

Analyse du blindage électromagnétique par les courants de Foucault dans le cas d'une feuille d'aluminium

par **André DEIBER**

Lycée Kléber - 67000 Strasbourg

andre.deiber@laposte.net

RÉSUMÉ

Une paroi métallique d'épaisseur suffisante peut empêcher des ondes électromagnétiques de sortir ou de pénétrer dans une enceinte fermée. Ce phénomène de blindage électromagnétique peut être mis en évidence par l'association de deux bobines coaxiales et d'une feuille de papier aluminium, la feuille métallique jouant le rôle de filtre passe-bas pour le champ magnétique. La fréquence de coupure de ce filtre, de l'ordre d'une dizaine de kilohertz, est suffisamment basse pour simplifier à l'extrême le protocole expérimental. Cette expérience quantitative montre que le blindage apparaît pour des fréquences très inférieures à celles que l'on pouvait prévoir à partir de l'effet de peau. En effet, il faut comparer la période du champ magnétique au temps de relaxation électromagnétique de l'ensemble cavité - enceinte métallique et non l'épaisseur de la feuille à la profondeur de peau. Afin de généraliser ce résultat, nous étudierons une cavité biplane et le blindage magnétique d'une coquille sphérique contenant une source d'ondes électromagnétiques.

Les obstacles métalliques peuvent devenir infranchissables pour les ondes électromagnétiques. En particulier, elles ne peuvent pénétrer dans une enceinte fermée entourée d'une feuille métallique si leur fréquence est assez élevée, comme le montre l'expérience décrite ci-dessous. Cette dernière allie une mise en œuvre expérimentale ultrasimple, des calculs théoriques rapides et une bonne adéquation du modèle aux données expérimentales.

1. UNE EXPÉRIENCE SIMPLE, MAIS PROBANTE

Pour réaliser cette expérience, il faut deux bobines dont l'une est assez petite pour être placée à l'intérieur de la seconde, du papier aluminium, un générateur de fonctions et un voltmètre. Dans une première expérience A, la bobine la plus large (notée 2) est alimentée par le générateur de tension sinusoïdale tandis que le voltmètre indique la tension efficace aux bornes de la petite bobine (notée 1). On relève ensuite la tension U_{eff} en fonction de la fréquence f du générateur. Le protocole expérimental de la seconde expérience B est quasi identique, à ceci près que l'on enveloppe la bobine de détection par plusieurs tours de papier aluminium ménager enroulé en forme de cylindre d'épaisseur totale h et de rayon $r_c \gg h$. Il faut néanmoins prendre garde à allonger suffisam-

ment le cylindre métallique pour que le champ magnétique créé par la bobine inductrice soit négligeable sur les faces terminales du cylindre.

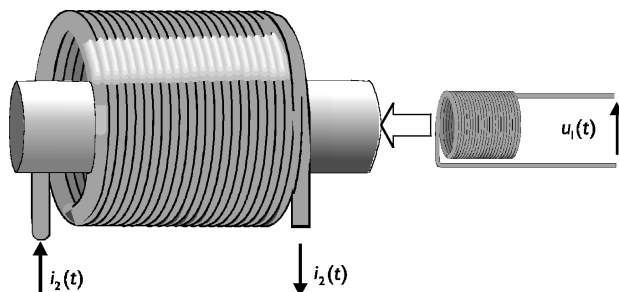


Figure 1 : Schéma expérimental.

La figure 2 montre que la tension U_{1eff} augmente avec la fréquence pour se stabiliser dans l'expérience A. Par contre, en présence de la feuille métallique, la réponse en tension de la bobine de détection passe par un maximum pour décroître pour des fréquences plus élevées.

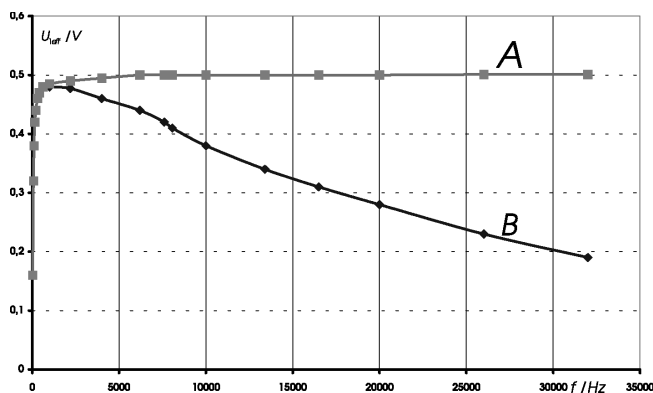


Figure 2 : Mise en évidence du phénomène de blindage : échelle linéaire en fréquence.

En présentant ces résultats expérimentaux en échelle logarithmique sur l'axe des fréquences, il apparaît clairement que les deux réponses sont identiques pour des fréquences inférieures à 1 kHz, mais qu'elles diffèrent notablement dès 10 kHz. En d'autres termes, les deux bobines jouent le rôle d'un filtre passe-haut dans l'expérience A, mais l'introduction d'une feuille métallique fait apparaître de surcroît un comportement en filtre passe-bas.

Pour isoler l'influence du papier aluminium, il suffit de représenter le rapport $\frac{U_{1eff}(B)}{U_{1eff}(A)}$ en fonction de la fréquence (cf. figure 4). Néanmoins comme l'épaisseur h est

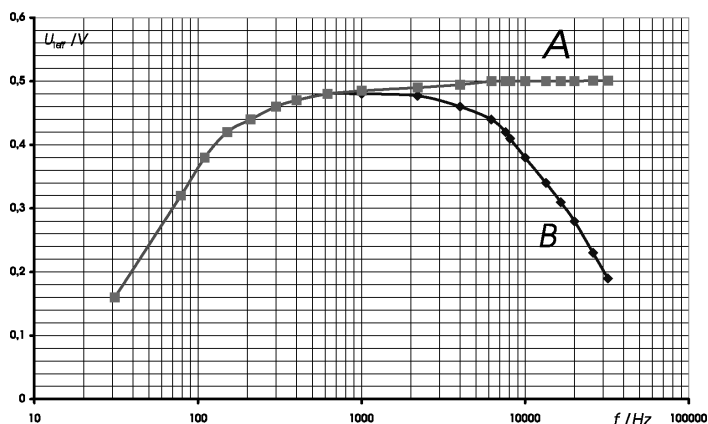


Figure 3 : Mise en évidence du blindage : tension de sortie dans les deux expériences avec une échelle logarithmique en fréquence.

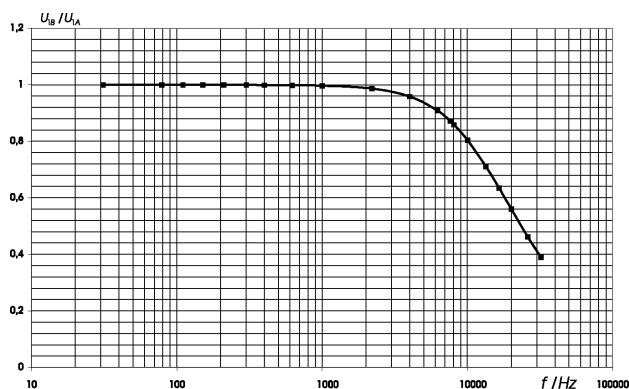


Figure 4 : Rapport $\frac{U_B}{U_A}$ des deux réponses avec et sans feuille métallique en fonction de la fréquence.

petite devant l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \gamma}}$, un tel comportement est surprenant dans ce domaine de fréquences.

2. UNE PREMIÈRE EXPLICATION RAPIDE

La fréquence de coupure basse traduit l'auto-inductance de la bobine 2. Par contre, la fréquence de coupure haute est une conséquence de l'existence de courants induits dans la feuille métallique.

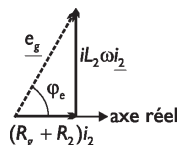
2.1. Réponse de la bobine de détection en l'absence de feuille d'aluminium

Le générateur de tension de force électromotrice $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ et de résistance interne R_g alimente la bobine 2 de résistance R_2 et d'auto-inductance L_2 . Comme la bobine de détection est en circuit ouvert, il n'y a pas lieu de considérer l'inductance mutuelle entre les deux bobines.

En notation complexe ($i^2 = -1$), l'intensité $\underline{i}_2$ dans la bobine 2

$$\text{vaut } \underline{i}_2 = \frac{\underline{e}_g}{R_g + R_2 + iL_2\omega}, \text{ ce qui se traduit par } \underline{i}_2(t) = \frac{E_m \cos(\omega t)}{\sqrt{(R_g + R_2)^2 + L_2^2 \omega^2}}$$

pour un choix judicieux de la phase $\varphi_e = \arctan\left(\frac{L_2 \omega}{R_g + R_2}\right)$.



La valeur algébrique de la composante du champ magnétique créé à l'intérieur de cette bobine de longueur l_2 comptant N_2 spires et assimilée à un solénoïde « infini » s'en déduit directement : $\underline{B}_z = \mu_0 \frac{N_2}{l_2} \frac{\underline{e}_g}{(R_g + R_2 + iL_2\omega)}$ donc $B_z(t) = \mu_0 \frac{N_2}{l_2} \frac{E_m \cos(\omega t)}{\sqrt{(R_g + R_2)^2 + L_2^2 \omega^2}}$.

Avec une orientation adaptée, la tension aux bornes de la bobine 1 ayant N_1 spires de rayon r_1 , est égale à $u_{1A} = -\frac{d\Phi_{1A}}{dt}$:

$$\underline{u}_{1A} = -i\omega \underline{\Phi}_{1A} = -\frac{\mu_0 N_2 N_1 \pi r_1^2}{l_2} \frac{i\omega \underline{e}_g}{(R_g + R_2 + iL_2\omega)}.$$

Nous en déduisons le module de la fonction de transfert de tension d'entrée $\underline{e}_g$ et de tension de sortie $\underline{u}_{1A}$: $\left| \frac{\underline{u}_{1A}}{\underline{e}_g} \right| = \frac{\mu_0 N_2 N_1 \pi r_1^2}{l_2 (R_g + R_2)} \frac{\omega}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$ avec $\omega_c = \frac{R_g + R_2}{L_2}$. En approximant l'auto-

inductance L_2 par $L_2 \cong \frac{\mu_0 N_2^2 \pi r_2^2}{l_2}$, cette expression se réécrit en $\left| \frac{\underline{u}_{1A}}{\underline{e}_g} \right| \cong \frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_2^2} \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$.

Avec ces notations, le comportement en filtre passe-haut apparaît clairement, la pulsation de coupure valant ω_c et le gain dans la bande passante étant égal à $\frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_2^2}$.

2.2. La feuille d'aluminium est un filtre passe-bas pour le champ magnétique

La variation temporelle du champ magnétique au sein de la bobine inductrice (2)

induit des courants dans la feuille métallique, que nous supposerons uniformes à ce stade (cf. § 7.). Il faut donc distinguer deux champs magnétiques, tous deux colinéaires à OZ , en fonction de la distance r du point P considéré à cet axe : $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext MAX}} \cos(\omega t) \vec{u}_z$ pour $r_c + h < r < r_2$ et $\vec{B}_{\text{int}} = B_{\text{int MAX}} \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_z$ pour $r' < r_c$ en introduisant *a priori* un déphasage entre les deux champs.

Comme $h \ll r_c$, on peut modéliser la distribution volumique orthonormale de courants par une distribution surfacique $\vec{j}_s$, vu les éléments de symétrie présents dans le système. Pour évaluer j_s , calculons la circulation du champ électrique le long d'un parcours circulaire de rayon r_c centré sur OZ (cf. figure 5) :

$$\oint_{\text{cercle de rayon } r_c} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{\text{cercle de rayon } r_c} \vec{B}_{\text{int}} \cdot \vec{e}_z ds \Rightarrow E_\theta = - \frac{r_c}{2} \frac{dB_{\text{int}}}{dt}.$$

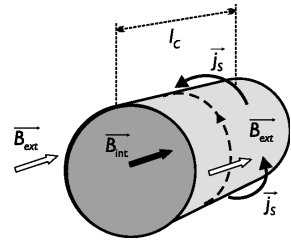


Figure 5

La loi d'Ohm locale donne la densité volumique de courants dans l'épaisseur du papier aluminium $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ d'où $\underline{j}_\theta = -i \frac{\omega \gamma r_c}{2} \underline{B}_{\text{int}}$, pour aboutir à la densité surfacique équivalente $j_{s\theta} \times l = \iint_{\text{rectangle } h \times l} \vec{j} \cdot \vec{e}_\theta ds$ donc $j_{s\theta} = -i \frac{\omega \gamma r_c h}{2} \underline{B}_{\text{int}}$.

La discontinuité de champ magnétique qui en résulte $\vec{B}_{\text{ext}} - \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{i \rightarrow e}$ se traduit, après projection sur OZ , par $B_{\text{ext}} = B_{\text{int}} - \mu_0 j_{s\theta}$. Il en résulte finalement que :

$$\underline{B}_{\text{ext}} = \underline{B}_{\text{int}} + \mu_0 i \frac{\omega \gamma r_c h}{2} \underline{B}_{\text{int}} \Rightarrow \frac{\underline{B}_{\text{int}}}{\underline{B}_{\text{ext}}} = \frac{1}{1 + i \frac{\mu_0 \omega \gamma r_c h}{2}} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\Omega_c}}.$$

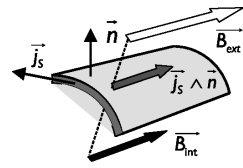


Figure 6

La feuille métallique se comporte donc comme un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\Omega_c = \frac{2}{\mu_0 \gamma r_c h}$, avec $\underline{B}_{\text{ext}}$ pour grandeur d'entrée et $\underline{B}_{\text{int}}$ en sortie.

Cette fonction de transfert est tout à fait conforme à la loi de Lenz. L'équation différentielle qui relie les composantes axiales des champs magnétiques intérieur et extérieur est une équation linéaire du premier ordre : $\frac{1}{\Omega_c} \frac{dB_{\text{int}}}{dt} + B_{\text{int}} = B_{\text{ext}}$. Une variation brutale du champ créé par la source placée à l'extérieur du blindage provoque une relaxation du champ intérieur sur une échelle de temps de $\tau = \frac{1}{\Omega_c}$ ⁽¹⁾. En régime stationnaire les deux champs coïncident. Un métal ordinaire ne permet pas de se blinder contre un champ magnétique statique.

(1) Remarquons que ce temps de relaxation devient infini dans le cas d'un métal parfait $t = \frac{\mu_0 \gamma r_c h}{2} \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \infty$

L'introduction de l'épaisseur de peau δ dans l'expression de la fonction de transfert aboutit à une expression très synthétique : $\frac{B_{\text{int}}}{B_{\text{ext}}} = \frac{1}{1 + i \frac{r_c h}{\delta^2}}$. Les calculs précédents ne

reposant pas sur la théorie de l'effet de peau, δ apparaît à ce stade comme une notation commode, qui présente l'avantage de montrer clairement que le blindage se manifeste lorsque $r_c h \approx \delta^2$ et non pour $h \approx \delta$, comme nous le justifierons à la fin de cet article.

3. ESTIMATION DU TEMPS DE RELAXATION ASSOCIÉ AUX EFFETS D'INDUCTION

La forme de l'équation différentielle reliant B_{ext} et B_{int} doit nous inciter à estimer directement le temps de relaxation τ de la cavité blindée, que l'on peut obtenir à partir de l'expérience de pensée suivante. Comme l'effet de peau est négligé *a priori*, nous pouvons supposer que la densité de courant est uniforme dans la feuille métallique. Coupons le cylindre métallique dans le sens de la longueur suivant une rainure de largeur faible devant r_c . Les deux surfaces en regard sont ensuite recouvertes d'un métal de conductivité nettement plus élevée que celui constituant le reste du cylindre de longueur l_c . La résistance de la coquille cylindrique entre ces deux électrodes vaut environ $R_c \cong \frac{2\pi r_c}{\gamma_l h}$.

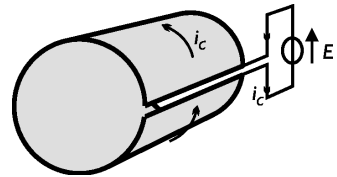


Figure 7

Un générateur imposant une tension E_g entre les électrodes fait circuler un courant d'intensité $i_c = \frac{E_g}{R_c} = \frac{\gamma_l E_g}{2\pi r_c}$. La puissance dissipée par effet Joule vaut donc :

$$P_{\text{Joule}} = R_c i_c^2 \cong \frac{2\pi r_c}{\gamma_l h} i_c^2$$

Le champ magnétique créé par ce courant à l'intérieur du cylindre est égal à $B_{\text{int}} = \frac{\mu_0 i_c}{l_c}$ dans l'hypothèse $r_c \ll l_c$. Nous en tirons l'énergie magnétique du cylindre :

$$W_{\text{mag}} = \frac{\mu_0 \pi r_c^2}{2 l_c} i_c^2 = \frac{1}{2} L_c i_c^2$$

En annulant brutalement la force électromotrice du générateur le courant décroît exponentiellement du fait de l'auto-induction avec une constante de temps égale à $\tau = \frac{L_c}{R_c}$ soit :

$$\tau = \frac{\frac{\mu_0 \pi r_c^2}{l_c} i_c^2}{\frac{2\pi r_c}{\gamma_l h} i_c^2} = \frac{\mu_0 \pi r_c h}{2}$$

Cette expression est conforme à l'estimation générale donnée par LANDAU dans la référence [3].

Dans notre expérience, c'est le générateur associé à la bobine inductrice (2) qui fournit l'énergie dissipée par effet Joule dans la feuille métallique *via* $\vec{B}_{\text{ext}}(t)$. Si la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ de ce générateur est grande devant τ , l'énergie thermique ainsi produite par période est négligeable devant la valeur maximale de W_{mag} . Le champ dans la cavité suit la sollicitation extérieure $\vec{B}_{\text{ext}} \cong \vec{B}_{\text{int}}$. Dans le cas contraire, les courants induits transforment toute l'énergie que la source extérieure voudrait céder à la cavité en transfert thermique au sein du métal. Le blindage devrait donc se manifester si $T \sim \tau$, ce qui est équivalent à $\omega\tau \sim 1$ ou encore $r_c h \approx \delta^2$.

4. IL FAUT TENIR COMPTE DE L'INDUCTANCE MUTUELLE ENTRE LA FEUILLE D'ALUMINIUM ET LE SOLÉNOÏDE

La pulsation de coupure pour le champ magnétique ne correspond pas exactement à la pulsation de coupure observée, car le calcul précédent a négligé l'action des courants induits dans le cylindre métallique sur les courants circulant dans la bobine inductrice.

4.1. Les courants induits dans le métal modifient les courants dans le solénoïde inducteur

Comme $\omega_c \ll \Omega_c$, nous pouvons noter d'emblée que l'on peut négliger R_2 devant $L_2 \omega$ quand les effets des courants induits se manifestent. En conséquence la force électromotrice induite dans la bobine 2 par auto-induction et par mutuelle compense celle du générateur $e_g \cong -e_{\text{ind}}$, d'où $e_g \cong i\omega\Phi_2$. Par contre, la tension u_{1B} aux bornes de la bobine de détection s'exprime toujours par la relation $u_{1B} = -\frac{d\Phi_{1B}}{dt} \Rightarrow \underline{u_{1B}} = -i\omega\Phi_{1B}$. Nous en tirons la fonction de transfert $\frac{\underline{u_{1B}}}{\underline{e_g}}$ de l'ensemble bobines et papier aluminium dans le domaine des fréquences supérieures au kilohertz :

$$\frac{\underline{u_{1B}}}{\underline{e_g}} = -\frac{\Phi_{1B}}{\Phi_2} = \frac{-N_1 \pi r_1^2 \underline{B}_{\text{int}}}{N_2 \pi r_c^2 \underline{B}_{\text{int}} + N_2 \pi \left[r_2^2 - r_c^2 \right] \underline{B}_{\text{ext}}} = \frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_c^2} \frac{-1}{1 + \frac{r_2^2 - r_c^2}{r_c^2} \frac{\underline{B}_{\text{ext}}}{\underline{B}_{\text{int}}}}$$

En tenant compte de la fonction de transfert magnétique étudiée au paragraphe précédent, il vient :

$$\frac{\underline{u_{1B}}}{\underline{e_g}} = \frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_c^2} \frac{1}{1 + \frac{r_2^2 - r_c^2}{r_c^2} \left[1 + i \frac{r_c h}{\delta^2} \right]} = \frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_2^2} \frac{-1}{1 + i \left[1 - \frac{r_c^2}{r_2^2} \right] \frac{r_c h}{\delta^2}}$$

La pulsation de coupure, théoriquement égale à $\Omega'_c = \frac{2}{\mu_0 \gamma_c h} \times \frac{r_2^2}{[r_2^2 - r_c^2]}$, permet d'estimer l'épaisseur de la feuille métallique. Avec les valeurs numériques de l'expérience $\gamma_{Al} = 3,6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, $r_2 = 2,8$ cm, $r_c = 2,2$ cm, $f'_c = 13,4$ kHz, nous obtenons :

$$h = \frac{1}{\mu_0 \gamma_c \pi f'_c} \times \frac{r_2^2}{[r_2^2 - r_c^2]} \simeq 62 \mu m.$$

Pour comparer ce résultat à l'épaisseur du papier aluminium, il suffit de faire quelques mesures sur un rouleau d'aluminium du commerce. Pour un rouleau de 20 m, l'épaisseur totale est de 3 mm, pour un diamètre moyen de 34 mm, ce qui correspond à une épaisseur $h_{feuille}$ de $16 \mu m$.

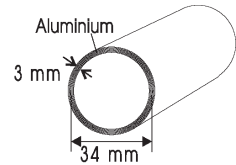


Figure 8

Comme nous avons fait plusieurs tours pour créer le cylindre de l'expérience, l'ordre de grandeur $h \approx 4h_{feuille}$ est assez satisfaisant, même s'il ne fallait pas s'attendre à une précision exemplaire pour une expérience aussi sommaire. Une estimation rapide de leur intensité peut convaincre le lecteur sceptique de la nécessité de prendre en compte ces courants induits. Avec les valeurs numériques de l'expérience, la résistance de la feuille métallique, dans le sens défini ci-dessus, vaut $R_c \approx 2$ m Ω . Au voisinage de la fréquence de coupure, la force électromotrice vaut à peu près $e = \frac{r_c}{2} \Omega'_c B_{int} \approx 20$ mV. L'intensité des courants induits de l'ordre de plusieurs ampères est donc très élevée, conséquence directe de la faible résistance du cylindre métallique.

4.2. Un filtre passe-bande inductif

L'ensemble des deux solénoïdes et de la feuille d'aluminium constitue donc un filtre passe-bande dont les fréquences de coupure traduisent deux aspects de l'induction. L'accord entre les données expérimentales et le modèle $H = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}}$ est remarquable, eu égard à la simplicité du protocole expérimental, comme le montre la figure 9.

5. FILTRAGE PAR DEUX PLANS MÉTALLIQUES FINS

Le blindage existe bien entendu pour des enceintes fermées de forme quelconque. Pour dégager les paramètres géométriques pertinents, déformons le cylindre précédent en deux rectangles distants de $2a \gg h$ associés à deux surfaces hémicylindriques de rayon a .

En négligeant les effets de bords, le champ électrique $\vec{E}$ est colinéaire à $\vec{u}_x$. Sa circulation le long d'un parcours rectangulaire de hauteur H et de largeur $2a$ est liée à la

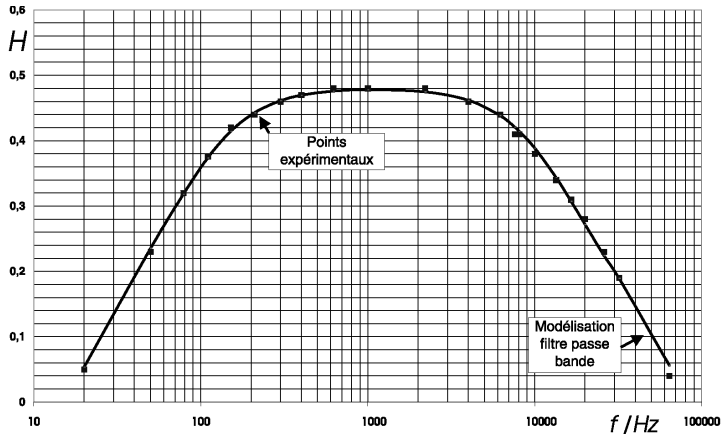


Figure 9 : Points expérimentaux et modèle d'un filtre passe-bande : tension de sortie en fonction de la fréquence $f_0 = 1,10$ kHz, $Q = 0,08$, $H_0 = 0,48$.

dérivée du flux magnétique à travers cette surface :

$$\oint_{\text{rectangle}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{\text{rectangle}} \vec{B}_{\text{int}} \cdot \vec{u}_z dS.$$

Comme $E_x(a) = -E_x(-a)$ par symétrie, nous obtenons l'expression du champ électrique $E_x(a) = a \frac{dB_{\text{int}}}{dt}$ puis de la densité surfacique induite $j_{S_x}(a) = \gamma ah \frac{dB_{\text{int}}}{dt}$.

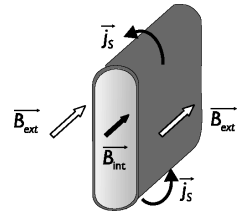


Figure 10

Il suffit ensuite de traduire la relation de passage pour le champ magnétique pour obtenir la fonction de transfert :

$$\frac{B_{\text{ext}} - B_{\text{int}}}{B_{\text{int}}} = i\mu_0 \gamma \omega ah \frac{B_{\text{int}}}{B_{\text{int}}} \rightarrow \frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{int}}} = \frac{1}{1 + i\mu_0 \gamma \omega ah}.$$

L'expression de la pulsation de coupure $\Omega_c = \frac{1}{\mu_0 \gamma ah}$ est semblable à celle du cas cylindrique à un facteur numérique près.

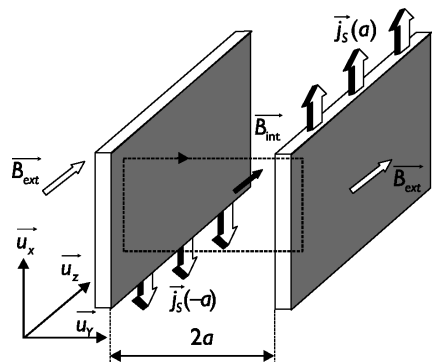


Figure 11

6. ÉTUDE D'UN FILTRAGE PAR UNE COQUILLE SPHÉRIQUE

Dans l'expérience décrite ci-dessus, la source d'ondes électromagnétiques est située à l'extérieur de la surface fermée englobant le détecteur. Il est dès lors intéressant de se

poser la question de ce qui se passe si la source est enfermée dans une enceinte métallique fermée et le détecteur placé à l'extérieur.

À cet effet, considérons une petite spire de surface S placée au centre O d'une coquille sphérique métallique. Cette spire non chargée mais parcourue par un courant sinusoïdal $i(t) = I_m \cos \omega t$ présente un moment magnétique oscillant $\vec{M} = SI_m \cos(\omega t) \vec{u}_z = Mt \vec{u}_z$.

En un point $P(r, \theta, \phi)$ de l'espace, ce dipôle magnétique crée le potentiel vecteur naturel :

$$\vec{A}_1(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \frac{\vec{OP}}{OP^3} = \frac{\mu_0 M(t)}{4\pi r^2} \sin \theta \vec{u}_\phi$$

en coordonnées sphériques. Vu la faible valeur des fréquences utilisées, il est inutile d'utiliser les potentiels retardés.

Le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par cette spire varie dans le temps, ce qui induit des courants de Foucault dans la coquille sphérique. Ces courants vont eux-mêmes créer un champ magnétique $\vec{B}_2$. Montrons que ces deux champs se compensent en un point extérieur à la sphère métallique pour des fréquences suffisamment élevées.

Tout plan contenant l'axe de révolution Oz est un plan d'antisymétrie à la fois pour le courant inducteur circulant dans la spire et pour les courants induits dans la masse métallique. Le champ électrique est donc orthogonal à ce plan en tant que vecteur polaire. D'après la loi d'Ohm locale, il en est de même de la densité volumique de courant $\vec{j} = j_\phi(r, \theta) \vec{u}_\phi$. L'épaisseur h de la coquille étant négligeable devant son rayon R , on peut modéliser les courants induits par une distribution surfacique : $\vec{j}_s(\theta) = \gamma h E_\phi(\theta) \vec{u}_\phi$ (cf. figure 14).

Le champ électrique dans le métal résulte de la variation temporelle de $\vec{B}_1$ et de $\vec{B}_2$. Vu l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}_1$, la première contribution :

$$\vec{E}_1 = - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} = - \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi R^2} \frac{dM(t)}{dt} \vec{u}_\phi$$

varie en $\sin \theta$. D'après la loi de Faraday, il en est de même

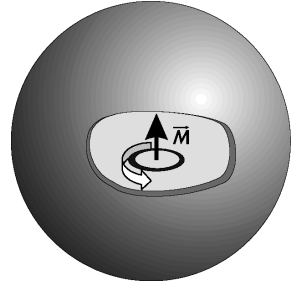


Figure 12

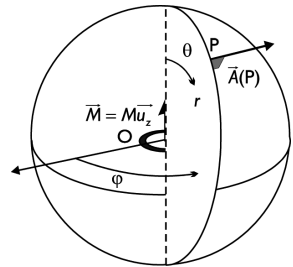


Figure 13

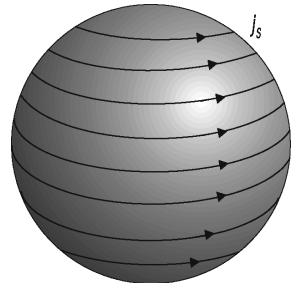


Figure 14

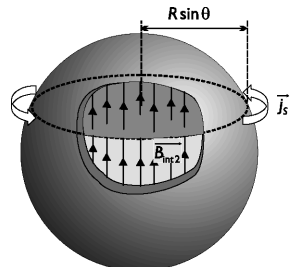


Figure 15

de la seconde. Pour le justifier, rappelons [4] qu'une répartition surfacique de courants du type $\vec{j}_s(\theta) = j_m \sin\theta \vec{u}_\phi$ créée à l'intérieur de la sphère un champ magnétique $\vec{B}_{\text{int } 2}$ uniforme qui s'écrit $\vec{B}_{\text{int } 2} = + \frac{2\mu_0}{3} j_m \vec{u}_z$. La seconde contribution au champ électrique vérifie donc la relation $E_{2\phi} \times 2\pi R \sin\theta = -\pi R^2 \sin^2\theta \frac{dB_{\text{int } 2}}{dt}$.

Le champ électrique total dans la feuille métallique est égal à :

$$E_\phi = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2} \frac{dM}{dt} \sin\theta - \frac{R}{2} \sin\theta \frac{dB_{\text{int } 2}}{dt}$$

d'où $\vec{j}_s = -\gamma h \left[\frac{\mu_0}{4\pi R^2} \frac{dM}{dt} + \frac{R}{2} \frac{dB_{\text{int } 2}}{dt} \right] \sin\theta \vec{u}_\phi$. En tenant compte des diverses relations ci-

dessus, il vient en notation complexe : $\underline{B}_{\text{int } 2} = \frac{-\frac{\mu_0^2 \gamma h \omega}{6\pi R^2} iM}{1 + i \frac{\omega R h \gamma \mu_0}{3}}$ et $\underline{j}_s = \frac{-\frac{\mu_0^2 \gamma h \omega}{4\pi R^2} iM}{1 + i \frac{\omega R h \gamma \mu_0}{3}} \sin\theta$.

La composante M' du moment magnétique de la coquille sphérique sur Oz s'obtient par intégration des moments magnétiques élémentaires :

$$M' = \int_{\theta=0}^{\pi} \pi \left[R^2 \sin^2\theta \right] \left[j_m \sin\theta \right] R d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3 j_m.$$

Le champ magnétique créé par les courants induits à l'extérieur de la sphère est équivalent à celui d'un tel dipôle magnétique M' placé au point O . Le moment magnétique résultant $M' + M$ varie avec la fréquence du courant inducteur :

$$\underline{\bar{M}'} + \underline{M} = \underline{M}_{eq} = \frac{1}{1 + i \frac{\mu_0 \gamma h R \omega}{3}} \underline{M}.$$

Cette dernière relation montre clairement que la présence de la coquille métallique se traduit par un filtrage passe-bas de pulsation de coupure $\Omega_c = \frac{3}{\mu_0 \gamma h R}$, dont l'expression ne diffère de celles des deux cas précédents que par un facteur numérique voisin de l'unité.

7. JUSTIFICATION DES APPROXIMATIONS

L'hypothèse d'uniformité du champ électrique (et donc de la densité de courant) au sein du métal est assez subtile : le champ électrique est uniforme, mais pas le champ magnétique !

Afin de justifier cette affirmation, considérons une cavité fermée dans laquelle règne un champ magnétique variable dans le temps. Il existe alors un champ électrique oscillant dans le métal entraînant des courants induits formant des boucles fermées qui ne se coupent pas.

Par ailleurs, le champ électrique sur les faces internes des parois fixe la variation spatiale du champ magnétique au voisinage de la surface interne du métal *via* la relation de Maxwell-Ampère. L'amplitude de $\vec{B}_{met}$ présente alors une pente extrêmement élevée, dont la valeur n'a rien à voir avec l'effet de peau, mais qui explique le passage rapide de $\vec{B}_{ext}$ à $\vec{B}_{int}$.

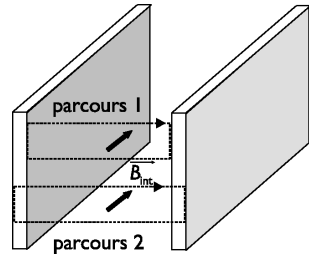


Figure 16

Ce schéma explicatif se met aisément en forme dans la géométrie plane du paragraphe 5. Pour la commodité de calcul, plaçons l'origine du repère sur la face interne d'une des parois métalliques. Pour $y > h$ ou $y < -2a - h$, on a $\vec{B} = B_{ext} \cos(\omega t) \vec{u}_z$ donc $\underline{\vec{B}} = \underline{B}_{ext} \vec{u}_z$. Dans la cavité biplane ($-2a < y < 0$), le champ magnétique vaut $\vec{B} = B_{int} \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_z$ où $\underline{\vec{B}} = \underline{B}_{int} \vec{u}_z$.

Dans la paroi métallique, le champ $\underline{\vec{B}} = \underline{B}_{met} \vec{u}_z$ est une combinaison de deux fonctions exponentielles : $\underline{B}_{met} = C_1 \exp(-ky) + C_2 \exp(+ky)$ en notant $\underline{k} = \frac{1+i}{\delta}$. À $\underline{B}_{ext}$ fixé, il reste trois inconnues $\underline{B}_{int}$, C_1 et C_2 .

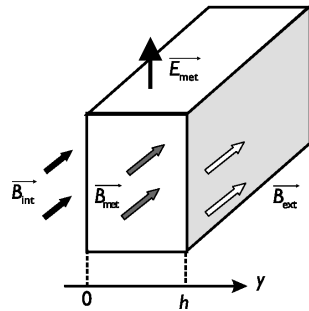


Figure 17

Outre les continuités de B_z en $y = 0$ et $y = h$, la troisième relation, qui est véritablement le moteur du phénomène étudié, découle du champ électrique en $y = 0$ déjà calculé plus haut : $E_x(0) a \frac{dB_{int}}{dt} \rightarrow E_x(0) = i a \omega B_{int}(0)$. D'après la relation de Maxwell-Ampère, il en résulte en négligeant le courant de déplacement que :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} \rightarrow \frac{dB_{met}}{dy}(0) = \mu_0 \gamma i a \omega B_{int}(0).$$

Nous en tirons le système d'équations vérifiées par C_1 et C_2 : $\underline{B}_{int} = C_1 + C_2$ et $\underline{k}(-C_1 + C_2) = \frac{2ia}{\delta^2}(C_1 + C_2)$. La résolution donne $C_2 = \frac{1}{2} \underline{B}_{int}(0) \left[1 + \frac{2ia}{k\delta^2} \right]$ et $C_1 = \frac{1}{2} \underline{B}_{int}(0) \left[1 - \frac{2ia}{k\delta^2} \right]$ soit $\underline{B}(h) = \underline{B}_{int}(0) \left[ch(kh) + \frac{2ia}{k\delta^2} sh(kh) \right]$. Si l'effet de peau est négligeable c'est-à-dire pour $h \ll \delta$, il vient par développement limité en kh :

$$\underline{B}_{ext} = + \underline{B}_{int} + i \frac{2ah}{\delta^2} \underline{B}_{int}.$$

Ce résultat conforme à l'estimation rapide antérieure n'est pas à mettre au crédit de l'effet de peau, mais est une conséquence directe des courants de Foucault.

Il est possible de calculer explicitement la densité volumique de courant dans le cas

général d'une paroi métallique d'épaisseur quelconque et de géométrie de révolution [1-2]. Pour $h \ll r_c$, l'expression obtenue :

$$\frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{int}}} = \left[ch \left(h \sqrt{i\mu_0 \gamma \omega} \right) + \frac{r_c \sqrt{i\mu_0 \gamma \omega}}{2} sh \left(h \sqrt{i\mu_0 \gamma \omega} \right) \right] \sqrt{1 + \frac{h}{r_c}}$$

aboutit au résultat précédent en faisant un développement limité au premier ordre en $h \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}$, le facteur $\sqrt{1 + \frac{h}{r_c}}$ étant dû à la courbure de la paroi.

En haute fréquence, le blindage électromagnétique est une manifestation de l'effet Kelvin. Mais le blindage apparaît déjà aux faibles fréquences comme une conséquence directe des courants induits sans relation avec l'effet de peau. Comme nous l'avons montré, cette expérience très riche sur le plan conceptuel est très aisée à mettre en œuvre. En particulier, elle peut parfaitement servir de support pour une séance de travaux pratiques.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. Jean-Baptiste POINÇOT, technicien de laboratoire au lycée Kléber à Strasbourg, pour son aide efficace dans la mise au point de l'expérience décrite dans cet article ainsi que le relecteur anonyme pour m'avoir communiqué la référence [3].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] STOLL R.L. *The analysis of eddy currents*. Clarendon Press Oxford, 1974, p. 26-27.
- [2] FAHY S., KITTEL C. and LOUIE S.G. Electromagnetic screening by metals. *Am. J. Phys.*, november 1988, vol. 56, n° 11.
- [3] LANDAU L. *Électrodynamique des milieux continus*. Moscou : Éditions Mir, 1991, chapitre VII, § 45, p. 249 et ss.
- [4] PEREZ J.-Ph., CARLES R., FLECKLINGER R. *Électromagnétisme : vide et milieux matériels*. Paris : Masson, 1991, p. 477.



André DEIBER
 Professeur
 Lycée Kléber
 Strasbourg (Bas-Rhin)