LPOB85 : Modèle du fluide parfait et applications

Biblio : • Mécanique des fluides et des ondes, BFR, Dunod (J'intègre PC)

• H prépa Exercices et Problèmes MP-PC

• Hydrodynamique physique, Etienne Guyon ; Jean Pierre Hulin ; Luc Petit.

Niveau : L3

Prérequis : • Notion de base de la mécanique des fluides : description des fluides en mouvement (dérivée Lagrangienne) viscosité, éq de Navier-Stokes, nombre de Reynolds.

• Principe fondamentale de la dynamique

Intro : Nous avons vu précédemment l'équation de Navier-Stokes cependant nous n'avons pas vu sa résolution et pour cause. Savoir si l'éq de Navier-Stokes admet une solution dans le cas général et si celle-ci est unique est un des problèmes du millénaire : problème jusque là irrésolu.
On va donc faire des approximations afin d'avoir une idée de ce ce qui se passe et du comportement de certain fluide. Le modèle que l'on va utiliser ici est le modèle du fluide parfait.
On va ensuite appliquer ce modèle à des exemples concrets.

I - Présentation du modèle du fluide parfait

1) Hypothèses du fluide parfait

• Hypothèse du fluide parfait : on néglige les phénomènes de diffusion dans le fluide : diffusion thermique mais aussi la diffusion de quantité de mouvement : viscosité.

• On considère donc que les phénomènes inertiels sont prépondérants sur les phénomènes visqueux :

c'est à dire : $\boxed{\eta \to 0}$ donc $\boxed{Re = \rho \frac{VL}{\eta} \longrightarrow +\infty}$

Exemple de nombre de Reynolds très grand : $\nu_{eau} = 1{,}007.10^{-6}\ m^2 s^{-1}$
$\nu_{air} = 15{,}6.10^{-6}\ m^2.s^{-1}$ à $T = 25°C$

air • oiseau : $L = 0{,}05\ m$, $v = 6\ m.s^{-1}$ } $Re \simeq 20\,000$

• aile d'avion : $L \simeq 3{,}5\ m$, $v \simeq 230\ m.s^{-1}$ } $Re \simeq 50.10^6$

eau • bactérie dans l'eau : $L \sim \mu m$, $V \sim \mu m.s^{-1}$ } $Re \simeq 10^{-6}$

• nageur dans l'eau : $L \simeq 1\ m$, $V \sim 1\ m.s^{-1}$ } $Re \simeq 10^6$

2) Equation d'Euler

• Rappel : éq de Navier-Stokes pour un fluide incompressible (ρ = cte dans tout le fluide)

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}\right) = -\vec{grad}\,P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

• Pour un fluide parfait : $\eta \to 0$ donc l'équation de Navier-Stokes devient l'équation d'Euler :

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}\right) = -\vec{grad}\,P + \rho\vec{g}}$$

3) Relation de Bernoulli

• Hypothèses : • modèle du fluide parfait
• fluide incompressible ρ = cte
• écoulement stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

forces volumiques conservatives autres que le poids

• Eq d'Euler : $\rho\left[\frac{1}{2}\vec{grad}(v^2) - \vec{v}\wedge(\vec{rot}\,\vec{v}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right] = -\vec{grad}\,P + \rho\vec{g} + \vec{f_v}$ $= -\vec{grad}\,e_p$

$\Leftrightarrow \rho\left[\frac{1}{2}\vec{grad}(v^2) - \vec{v}\wedge \vec{rot}\,\vec{v}\right] = -\vec{grad}\,P + \rho\vec{g} + \vec{f_v}$ car écoulement stationnaire.

On a : $\rho\vec{g} = \rho\,\vec{grad}(-gz)$ donc : $\rho\left[\frac{1}{2}\vec{grad}(v^2) - \vec{v}\wedge\vec{rot}\,\vec{v}\right] = -\vec{grad}\,P - \vec{grad}(\rho g z)$ $-\vec{grad}\,e_p$

$\Leftrightarrow \vec{grad}\left(\frac{v^2}{\rho} + P + \rho g z + e_p\right) = \rho\vec{v}\wedge\vec{rot}\,\vec{v}$

On calcule la circulation le long d'une ligne de courant : ②

$$\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho\frac{v^2}{2} + P + \rho g z + e_p\right)\cdot\overrightarrow{d\ell} = \underbrace{\int_A^B \left(\rho\, \vec{v}\,.\, \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\cdot\overrightarrow{d\ell}}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{d\ell}\, //\, \vec{v}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z + e_p = cte}$$ le long d'une ligne de courant. : relation de Bernoulli

4) Limite du modèle - Notion de couche limite

- Conditions aux limites à la surface d'un corps solide :

  * pour un fluide parfait : $\vec{v}_{solide} \wedge \vec{n} \neq (\vec{v}_{fluide}) \wedge \vec{n}_{parois}$ car il n'a pas de viscosité

  * Or pour un fluide réel : $\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{solide}$: les composantes tangentielles des vitesses du fluide et du solide doivent être égales $\Rightarrow$ Notion de couche limite.

- Couche limite : dans un écoulement laminaire, le fluide peut être considéré comme parfait sauf dans une zone proche des parois d'un solide où l'on doit prendre en compte les effets visqueux pour respecter les conditions aux limites. $\Rightarrow$ limite du modèle du fluide parfait.

- taille de la couche limite : on doit commencer à prendre en compte les effets visqueux lorsque :

$$\frac{\|\rho(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta\vec{v}\|} \simeq 1 \Leftrightarrow \frac{\rho\frac{V^2}{L}}{\eta\frac{V}{\delta^2}} \simeq 1 \Leftrightarrow \delta^2 = \frac{\eta L}{\rho V} \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}}$$

Ordre de grandeur :

* aile d'avion : $\delta \simeq 0{,}5$ mm car $L \simeq 3{,}5$ m et $Re \simeq 50.10^6$

Transition : on va maintenant appliquer le modèle du fluide parfait à des exemples concrets

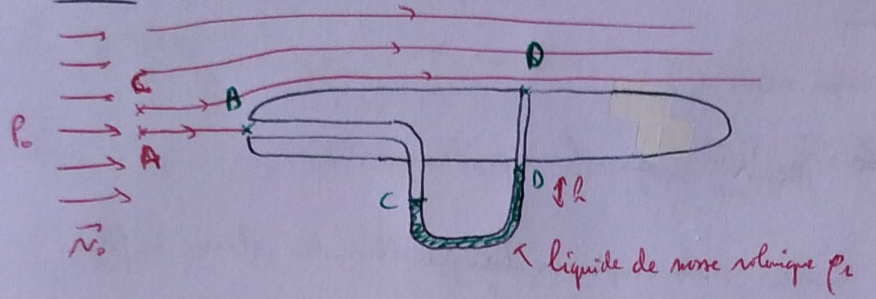
II - Applications

1) Tube de Pitot

Le tube de Pitot a pour but de mesurer la vitesse d'un écoulement en le perturbant le moins possible.

Il est notamment utilisé sur les avions, comme anémomètre pour la météorologie

Schéma :



On suppose que que les orifices ne perturbent pas l'écoulement et que la masse volumique de l'air est constante.

On suppose le fluide parfait (on néglige l'effet de la couche limite ici).

Si l'écoulement est permanent, on peut faire les approximations suivantes :

$N_B = 0$.

$N_D \simeq N_0$

On applique le théorème de Bernoulli entre les 2 lignes de courant :

- $P_A + \rho \frac{N_A^2}{2} + \cancel{\rho g z_A} = P_B + \rho \cancel{\frac{N_B^2}{2}} + \cancel{\rho g z_B} \iff P_0 + \rho \frac{N_0^2}{2} = P_B$
- $P_C + \rho \cancel{\frac{N_C^2}{2}} + \cancel{\rho g z_C} = P_D + \cancel{\rho \frac{N_D^2}{2}} + \cancel{\rho g z_D} \iff P_D = P_0$

donc : $\boxed{P_B - P_D = \rho \frac{N_0^2}{2}}$

- On considère l'air au repos dans les tubes et on néglige l'effet de l'altitude sur la masse volumique

  $\Rightarrow$ pression au niveau de l'eau est la même que en B et en D

- Equilibre hydrostatique dans le tube : $P_B - P_D = \rho_1 g H$

donc : $P_B - P_D = \rho_1 g h = \rho_{air} \frac{N_0^2}{2} \iff \boxed{N_0 = \sqrt{\frac{2 \rho_1 g H}{\rho_{air}}}}$

AN : h pour un anémomètre (météo) et pour un fluide comme l'eau : $h \simeq 7$ mm

pour avion $h \simeq 3,5$ m pas adapté.

2) Tube de Venturi

- On étudie l'écoulement dans un étranglement pour un écoulement à débit constant

Présentation du système avec la manip.

On fait les mêmes hypothèses que pour le tube de Pitot.

* Bernoulli sur la ligne de courant passant par A_1 et A_2

$$P_{A_1} + \frac{\rho}{2} v_{A_1}^2 + \rho g \cancel{z_{A_1}} = P_{A_2} + \frac{\rho}{2} v_{A_2}^2 + \rho g \cancel{z_{A_2}} \Leftrightarrow P_{A_1} + \frac{\rho}{2} v_1^2 = P_{A_2} + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

On a : $P_{B_1} = P_{A_1}$ et $P_{B_2} = P_{A_2}$ car ρ_{air} est faible devant ρ_0

hydrostatique : $P_{B_1} - P_{B_2} = \rho_0 g h$

En considérant que $\rho_A = \rho_0 \Rightarrow \rho_0 g h = \frac{\rho_{air}}{2}(v_2^2 - v_1^2)$

- débit constant : $v_1 S_1 = v_2 S_2 = Q \Rightarrow 2\rho_0 g h = \rho_{air} v_2^2 \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = P_{A_1} - P_{A_2}$

donc $2\rho_0 g h = \rho_{air} Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)$

Si $S_1 > S_2 \Rightarrow P_{A_1} > P_{A_2}$

donc $z_{A_1} > z_{A_2}$

d'où $\boxed{Q = \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{2\rho_0 g h}{\rho_{air}}}}$

On peut donc en déduire le débit dans le tube.

Conclusion : Avec le modèle de l'écoulement parfait, on a pu simplifier l'éq de Navier-Stokes et en tirer des applications très utiles qui sont utilisées dans des dispositifs technologiques sur des avions, en météorologie, ... Ce modèle peut donc donner des résultats concluants.

Malheureusement ce modèle a ses limites, il n'est valable que pour des Re très grands mais aussi en dehors des couches limites.

Remarques du correcteur

- Préciser l'hypothèse isentropique du modèle du fluide parfait
- Connaître un exemple d'application (ex: vidange de Toricelli)
- Connaître la nuance entre modèle du fluide parfait et écoulement parfait.
- Connaître exemples d'autres forces volumiques (Bernoulli) (ex: force de Laplace, accélération d'entraînement et de Coriolis, ...)
- Le plan est bon et le contenu est assez bon.