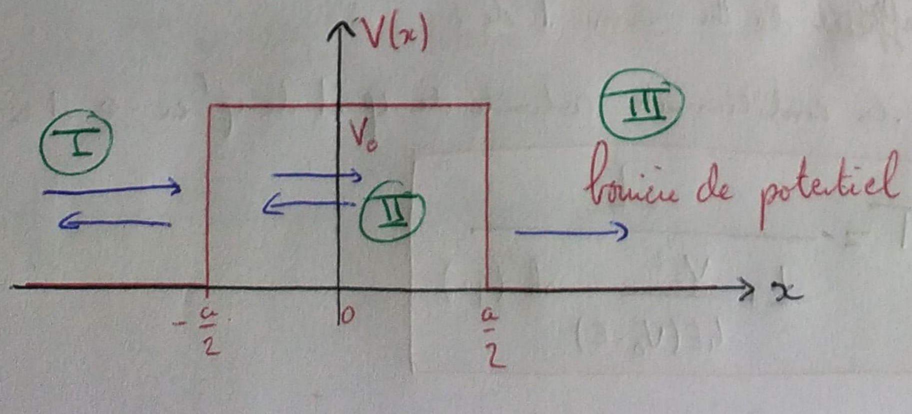
Prérequis:
- Base de la mécanique quantique : éq de Schrödinger, espace de Hilbert du spin $\frac{1}{2}$
  formalisme bra/ket

Intro : La mécanique quantique a été introduite au début du XXème siècle afin d'expliquer de nombreux phénomènes expérimentaux qui n'était jusque-là pas compris avec la physique classique. On va au cours de cette leçon présenter deux phénomènes purement quantiques qui sont intéressants car ils possèdent des applications concrètes et très utilisées : effet tunnel et la résonance magnétique.

## I- Effet tunnel (Physique Tout en un PC/PC*)

### 1) Présentation du problème

- effet tunnel : mise en évidence de la pénétration de la fonction d'onde dans une région normalement inaccessible avec la mécanique classique (derrière une barrière de potentiel)



- fonction d'onde étudiée : $\varphi(x,t) = \varphi(x)\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ (état stationnaire car V ne dépend pas de t)

- Eq de Schrodinger indépendante du temps : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$

## 2) Résolution de l'éq de Schrodinger

- Dans les zones I et III : $V(x) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = E\varphi(x) \iff \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_I(x) &= A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \varphi_{III}(x) &= A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}\end{aligned}}$$ où $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

- Dans la zone II : $V(x) = V_0$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{(V_0 - E)2m}{\hbar^2}\varphi$$

On suppose $E < V_0$ : $\boxed{\varphi(x) = A_2 e^{Kx} + B_2 e^{-Kx}}$ où $K = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

- Physiquement : $B_3 = 0$

$\boxed{\varphi_{III}(x) = A_3 e^{ikx}}$ ⟹ onde non nulle après la barrière de potentiel.

Animation : ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/gbon.html

On peut observer que après la barrière de potentiel : l'onde n'est pas nulle.

- On peut aussi calculer la probabilité de transmission T

pour cela, il faut utiliser les conditions de continuité de $\varphi$ et de $\varphi'$ en $-\frac{a}{2}$ et en $\frac{a}{2}$

Après calcul, on obtient :

$$\boxed{T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\, sh^2(Ka)}}$$

Rq : * La probabilité de transmission $T$ n'est jamais nulle pour une barrière réelle.

↳ effet tunnel.

dû à l'existence de l'onde evanescente après la première barrière dans la zone 2.

cf Animation : montrer l'onde evanescente dans la zone 2.

* On peut remarquer que $T \nearrow$ si : $V_0 \searrow$

$E \nearrow$

$a \searrow$

$m \searrow$

cf animation : faire varier les paramètres.

• Approximation de la barrière epaisse : si $a \gg \delta = \frac{1}{q}$

↳ $\boxed{T \simeq \frac{16\,E\,(V_0 - E)}{V_0^2}\, e^{-\frac{2a}{\delta}}}$ car $sh^2(qa) \simeq \frac{e^{2qa}}{4}$

AN : * electron : $m \simeq 10^{-30}$ kg. $V_0 = 4$ eV. $a = 0{,}3$ nm et $E = \frac{V_0}{2}$

↳ $\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} = \frac{\hbar}{\sqrt{m V_0}} \simeq 1{,}3 \cdot 10^{-10}$ m

↳ $T = \frac{16\left(\frac{V_0}{2}\right)^2}{V_0^2}\, e^{-\frac{2a}{\delta}} = 4\, e^{-\frac{2a}{\delta}} \simeq \underline{0{,}04}$ possible non négligeable.

* proton : $m = 10^{-27}$ kg idem

↳ $\delta = 4{,}2 \cdot 10^{-12}$ m

↳ $\underline{T \simeq 10^{-62}}$ très faible

cf diapo : tableau d'analyses numériques

## 3) Application : microscope à effet tunnel

- Mise au point en 1984 par G Binnig et H Rohrer dans les labos IBM de Zurich
  ↳ Prix Nobel de Physique en 1986

- Il permet de faire la topographie de surfaces métalliques avec une resolution lateral de 1A et une resolution verticale de 0,1A

  La resolution lateral vient du fait que l'on utilise une pointe conductrice qui se termine avec 1 seule atome (extrement fin).

- Principe : * on approche une pointe très proche d'une plaque conductrice (< 1mm)
  ↳ barrière de potentiel

  * On applique une difference de potentiel fixe entre les 2 conducteurs.

  * En approchant la pointe du conducteur, des electrons peuvent être arachés par effet tunnel
    ↳ création d'un courant : courant tunnel $I \propto e^{-\frac{2d}{\delta}}$

  * pour réaliser la topographie du conducteur, on fixe U et I ⇒ fixe la distance entre le conducteur et la pointe, ainsi en deplacant la pointe selon x et y elle va suivre le mouvement du conducteur selon z. Il suffit donc de mesurer x, y et z grâce à des piezoelectriques très precis.

Transition : on va étudier un autre phénomène quantique qui possède des applications très utile
Resonance magnétique.

# II - Résonance magnétique (Basdevant)

## 1) Présentation du problème

- On va étudier ici un système à deux niveaux le spin du proton dans un champ magnétique.

Rappel : spin $\frac{1}{2}$ : deux états propres : $|j=\frac{1}{2}; m=\frac{1}{2}\rangle = |+\rangle$ de l'opérateur $S_z$ de vp $\pm\frac{\hbar}{2}$

$|j=\frac{1}{2}; m=-\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle$

- On applique un champ uniforme : $\vec{B_0} = B_0 \vec{u_z}$

Dans la base $(|+\rangle ; |-\rangle)$, on a : $H_0 = -\vec{\mu}.\vec{B_0}$

$= -\frac{1}{2}\gamma\hbar B_0 \sigma_z$ où $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$H_0 = +\frac{\hbar}{2}\omega_0 \sigma_z$ où $\omega_0 = -\gamma B_0$. $\gamma$ : facteur gyromagnétique

$\gamma = 5{,}59$ proton.

$$H_0 = \begin{pmatrix} +\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |\pm\rangle$ sont tj états propres mais vp ont changés

Rq : $\boxed{\text{précession de Larmor :}}$ moment cinétique qui tourne autour de l'axe z.

- On applique en plus, un champ périodique : $\vec{B_1}(t) = B_1 [\cos(\omega t)\vec{u_x} + \sin(\omega t)\vec{u_y}]$

$\hat{H}_1 = -\vec{\mu}.\vec{B_1} = +\frac{\hbar}{2}\omega_1[\sigma_x \cos(\omega t) - \sigma_y \sin(\omega t)]$ où $\omega_1 = -\gamma B_1$ fréquence de nutation

$$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & +\frac{\hbar\omega_1}{2}e^{-i\omega t} \\ +\frac{\hbar\omega_1}{2}e^{+i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{a}_+ = +\frac{\hbar\omega_0}{2} a_+ + \frac{\hbar\omega_1}{2} e^{-i\omega t} a_- \\ i\hbar \dot{a}_- = \frac{\hbar\omega_1}{2} e^{i\omega t} a_+ - \frac{\hbar\omega_0}{2} a_- \end{cases}$$

On pose $b_\pm(t) = e^{\pm i\frac{\omega t}{2}} a_\pm(t)$ $\Rightarrow \begin{cases} i\dot{b}_+ = -\frac{\omega-\omega_0}{2} b_+ + \frac{\omega_1}{2} b_- \\ i\dot{b}_- = \frac{\omega_1}{2} b_+ + \frac{\omega-\omega_0}{2} b_- \end{cases}$

• On obtient un nouvelle hamiltonien indépendant du temps : $\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega - \omega_0 \end{pmatrix}$

En combinant les équa diffs, on obtient : $\ddot{b}_\pm + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_\pm = 0$ où $\Omega^2 = (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2$

On pose initialement le spin est dans l'état $|+\rangle$

donc : $$\boxed{\begin{aligned} b_-(t) &= -\frac{i\omega_1}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ b_+(t) &= \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\,\frac{\omega - \omega_0}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \end{aligned}}$$

## 2) Principe de la resonance magnétique

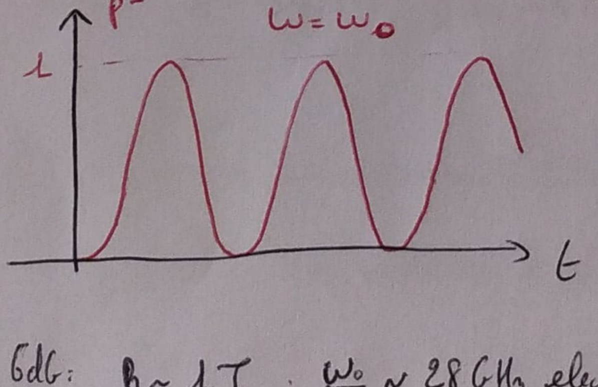
• La probabilité d'être dans l'état $|-\rangle$ à l'instant t est :

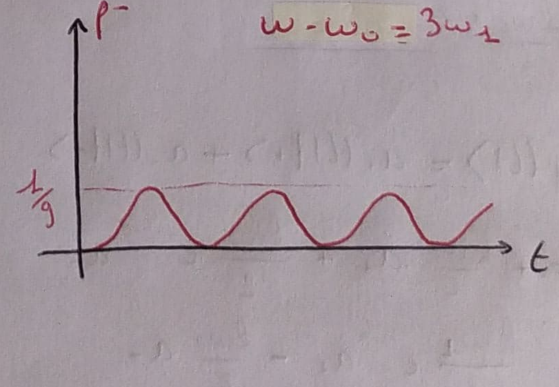
$$P^- = |\langle - | \psi(t)\rangle|^2$$
$$= |b_-(t)|^2$$

$$\boxed{P^- = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)}$$ oscillation de Rabi

On obtient un phénomène de resonance :

* si $\omega \neq \omega_0$ (très différent) : $P^-$ est très faible
* si $\omega = \omega_0$ : $\Omega = \omega_1$ : $P^- = 1$ pour $t_n = \frac{(2n+1)\pi}{\omega_1}$ où n entier. resonance
* si $\omega$ proche de $\omega_0$ : proba appreciable d'être dans l'état $|-\rangle$.




OdG : $B \approx 1\,T$ : $\frac{\omega_0}{2\pi} \sim 28\,GHz$ electron

$\sim 43\,MHz$ proton

## 3) Application : RMN

- La RMN est utilisée principalement pour déterminer la structure de molécules d'intérêt biologiques ou chimiques.

- Principe : * on place un échantillon dans un champ uniforme $\vec{B_0}$ de qques T.

  * on applique un champ de radiofréquence $\vec{B_1}(t)$ voisin de la résonance pendant $t = \frac{\pi}{\omega_1}$ ainsi les spins qui étaient tous dans l'état $|+\rangle$ passe dans l'état $|-\rangle$ si on est à résonance.

  $\Rightarrow$ inversion de population.

  * retour à l'équilibre qui engendre un champ magnétique tournant à la fréquence $\omega_0$.
  on mesure ce champs grâce à la spire RF

  * On fait la TF du signal puis on observe son spectre $\Rightarrow$ signal RMN.

- On peut remonter à la structure de la molécule étudiée car :
  * la fréq de résonance dépend des noyaux par l'intermédiaire de $\gamma$
  * pour un même noyau, la fréquence de résonance est légèrement modifiée par l'environnement chimique de l'atome : champ magnétique effectif : $B_0' = (1-\sigma) B_0$ où $\sigma$ : déplacement chimique ($\sim 10^{-6}$)
  * les interactions entre spins nucléaires voisins provoquent un clivage des fréquences de résonance en plusieurs sous fréquences $\Rightarrow$ caractéristiques des groupements chimiques.

Exemple : spectre RMN de l'éthanol.

200 MHz $\Rightarrow$ $B \simeq 5\,T$ car $1\,T \equiv 42,5$ MHz.

Ccl : On a donc vu au cours de cette leçon que des phénomènes quantiques pouvaient avoir des applications très concrètes et très utilisées, on peut rajouter l'IRM pour faire une image en 3 dimensions de la densités des graisses, liquides ... dans le corps humain.
Il existe pleins d'autres phénomènes quantiques comme : étude molécule d'ammoniac : double puits, IRM, laser, désintégration $\alpha$

## Remarques du correcteur :

- Le plan est bon, bien de faire ces applications
- Autres possibilités : faire plusieurs petites applications : quantification de l'énergie, dualité onde / corpuscule, ...
- Ne pas faire plus de calculs

## Questions :

- Pourquoi on peut utiliser l'éq de Schrodinger indép du temps dans I ?
- Comment l'obtenir ?
- Autres exemples de phénomènes quantiques ?
- Autre possibilité d'utiliser le microscope à effet tunnel ? avec z constant, I varie.
- Est ce qu'on peut avoir des oscillation de Rabi sans dépendance temporelle dans $\hat{H}$ ? Oui
- Détaillé un peu les calculs qui ont été sauté
- Autre application de l'effet tunnel ? ammoniac, radioactivité $\alpha$
- Comment s'appelle le modèle de la radioactivité $\alpha$ ? Gamow.
- Qu'est ce qu'un état lié ?