

# MP 24 - Signal et Bruit

Mathilde RICHERD et Cyril STURTZ

*Nouveau montage, anciennement appelé "Acquisition, analyse et traitement des signaux."*

Rapport 2016, 2015, 2014 : "Les notions d'erreur de quantification et de rapport signal sur bruit ne sont pas bien dégagées. Pour la numérisation d'un signal, il faut mettre en évidence le rôle de l'échantillonnage et ses conséquences."

## Table des matières

<b>1. Bruit thermique d'une résistance</b>	<b>1</b>
1.1. Généralités sur le bruit. . . . .	1
1.2. Résistance thermique, et montage. . . . .	2
1.3. Mesures pour $R = 510\Omega$ , précautions à prendre pour les mesures, et résultats. . . . .	3
<b>2. Récupération d'un signal noyé dans le bruit.</b>	<b>4</b>
2.1. Rapport signal sur bruit. . . . .	4
2.2. Détection synchrone. . . . .	6
<b>3. Commentaires</b>	<b>7</b>

## 1. Bruit thermique d'une résistance

### 1.1. Généralités sur le bruit.

Le bruit est un signal prenant des valeurs aléatoires au cours du temps. La caractérisation par une valeur efficace habituelle est caduque si on s'en réfère à la définition classique de la valeur efficace. Par contre, en définissant la densité spectrale de puissance (DSP), représentant la répartition en puissance que porte le bruit, on trouve une relation avec la valeur efficace<sup>1</sup> :

$$v_{eff}^2 = \int_0^{+\infty} DSP(f)df \quad (1)$$

On définit la notion de bruit blanc lorsque la DSP ne dépend pas de  $f$ . Les bruits étudiés ayant généralement une large bande, on peut les considérer comme blancs dans les gammes de fréquences étudiées.

---

1. On peut voir ici la valeur efficace comme l'écart type de la distribution de probabilité des valeurs de tension prises par le bruit au cours du temps.

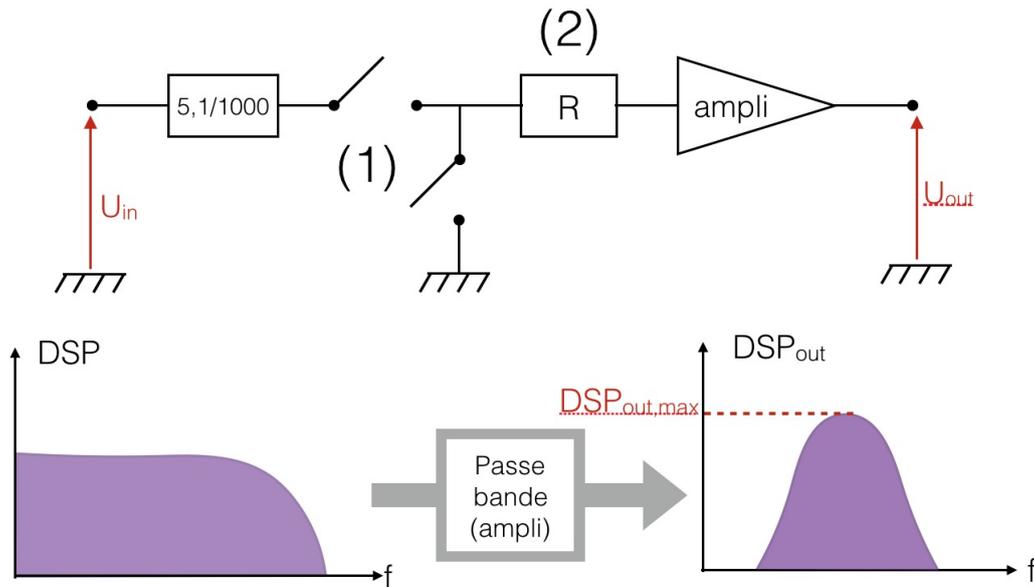


FIGURE 1 – **Haut** : montage pour l'étude du bruit de résistance. Sur la boîte blindé, un premier interrupteur permet de faire le choix de (1) : l'étude avec en entrée le signal du GBF atténué (pour avoir accès à  $G_0$ ), ou le choix du court circuit, pour l'étude du bruit de la résistance. Le choix de (2) est fait via le potentiomètre. **Bas** : action de l'amplificateur sur la DSP (avec, on le rappelle,  $DSP_{out,max} = DSP(R)/G_0^2$ ).

## 1.2. Résistance thermique, et montage.

Une résistance ayant une certaine température verra ses charges se mouvoir sous agitation thermique. Ces mouvements erratiques de charges auront comme conséquence de créer des petites variations de tension en sortie de la résistance : c'est le bruit thermique. On peut lier la DSP du bruit ainsi créé à la résistance  $R$  du composant et à la température  $T$  à laquelle il est par la loi de JOHNSON :

$$DSP(R) = 4k_B T R \quad (2)$$

L'objectif du montage sera de retrouver cette loi. Une application numérique rapide pour  $R = 1k\Omega$  et  $T = 300K$  fournit un ordre de grandeur de la DSP de  $10^{-17} V^2/Hz$ , ce qui représente, sur une bande de  $1 MHz$  une valeur efficace de  $v_{eff} = 3\mu V$ . Ce qui est problématique dans le cadre d'une conversion analogique/numérique comme celle opérée par l'oscilloscope<sup>2</sup>. C'est pourquoi nous allons amplifier le signal, avec un gain  $G_0$ . Tout calcul fait, on arrive à la relation modifiée de (1) dans le cas d'un bruit blanc :

$$v_{eff}^2(R) = DSP(R) \times G_0^2 \times B_{eq} \quad (3)$$

avec  $B_q$  la bande équivalente de bruit, qui représente la bande de fréquence sur laquelle on peut considérer le bruit comme blanc<sup>3</sup>. Pour avoir un signal ayant un niveau de tension convenable (pour être mesuré au scope), par exemple pour qu'il y ait  $v_{eff} \approx 100mV$ , avec la valeur de DSP précédente, on obtient une valeur de gain nécessaire de l'ordre de 32000. Ce qui est un gain considérable, qui

2. Une manip introductive sur le bruit de quantification, basé sur la numérisation de l'information par le scope, peut illustrer ce problème. Par exemple, pour une dynamique de 2V, en codant sur 8bits, on a un pas de quantification de  $2/2^8 = 7,8125mV$ , et pour une dynamique de 10mV, on a un pas de quantification de l'ordre du  $\mu V$  : donc numériser un bruit thermique de l'ordre de  $1\mu V$  effectif n'est pas possible en l'état... D'où la nécessité d'un amplificateur.

3. En fait, l'expression claire de  $B_{eq}$  est éminemment compliquée... C'est aussi pour cela que l'on court-circuite sa détermination par un relevé de DSP maximum, se substituant à un calcul compliqué de  $B_{eq}$ .

## 1. BRUIT THERMIQUE D'UNE RÉSISTANCE, précautions à prendre pour les mesures, et résultats.

ne peut pas être fait avec un amplificateur standard<sup>4</sup>. On réalise alors le montage de la FIGURE 1. Comme le bruit est blanc en entrée, et que le bloc amplificateur adopte un comportement globalement passe bande, on récupère un bruit en sortie ayant une DSP qui a pris la forme du passe bande et dont la valeur maximale est :

$$DSP_{out,max}(R) = \frac{DSP(R)}{G_0^2} \quad (4)$$

Il suffit donc pour chaque résistance de relever la DSP en sortie, mesurer sa valeur maximale et la diviser par le gain statique (au carré) du passe bande pour en récupérer la DSP effective du bruit thermique. Deux remarques sont à faire :

- la DSP que l'on a en sortie n'est pas rigoureusement uniquement celle du bruit thermique de la résistance. En réalité, c'est l'ensemble des composantes électroniques et des bruits parasites que l'on récupère<sup>5</sup>. On va donc ne conserver que la DSP de la résistance en retranchant à chaque mesure de  $DSP_{out,max}(R)$  la DSP pour une résistance nulle. On a donc la relation corrigée :

$$DSP(R) = \frac{DSP_{out,max}(R)}{G_0^2(R)} - \frac{DSP_{out,max}(R=0)}{G_0^2(R=0)} \quad (5)$$

- Il est nécessaire de connaître à chaque valeur de résistance le gain du système<sup>6</sup>. Pour cela, on va exciter le système par un signal harmonique généré par un GBF. Or, au vu de la valeur de l'amplification, le plus petit signal du GBF fera saturer les amplificateurs. D'où l'intérêt de mettre en entrée un atténuateur de gain 5,1/1000.

### 1.3. Mesures pour $R = 510\Omega$ , précautions à prendre pour les mesures, et résultats.

#### Mesure du gain :

On met en entrée de la chaîne amplificatrice un signal sinusoïdale de  $10mV_{pp}$ , on observe au scope le signal de sortie, amplifié **et le signal d'entrée**. On **moyenne** pour avoir un signal le plus propre possible (ne pas hésiter à moyennner sur 100 passages). On fait varier la fréquence de l'entrée pour trouver le maximum d'amplitude peak to peak en sortie (autour de  $1MHz$ ). On calcule alors le gain comme le rapport entre **la valeur crête à crête** du signal de sortie à la résonance, sur la valeur peak to peak du signal d'entrée mesurée à l'oscilloscope (on ne doit surtout pas se contenter de ce qu'affiche le GBF, pour les problèmes d'adaptation d'impédance éventuels). Typiquement, on trouve un gain de  $325 \pm 6.10^3$  (on retombe bien sur les ordres de grandeurs évalués précédemment). Il est à noter que ces précautions (de moyennage, de mesure directe de l'amplitude d'entrée, et du calcul de gain par rapport de valeur crête à crête sont nécessaires afin de retomber sur des valeurs cohérentes de température)<sup>7</sup>. Il ne faut surtout pas faire cette mesure en réponse impulsionnelle, car la mesure au GBF et oscilloscope est plus précise.

---

4. Les ampli qu'on utilise habituellement ont un produit gain/bande passante de l'ordre de  $10^6$  pour les TL081 (utilisés dans le TP d'élec sur les amplificateurs), alors qu'ici on serait de l'ordre de  $3.10^{10}$ ... Ce n'est pas vraiment réalisable simplement, d'où le fait que le montage soit déjà tout prêt (c'est un ensemble de 3 systèmes amplificateurs en cascades, amplifiant le bas bruit sur une large bande, filtrant les basses fréquences et notamment les bruits en  $1/f$ ) "Donc c'est pas réalisable rapidement sur un coin de table..." (JBD).

5. La boîte comportant la résistance et les amplificateurs est blindée. C'est pour isoler le système de toute perturbation extérieure (cage de FARADAY...) et de tout bruit autre que ceux étudiés.

6. Prendre soin de mesurer  $G_0$  pour chaque valeur de résistance... Au vu de la complexité de l'étage amplificateur,  $G_0$  dépend quelque peu de  $R$ .

7. Lors de la préparation aux oraux, un certain nombre de personnes ont essayé de reprendre les mesures, et sont tous retombés sur une valeur aberrante de température. En fait, il faut vraiment être précautionneux car la moindre erreur relative supérieure à 1% entraîne, par effet boule neige à cause du carré de  $G_0$  notamment, des erreurs sur l'estimation de  $T$  finale...

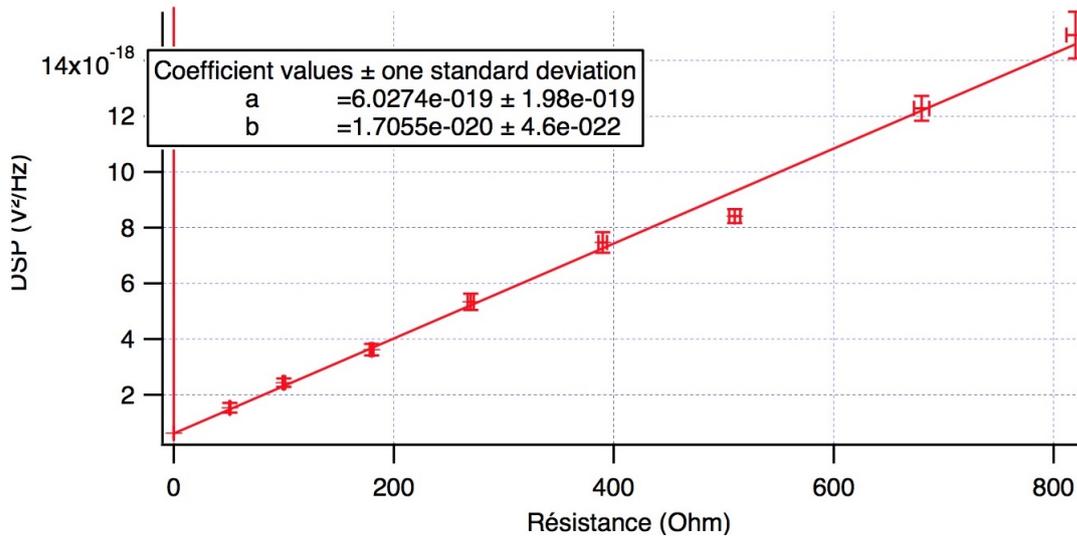


FIGURE 2 – Loi de JOHNSON vérifiée expérimentalement. Fit en  $DS P = b \times R + a$ .

**Mesure de la DSP :**

On court circuite la résistance pour observer le bruit thermique à l'oscilloscope. On cherche à aller jusqu'à  $F_{max} = 40MHz$ , avec les oscilloscopes (ayant une fréquence d'échantillonnage de  $2GHz$ ) ayant une profondeur mémoire maximum de  $N = 500000$  points. Il faudra donc un temps d'acquisition nécessaire de  $T_0 = \frac{1}{\Delta f} = \frac{N}{F_{max}} \approx 10ms$ . Une fois acquis, on va réaliser une moyenne glissante de la DSP sur 1000 points (attention à opérer à la moyenne glissante lorsque la DSP est en linéaire, et pas en log, mais je pense qu'IGOR fait ça correctement automatiquement lorsque vous demandez la DSP sur l'interface de l'oscilloscope en USB, il suffit de lui dire sur combien de points vous voulez faire la moyenne glissante) car la DSP n'adopte pas des variations trop brutales. Une fois cela fait, on va moyennner sur le pic de la DSP entre deux curseurs (car la DSP reste encore bruitée et parfois gigote de trop...) : l'écart type (ou le double) nous donnera l'incertitude sur la mesure.

**Résultats :**

On a finalement les courbes de la FIGURE 2. La loi linéaire est vérifiée et le coefficient directeur nous fournit une température de l'ordre de 30 degrés, ce qui n'est pas aberrant.

On a donc mis en évidence que le bruit pouvait être généré par des composantes électroniques, et cela peut poser des problèmes, notamment dans une optique de transmission de signal. Nous allons voir un moyen de surmonter cette difficulté.

**2. Récupération d'un signal noyé dans le bruit.**

**2.1. Rapport signal sur bruit.**

On quantifie la qualité d'un bruit avec le rapport signal sur bruit, pouvant être défini en puissance ou en valeur efficace, et décrivant la puissance transportée par le signal (par exemple une harmonique) sur la puissance du bruit dans lequel le signal est noyé. On le définit par :

$$R_{S/B}^{dB} = 20 \log \left( \frac{V_{eff}^{signal}}{V_{eff}^{bruit}} \right) \tag{6}$$

Pour avoir accès à la valeur efficace du bruit, il suffit de faire un traitement statistique des valeurs

atteintes par le bruit au cours du temps. En effet, en traçant l'histogramme des valeurs de tension prises par le bruit de la résistance précédente on obtient la FIGURE. Le terme *bruit gaussien* prend son sens ici : la répartition statistique des valeurs de tension prises par le bruit est gaussienne autour d'une valeur moyenne nulle. En relevant l'écart type, on trouve la valeur efficace, car cette dernière est définie comme étant l'écart type de la distribution de probabilité des valeurs atteignables par le bruit, et ce quelque soit la nature du bruit.

Pour vérifier que les ordres de grandeurs développées en partie 1.2., on trace l'évolution en fonction de la résistance des valeurs efficaces de bruit thermique. On tombe bien sur des valeurs efficaces de tension de l'ordre de la centaine de  $mV$ , ce qui est cohérent avec notre raisonnement<sup>8</sup>.

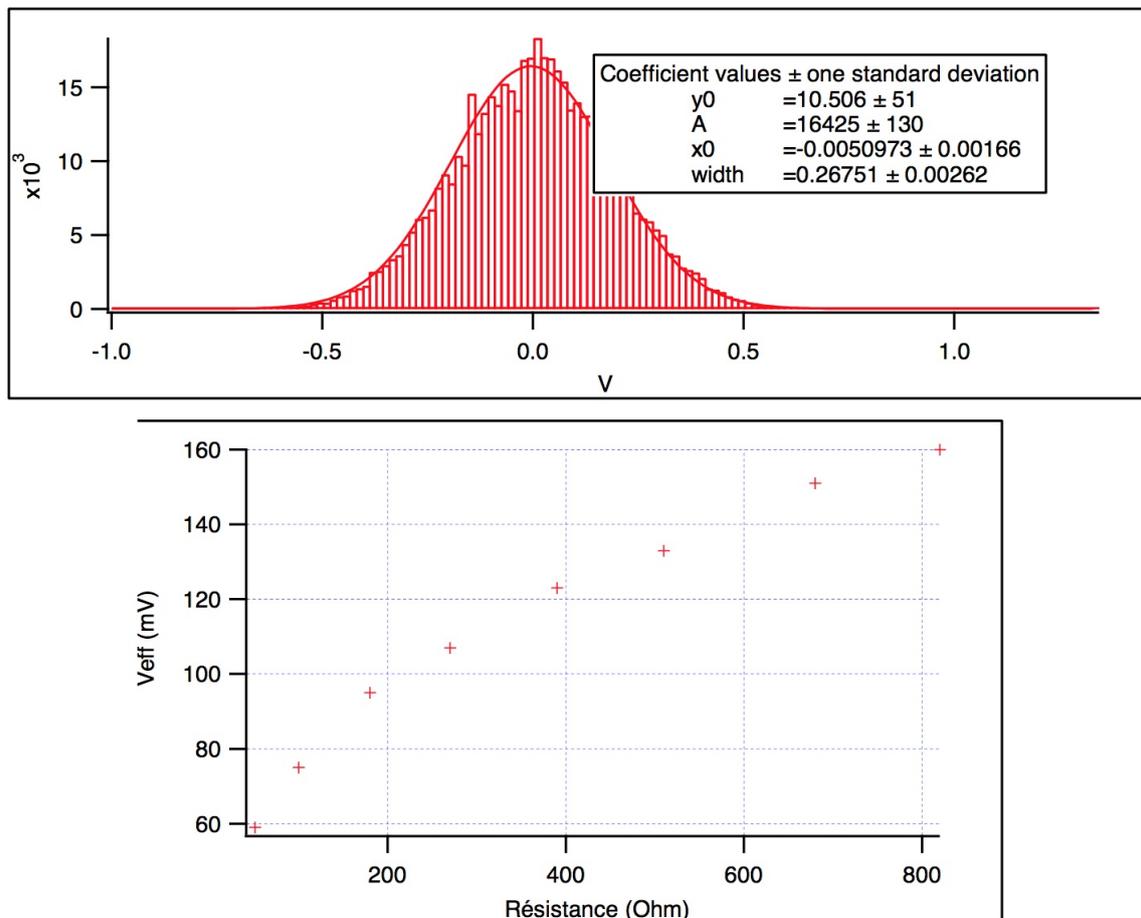


FIGURE 3 – **Haut** : histogramme des valeurs atteintes par le bruit (pas d'histogramme double du pas de quantification). **Bas** : évolution des tensions efficace de bruit en fonction de la résistance.

### Méthode pour fabriquer un histogramme :

Le pas choisit pour l'histogramme n'est pas fait au hasard. En effet, la conversion analogique/numérique opérée par l'oscilloscope induit une quantification des valeurs de tension atteignables par le scope. En prenant par exemple une dynamique de  $2V$  (ie :  $250mV/carreau$ ), le scope codant sur 8 bits, on se retrouve avec un pas de quantification de  $\Delta U_Q = 7,8125 mV$ . Chaque valeur atteignable par le bruit sera séparée de la suivante de  $\Delta U_Q$ . Or quand on fabrique un histogramme,

8. Une courbe à tracer potentiellement est l'évolution de  $B_q$  en fonction de  $R$ , via l'équation (3) : nous avons en effet les valeurs de  $V_{eff}(R)$ , de  $DS P(R)$  et de  $G_0$  à ce stade. Il s'avère que la courbe est décroissante : cela montre que la bande de fréquence équivalente baisse avec la résistance. Cette effet est du à l'entrée de l'amplificateur, qui a un comportement capacitif du au premier étage d'amplification qui se fait via un transistor à effet de champ. Cela revient à modéliser l'entrée de l'ampli par une capa en parallèle avec la résistance thermique : d'où l'effet passe bas. On comprend bien que plus la résistance augmente, plus la fréquence de coupure sera basse, plus le passe bas sera sélectif, et donc plus  $B_q$  sera faible.

il faut que dans chaque pas d'histogramme il y ait le même nombre de valeurs atteignables, afin que le dénombrement ne soit pas faussé. Le choix de  $\Delta U_{hist}$  est capital et est illustré en FIGURE 4. En (1) on choisit un pas d'histogramme double du pas de quantification ; en chaque pas d'histogramme aura donc 2 valeurs atteignables. En (2), le pas d'histogramme n'est pas choisit de manière optimale. En conséquence certains pas d'histogramme auront tantôt 2, tantôt 3 valeurs atteignables ; ce qui fausse l'histogramme.

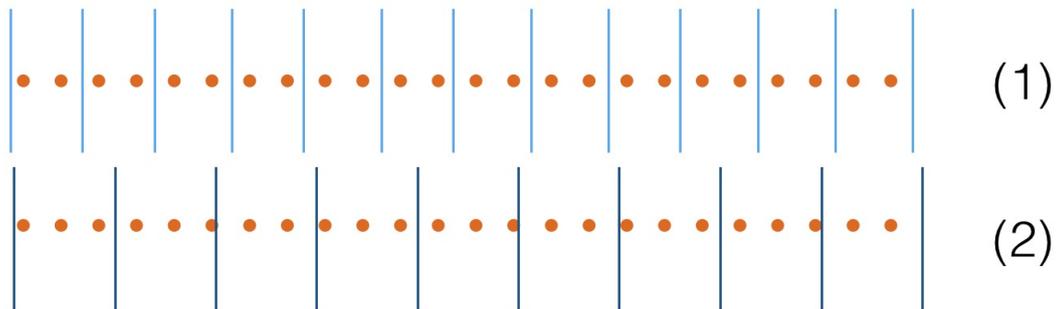


FIGURE 4 – Importance de la cohérence du choix du pas d'histogramme par rapport au pas de quantification. En point orange, les valeurs atteignables de tension dues à la quantification. Les barres représentent les pas de l'histogramme. Le choix (1) donne un pas d'histogramme double du pas de quantification, et l'histogramme sera correcte. Le choix (2) montre un pas d'histogramme défavorable. De manière générale, il faut toujours choisir un pas d'histogramme multiple entier du pas de quantification.

## 2.2. Détection synchrone.

Nous allons à présent mettre en place une méthode de mesure de la valeur efficace d'une harmonique noyée dans un bruit, avec un rapport signal à bruit défavorable : la détection synchrone. Le principe et le montage sont exposés en FIGURE 5.

On crée un signal harmonique  $U_{in}$  de 1 kHz de 100 mV<sub>RMS</sub> (valeur que nous allons essayer de retrouver par le montage) noyé dans un bruit  $b(t)$  de 2 V<sub>RMS</sub>. Cela représente un rapport signal/bruit de -26 dB. Ce signal bruité va alors être multiplié avec un signal harmonique de référence  $U_{ref}$ , de même fréquence que le signal d'entrée, de valeur efficace connue ( $U_{ref,RMS} = 100$  mV) et déphasée de  $\phi$  par rapport au signal d'entrée. Cette multiplication va induire l'apparition d'une composante continue et d'une composante haute fréquence. Nous filtrons alors les hautes fréquences pour, d'une part, ne récupérer que la composante continue, et d'autre part, pour nettoyer le signal du bruit (d'où l'intérêt d'un filtre passe bas très sélectif<sup>9</sup>). Le signal de sortie sera alors un signal continu, ayant la forme :

$$U_{out} = KU_{in,RMS}U_{ref,RMS}\cos\phi \quad (7)$$

On fait alors varier la phase pour avoir une tension de sortie maximale : cela impliquera que le signal d'entrée et la référence sont en phase, et on aura accès directement à la valeur RMS de l'entrée.

À cela, on ajoute deux remarques :

9. Un aspect que je n'ai pas développé mais qui peut être fait sur les performances de la détection synchrone est l'étude du temps de réponse du système. On comprend bien que comme le passe bas est sélectif, cela va avoir une influence sur le temps de réponse du système qui va être d'autant plus long que le PB sera sélectif...

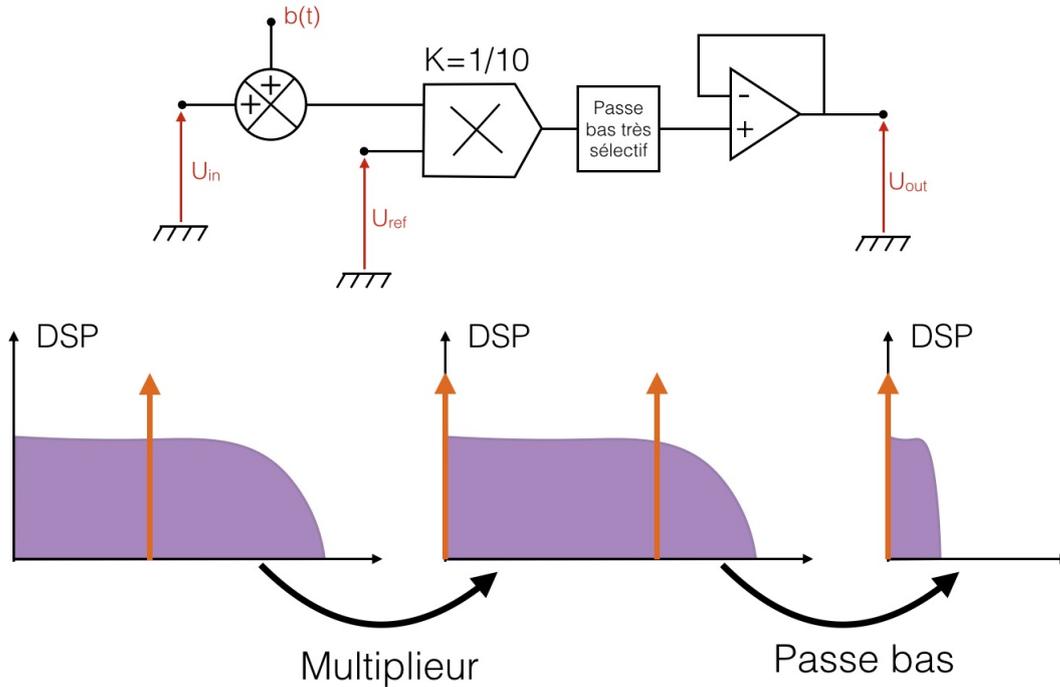


FIGURE 5 – **Haut** : montage de la détection synchrone.  $U_{in}$  et  $U_{ref}$  sont générés par le même GBF (qui possède deux sorties synchronisées dont on peut régler le déphasage entre les deux). Le bruit est gaussien et généré par un deuxième GBF. Le gain du multiplieur est de  $1/10$ . Le passe bas coupe aux alentours de  $10\text{ Hz}$ . Le suiveur placé en sortie permet d'éviter l'adaptation d'impédance entre la résistance du filtre et la résistance d'entrée du scope. **Bas** : Représentation spectrale de l'évolution du spectre du signal.

- Lorsque l'entrée du multiplieur est connecté à la masse (le signal de référence étant connecté néanmoins), la sortie de la détection synchrone n'est pas rigoureusement nulle : il y a un offset résiduel qu'il faut prendre en compte. On calcule alors  $U_{in,RMS}$  avec la différence  $U_{out,max} - U_{offset}$ .
- Relever directement le maximum de tension de sortie en faisant varier la phase n'est pas la méthode la plus précise (notamment si on veut la donnée de la phase du signal d'entrée). Une autre méthode est faire varier la phase jusqu'à atteindre une tension égalant celle de l'offset résiduel : cela implique que la référence et l'entrée sont en quadrature ( $\cos\phi = 0$ ). On fait alors un bond de phase de  $\pi/2$  pour se ramener à la valeur maximum de sortie.

### 3. Commentaires

- Pourquoi faire une différence de DSP et pas de signaux ? (idées des variances qui peuvent s'ajouter : les signaux sont aléatoires, donc les valeurs moyennes ne sont pas exploitables, alors que les valeurs quadratiques (variance, covariance) sont pertinentes car les variables (bruits) sont décorréliées).
- Autres bruits dans la physique ? (bruits de photon (grenaille), bruit de quantification, bruit  $1/f, \dots$ )
- Parasites ? Bruit ? (Bruit : qqc qu'on ne contrôle pas, qui est là et dont les variations sont imprévisibles. Parasites : non voulus (ex :  $100\text{ Hz}$  sur photodiode)).
- attention à prendre, dans les calculs d'incertitudes, l'incertitude sur le gain de l'atténuateur
- il faut approfondir la notion de DSP (pistes : WIENER-KINTCHINE,  $\text{DSP} = \text{TF}(\text{fonction d'autocorrélation})$ , idée de variance, ...)

- Attention a ne pas confondre les notions liées à la corrélation (bruit corrélé (coloré)/décorrélé (blanc)) et la répartition statistique des valeurs prises par le bruit au court du temps (distribution de probabilité, bruit gaussien, poissonnien,...).
- pour le bruit de quantification, il faudrait l'aborder (remarques des jurys dans le rapport d'ALD). Cela justifie d'ailleurs la démarche adoptée dans la partie résistance thermique. Mais ça peut être compliqué... Une piste possible (JBD) est de retrouver le 8 bits des scopes par les manip qu'on a faites en début d'année, pour mettre en évidence le pas de quantification de la conversion analogique/numérique. Jeter ainsi un pont vers la notion de bruit de quantification et les enjeux de la numérisation d'un signal...