LP : Intégrales premières du mouvement. Lois de conservation.

Prérequis :

— Principe fondamentale de la dynamique
— Cinématique (référentiel polaire)
— Théorèmes de la mécanique (TPM, TRC, TMC)
— Moment d'inertie d'un solide

Niveau : CPGE

Bibliographie :

☞ *Tout en un Physique PCSI* - Dunod, B. Salamito [1]
☞ *Physique Spé* - Tec et Doc, H. Gié [2]

Pendule : [1] p589 pendule simple, p619 approche énergétique.

Intégrales premières du mvt
Lois de conservation

Insister sur les lois de conservation

→ Il faut que ça soit clair dans la leçon la différence entre grandeur conservée et lois de conservation.

- Energie : $\frac{dE_m}{dt} = 0$
- Moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_O}{dt}(\hat{F}) = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}$
- Quantité de mouvement : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$

Bien dire que la grandeur est conservée quand le terme de droite vaut zéro.

- Quel intérêt d'avoir des lois de conservation en physique ?

→ Illustration avec le pendule pesant (ou simple).

On peut décrire le système avec un seul degré de liberté θ, donc on utilise un raisonnement énergétique.

Expliquer que PFD ≡ 3 équations à plusieurs inconnues
TEM ≡ 1 équation à une inconnue.

→ on retrouve l'éq. du mouvement en deux coups de cuillère à pot.

- Il faut absolument illustrer les 3 lois de conservation dans la leçon.

Le plan que je propose :

I. Conservation de l'énergie mécanique

1) Rappels

2) Pendule pesant

L'idée de cette partie :

→ Faire des rappels sur l'EM

$\left(E_m = E_c + E_p = cst \atop \hookrightarrow E_p = \sum E_{p_i} \right) \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

→ Def d'intégrale première du mouvement

→ Montrer qu'on est très propre pour la def du système (pendule pesant)

→ Expliquer l'intérêt d'un raisonnement énergétique

Arriver à :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{mgd}{J(O_z)}}_{\omega_0^2} \sin\theta = 0}$$

Etablir l'intégrale première du mvt en multipliant par $\dot{\theta}$, retrouver quelque chose d'homogène à une énergie mécanique (jouer la surprise !) et trouver une énergie potentielle et cinétique. Em conservée, transfert d'énergie entre Ec et Ep.

Transition : Vous savez qu'il existe d'autres lois de conservation

$\boxed{\text{Sur dispo}}$

Quelles utilisations concrètes des lois de conservation ?

II. Utilisation des lois de conservation

1) Diffusion Compton

→ Conservation de l'impulsion

→ Conservation de l'énergie

2) Système Terre - Lune

→ 6 degrés de libertés ⇒ 1 degré

- Conservation du moment cinétique
- Conservation de l'impulsion

Intégrales premières du mvt
Lois de conservation

→ Grandeur conservée au cours du mouvement, obtenue en intégrant une fois le PFD.

→ ~~Lois de~~ conservation introduites via la mécanique Newtonienne des points matériels obéissent à des principes de conservation qui ~~dépassent largement~~ ont été étendues à l'ensemble de la physique.
$L, \vec{P}, E_m$

Mouvement conservatif, E_m quantité qui se conserve au cours du mouvement. C'est qui est fonction de
- la position
- dérivée première (vitesse) } => Intégrale première du mouvement

Transition : Utilisation de cette loi de conservation dans le cas du pendule simple

I - Conservation de l'énergie mécanique

1) Rappel

~~$E_m = E_p + E_c$~~

→ Système soumis uniquement à des forces conservatives ~~Dissip~~

$E_p = \sum E_{pi}$ dont dérivent les forces conservatives
E_c = Énergie cinétique

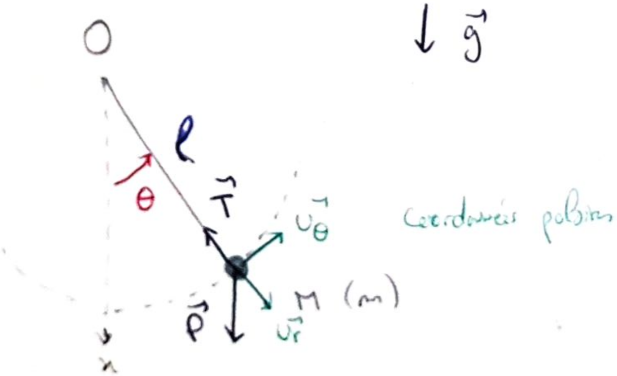
$\Rightarrow E_m = E_p + E_c = Cst$

(1)

2) Pendule simple

Fil inextensible, sans masse, sans rigidité (idéal)

~~Mvt dans un ref~~



- Système : - fil idéal
  - solide ponctuel M de masse m
- Référentiel : Terrestre supposé Galiléen
  on néglige les frottements dus à l'air.

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\ell\dot{\theta})^2$

$E_p = mg(\text{altitude}) = mg\ell(1-\cos\theta)$

$E_p(\theta)_{\theta=0} = 0$

$E_m = \frac{1}{2} m (\ell\dot{\theta})^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = Cst$

$\sim \frac{1}{2} m (\ell\dot{\theta})^2 + mg\ell\,\theta^2 = cst$ ⊛ petits angles

$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

⊛ $\theta(0) = \theta_0$
$\dot{\theta}(0) = 0$
~~$\dot{\theta}^2$~~ $\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2 = \omega_0^2\theta_0^2$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

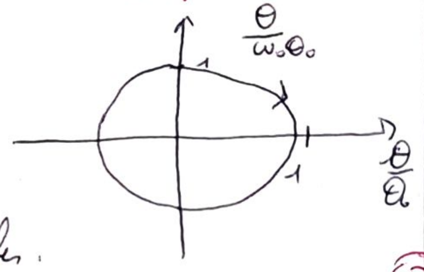
→ Illustre l'intérêt de l'approche énergétique
Adaptée car syst 1 seul degré de liberté

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2\theta_0^2} + \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = 1}$$

Cercle de centre 0 de rayon 1

Intégrale première du mouvement (grandeur conservée) obtenue en intégrant le PFD

↳ $\frac{d}{dt}$: $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$



→ Portrait de phase $\boxed{\text{Diapo}}$ dans la limite des petits angles.

Conversion entre énergie cinétique et énergie potentielle pour une énergie mécanique constante (mouvement conservatif)

$\boxed{\text{Animation}}$

$\boxed{\text{Diapo}}$ 2 →

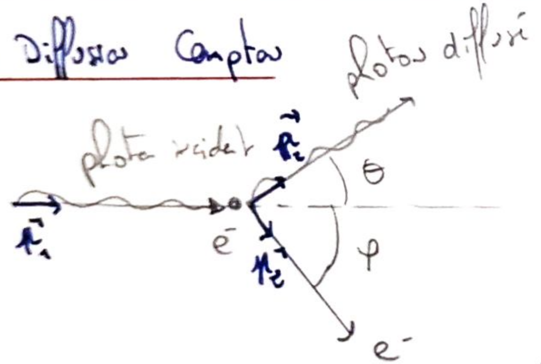
Autres grandeurs conservées :

- Quantité de mouvement : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$
- Moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$

2

II. Utilisation des lois de conservation

1) Diffusion Compton



Lumière peut se comporte comme un faisceau de particules

1923

Allongement de la longueur d'onde.

* Conservation de l'impulsion :

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{p}_e$$

$$\rightarrow p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 p_2 \cos\theta \quad (1)$$

* Conservation de l'énergie :

$$E = E' \Rightarrow \underbrace{p_1 c}_{\gamma} + \underbrace{m_e c^2}_{e^-} = \underbrace{p_2 c}_{\gamma} + \underbrace{\sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2}}_{e^-}$$

$(E_{tot} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2})$

Expression relativiste de l'énergie.

$$p_e^2 = (p_1 - p_2)^2 + 2(p_1 - p_2) m_e c \quad (2)$$

$$\Rightarrow p_1 p_2 (1 - \cos\theta) = (p_1 - p_2) m_e c$$

Longueur d'onde de De Broglie : $p = \frac{h}{\lambda}$

$\lambda_c^e = 0{,}024$ Å

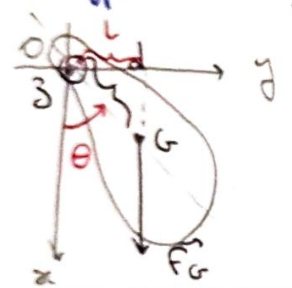
$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)}$$

$1-\cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Résultat relativiste ~~à~~ au résultat quantique mais en utilisant la mécanique classique

2) Pendule pesant

Même hypothèse sauf que le solide est de ~~masse~~ forme qq. moment d'inertie $J(O_3)$



$J(O_3)$ son moment d'inertie

$\vec{\mathcal{M}}(\vec{F_G}) = -\vec{F} \wedge \vec{OG}$!

$= \cancel{E} \wedge -mg\, L\, \vec{u_3}$

$= \ominus mg\, d \sin\theta\, \vec{u_3}$

Tend à le ramener sur sa posit° d'équilibre.

Loi du moment cinétique // O_3.

$\frac{dL(O_3)}{dt} = -mgd\sin\theta \qquad L(O_3) = J(O_3)\dot{\theta}$

$\Rightarrow \cancel{ED}\ \boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{mgd}{J(O_3)}}_{\omega_0^2} \sin\theta = 0}$

Si on multiplie par $\dot{\theta}$:

$J(O_3) = kg \cdot m^2$

$\dot{\theta} : \frac{1}{s}$

$J(O_3)\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgd\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{J(O_3)}{dt}\dot{\theta}^2 - mgd\frac{d}{dt}\cos\theta = 0$

~~$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \cos}_{E_m}\right) = 0$~~

$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} J(O_3)\dot{\theta}^2}_{\text{énergie cinétique}} - mgd\cos\theta}_{E_m}\Big) = 0$ ← énergie potentielle

Intégrale première du mvt homogène à une énergie.

Énergie mécanique conservée

Conclusion :

3 grandeurs mécaniques conservées :

	découlant d'une symétrie	
Impulsion	⟺	Inv par translat° dans l'espace
moment cinétique	⟷	Inv par rotat°
Em	⟶	Inv ~~de~~ par translat° dans le temps

D'autres grandeurs conservées : - charge
- flux B.

De plus ces lois de conservat° en mécanique seront le terreau du développement de la mécanique des fluides car elles sont établies pour des syst fermés qq