Département de physique

Recherche des caractéristiques d'un diapason
par analyse de sa réponse impulsionnelle

• Travail expérimental et rédaction du document : Jean-Baptiste Desmoulins (P.R.A.G.)
mail : desmouli@physique.ens-cachan.fr

• Sur une idée de J.F. Roch (Professeur à l'ENS de Cachan).

Cette expérience permet de récupérer la fonction de transfert d'un diapason en exploitant la réponse impulsionnelle de ce dernier de deux façons différentes.

Par la suite, on étudiera l'influence de différents paramètres sur la fréquence centrale et le facteur de qualité du diapason. On peut citer notamment l'effet de la nature du support de fixation du diapason sur son facteur de qualité (caisse de résonance ou support rigide), l'effet de la température sur la fréquence de résonance, ou l'effet de l'ajout d'une masse sur l'un des bras du diapason sur sa fréquence de résonance et son facteur de qualité.

I. Etude de la réponse impulsionnelle d'un diapason.

Pour réaliser la réponse impulsionnelle, on va frapper l'un des bras du diapason avec un petit marteau destiné à cet effet. La réponse du diapason sera récupérée au moyen d'un microphone amplifié. On supposera que l'ensemble (microphone + amplificateur) est assimilable à un simple gain scalaire sur la plage de fréquence sur laquelle le diapason résonne. Globalement, le système expérimental a l'allure suivante :

I.1. Première méthode.

On va rechercher la fonction de transfert en faisant la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. La réponse impulsionnelle est récupérée au moyen d'un système d'acquisition de type PASCO. La transformée de Fourier est calculée à partir du fichier de points récupéré avec l'une des fonctions du logiciel IGOR (version 4.09).

a/ L'acquisition des données avec le boîtier PASCO.

Pour cette expérience, on envoie le signal sortant d'un microphone amplifié sur l'une des entrées d'un boîtier d'acquisition PASCO (type « Science Workshop 700 » ou « Science Workshop 750 »). Les paramètres d'acquisition sont configurés à l'aide du logiciel « Datastudio » qui permet également de visualiser l'enregistrement des données et leur export. Le système PASCO permet ainsi de récupérer une tension dans un fichier comportant un très grand nombre de points (quelques millions si nécessaire), ce qui nous sera utile pour l'expérience que nous comptons réaliser. Le boîtier dont nous disposons nous permettra de travailler à une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz au maximum, mais cette fréquence d'échantillonnage est suffisante pour notre expérience. En effet, le signal à traiter est la tension sortant d'un microphone amplifié détectant l'onde sonore provenant d'un diapason destiné à émettre un « La 440Hz ». Après une impulsion, les oscillations amorties ont une pseudo période de 1/440 s environ. Avec la fréquence d'échantillonnage de 10 kHz, on va pouvoir obtenir une vingtaine de points par période ce qui convient pour les opérations que nous comptons réaliser sur les points acquis. Par ailleurs, on constate qu'il faut quelques dizaines de secondes pour que le son émis par le diapason redevienne inaudible (une minute pourra faire l'affaire). Nous travaillerons donc avec environ 600000 points, ce qui va parfois demander quelques secondes de patience lors du traitement des données.

b/ Le calcul de la TF avec IGOR.

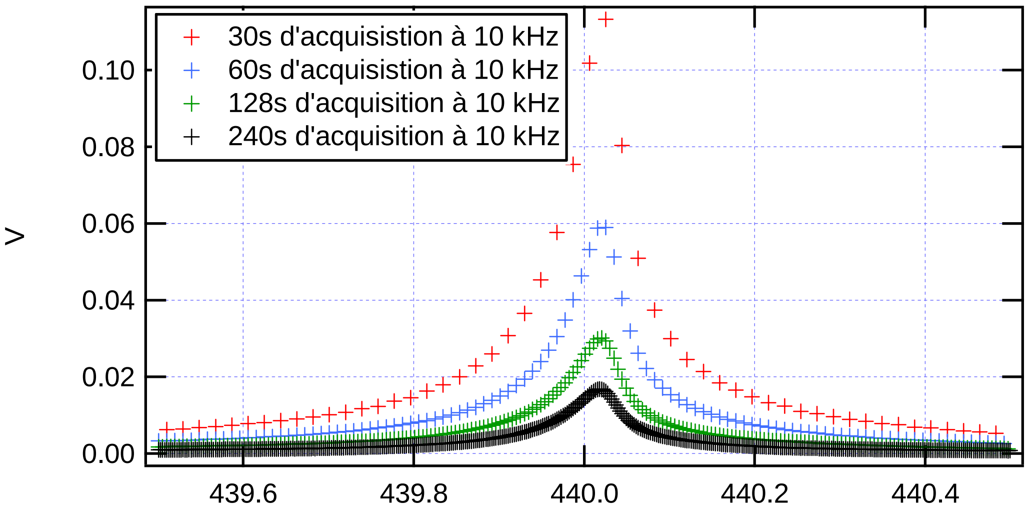
Nous disposons donc désormais d'un fichier comportant quelques centaines de milliers de points, représentant la réponse à l'impulsion sur une plage temporelle allant de quelques ms avant l'impulsion, jusqu'à ce que le signal du microphone ne puisse plus être distingué du bruit. Pour le traiter, nous allons réaliser une transformée de Fourier de type FFT (Fast Fourier Transform). Cette dernière sera réalisée avec l'une des fonction du logiciel IGOR : « FTMagPhase ». Avant de la mettre en œuvre, on attirera l'attention des utilisateurs sur les points suivants :

- Pour qu'elle fonctionne, il faut commencer par affecter une échelle de temps correcte à la tension dont on cherche la transformée de Fourier. Pour cela, allez dans « Data » puis « change waves scaling » et définir correctement start et delta. Il faut noter que delta définit l'inverse de la fréquence d'échantillonnage F_e.
- Ceci étant fait, lancer « FTMagPhase » dans « Macro ». Attention, il faut installer cette macro, disponible dans le logiciel, mais qui n'apparaît pas dans la présentation par défaut.
- On récupère alors un spectre calculé en fréquence de 0 Hz à $F_e/2$, dont l'amplitude est inversement proportionnelle au nombre de points acquis en temporel. Le nombre de points calculés dans le spectre est un peu plus délicat à comprendre. Si le nombre de points N est tel que N-1 est une puissance de 2, le système calcule N/2+1 points. Si ça n'est pas le cas, le système complète la « wave » avec des zéros pour atteindre la puissance de deux immédiatement supérieure à N-1 (notons la n) et alors, la procédure calcule $2^n/2+1$ points.

Pour plus de précision sur les transformée de Fourier, reportez vous à l'annexe de ce document.

c/ Résultats et discussion.

- Nous avons relevé la réponse impulsionnelle avec un échantillonnage à 10 kHz, en cherchant à observer l'effet de la durée d'acquisition sur le spectre obtenu. Les essais ont été réalisés sur 30s, 60s, 128s et 240 s.



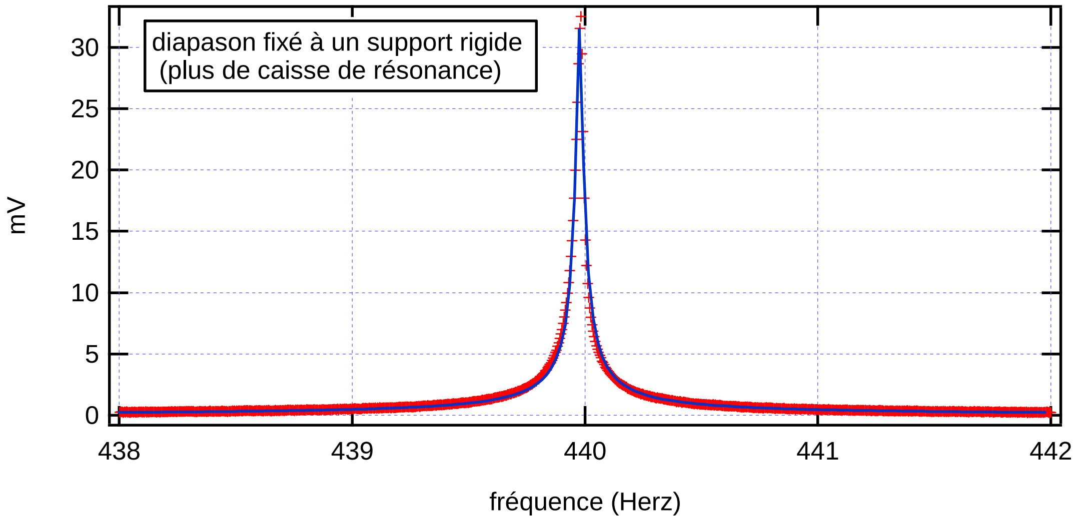
Le spectre est calculé sur une plage qui va de 0 Hz à la moitié de la fréquence d'échantillonnage (5kHz dans notre cas car on échantillonne à 10 kHz). Sur la figure, nous n'avons conservé que les points dans la zone intéressante, voisine de la fréquence de résonance du diapason.

On constate que plus l'acquisition se fait sur une durée importante, plus le nombre de points dans la zone du pic est important. Si on veut remonter à la fréquence centrale et au facteur de qualité au moyen d'un ajustement des points obtenus, on aura donc intérêt à prendre une acquisition sur une durée la plus longue possible. En revanche, on constate que l'amplitude obtenue décroît avec le nombre de points (décroissance en 1/N ?).

rq : il faut noter que le fait d'avoir plus de points dans la zone du pic ne donne pas plus d'information sur ce dernier, qui conserve la même forme (à un facteur d'échelle près). Ainsi, si on ne change pas la fréquence d'échantillonnage, prendre plus de points en temporel n'a aucun effet sur la résolution de l'analyse. Si deux pics très proches coexistent dans la zone observée, on ne pourra pas les distinguer plus facilement en observant sur 4 minutes plutôt que sur une seule. La seule solution pour améliorer la résolution, c'est d'augmenter la fréquence d'échantillonnage, mais on va alors se heurter assez rapidement aux limites techniques de notre boîtier d'acquisition.

- Bilan : en travaillant avec une durée d'acquisition supérieure à une minute, on va pouvoir récupérer de façon satisfaisante les caractéristiques de notre diapason.

Par exemple, pour un diapason fixé à un support rigide, dont on enregistre la réponse impulsionnelle sur deux minutes, en commençant quelques ms avant l'impulsion, on obtient la réponse suivante



Les points calculés sont représentés par des croix rouges. On réalise un ajustement des points obtenus par le modèle de gain d'un filtre passe bande de type

$$G = \frac{G_O}{\sqrt{1+Q^2.(f/fo - fo/f)^2}}$$

On trouve avec l'ajustement que f_o =440.0 ± 0,1 Hz et Q=14835 ± 129. Sur la figure, le résultat de l'ajustement apparaît en bleu.

I.2. Seconde méthode.

Pour remonter aux caractéristiques du diapason, on peut également chercher à analyser directement la forme temporelle de la réponse impulsionnelle de ce dernier. En effet, si la fonction de transfert G(p) de ce système est de la forme

$$G(p) = \frac{G_O}{1+Q.(p/\omega_o + \omega_o/p)}$$

où G_o est le gain statique, Q le facteur de qualité et ω_o la pulsation centrale du système, l'expression théorique de la réponse impulsionnelle est alors de la forme

$$r_i(t) = k.\frac{\omega_o{}^2}{\sqrt{1-1/(2.Q)^2}}.e^{-\frac{\omega_o}{2.Q}.t}.\sin(\omega_o.\sqrt{1-1/(2.Q)^2}.t+\theta)$$

$$\text{avec} \qquad \theta = \pi - \mathrm{Arc}\cos(\frac{1}{2.Q})$$

Il suffit alors, puisque le facteur de qualité est grand, d'observer la pseudo-période pour obtenir f_o et d'observer l'enveloppe de la décroissance pour en déduire Q. Expérimentalement, cette méthode se révèle assez peu précise, car pour obtenir Q, on va ajuster, à l'œil, une fonction de type exponentielle décroissante afin de lui faire tangenter l'enveloppe de la réponse impulsionnelle… c'est assez rustique, mais on peut utiliser cette approche avec un simple oscilloscope numérique, contrairement à la méthode précédente… Cette méthode sera mise en œuvre sur un exemple un peu plus loin dans ce document et on comparera les résultats obtenus avec ceux déduits de la TF de la réponse impulsionnelle.

II. Applications.

II.1. Effet de la nature du support du diapason.

Dans la première partie, nous avons vu que le diapason fixé à un support rigide donnait f_o =440.0 ± 0.1Hz et Q=14835 ± 129. Pour le même diapason associé à sa caisse de résonance, on obtient f_o = 439.6 ± 0.1 Hz et Q=7420 ± 40.

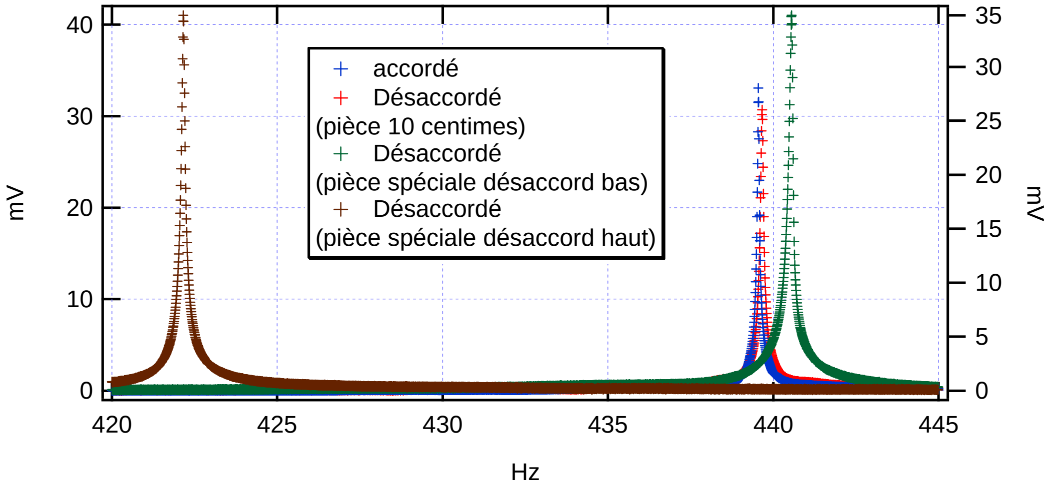
Cette dernière contribue à diffuser de l'énergie vers l'extérieur et favorise de cette façon l'amortissement des oscillations, ce qui se traduit par une baisse du facteur de qualité.

II.2. Effet de l'ajout d'une masse sur l'un des bras du diapason.

Les essais suivants ont été réalisés avec un diapason associé à sa caisse de résonance. On a cherché à désaccorder ce dernier par différentes actions mécaniques

- on a collé une pièce de 10 centimes d'euros sur l'un des bras du diapason.
- on a fixé la pièce destinée à désaccorder fournie avec les diapasons en bas d'un bras.
- on a fixé la pièce destinée à désaccorder fournie avec les diapasons en haut d'un bras.

Globalement, on a obtenu les fonctions de transfert suivantes :



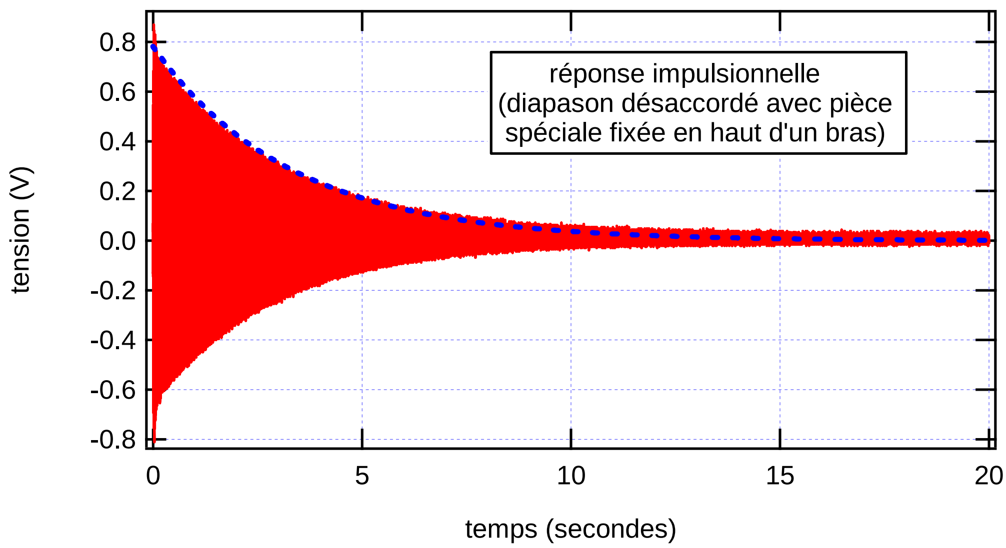
Pour le diapason accordé, on trouve $f_o = 439.6 \pm 0.1$ Hz et $Q=7420 \pm 40$

- Pour le diapason désaccordé avec une pièce de 10 centimes d'euros fixée avec du scotch double face à la base d'un bras du diapason, on trouve $f_o = 439.7 \pm 0.1$ Hz et $Q=5494 \pm 26$
- Pour le diapason désaccordé avec la pièce prévue à cet effet fixée à la base d'un bras du diapason, on trouve $f_o = 440.5 \pm 0.1$Hz et $Q=3640 \pm 56$
- Pour le diapason désaccordé avec la pièce prévue à cet effet fixée en haut d'un bras du diapason, on trouve $f_o = 422.2 \pm 0.1$ Hz et $Q=4002 \pm 45$

On constate que les désaccords décalent bien la fréquence centrale du diapason et dégradent légèrement son facteur de qualité. Un désaccord sur la base d'un bras conduit à une augmentation de la fréquence de résonance (augmentation de la rigidité). Un désaccord sur le haut d'un bras conduit à une diminution de la fréquence de résonance (augmentation de l'inertie). On note que ce dernier effet est beaucoup plus net que le précédent.

rq : application de la seconde méthode

On va créer une fonction exponentielle dont on va ajuster les paramètres afin de tangenter l'enveloppe de la réponse impulsionnelle. Dans le cas de la réponse du diapason associé à sa caisse de résonance avec désaccord par une pièce fixée en haut d'un bras, on obtient l'allure suivante :



La courbe exponentielle décroissante obtenue est donnée par la courbe en pointillés bleus. On a considéré que pour t suffisamment grand, le signal obtenu correspond à du bruit ambiant.

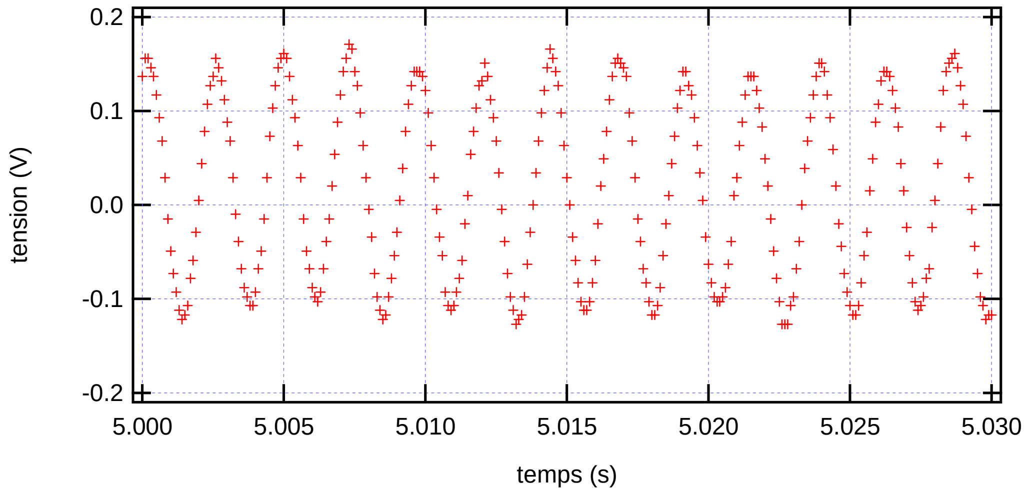
L'expression est

$$\text{enveloppe}(t) = A.e^{-t/\tau}$$

Expérimentalement, on estime que A = 0.78 V ± 0.02 V et τ = 3.3 s ± 0.1 s. On a, compte tenu de l'expression attendue pour l'enveloppe

$$Q = \frac{\omega_o.\tau}{2}$$

On observe plus en détail la courbe afin de remonter à la pseudo-pulsation, très proche de ω_o, compte tenu de la forte valeur du facteur de qualité. On observe

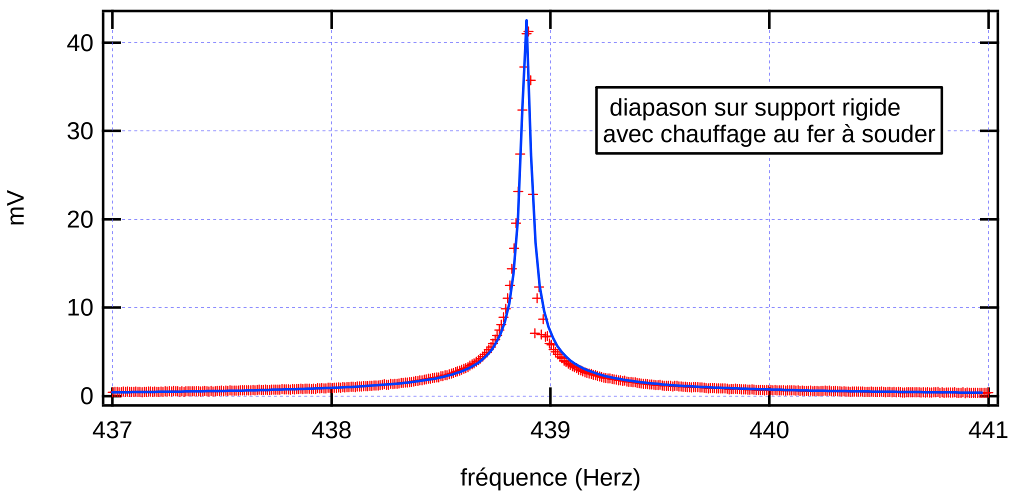


Sur 11 périodes, on mesure t = 0.0261 s ± 0.0002 s, l'incertitude étant due au pas d'échantillonnage. On en déduit que $T_o = 1/f_o = 2.37.10^{-3}$s ± $0.02.10^{-3}$ s soit f_o = 421.5 Hz ± 3.5 Hz, ou encore ω_o= 2648 rad/s ± 22 rad/s. On en déduit également que Q = 4369 ± 170. Les ordres de grandeur sont conformes avec ce qui a été obtenu par TF de la réponse impulsionnelle (on avait trouvé f_o =422.2 Hz et Q=4002 ± 45), mais ils ne correspondent pas exactement. Il faut sans doute reconnaître que la méthode est un peu rustique.

II.3. Effet de la température

On fixe l'échantillon de façon la plus rigide possible sur un support à base de fonte. Nous avons vu précédemment que f_o =440.0 ± 0.1 Hz et Q=14835 ± 129.

Avec le même système de fixation, on chauffe le diapason au fer à souder appliqué sur la base du diapason (température 450°C et on attend assez longtemps). On obtient la réponse suivante :



On trouve avec l'ajustement que f_o =439.9 ± 0.1 Hz et Q=11521 ± 265. Le diapason n'est pas dans un état homogène de température, mais l'effet de T apparaît sur f_o et Q. Il semble qu'une augmentation de la température provoque une diminution de la fréquence centrale, ce qui va dans le même sens qu'une augmentation de l'amortissement ou une diminution de la rigidité.

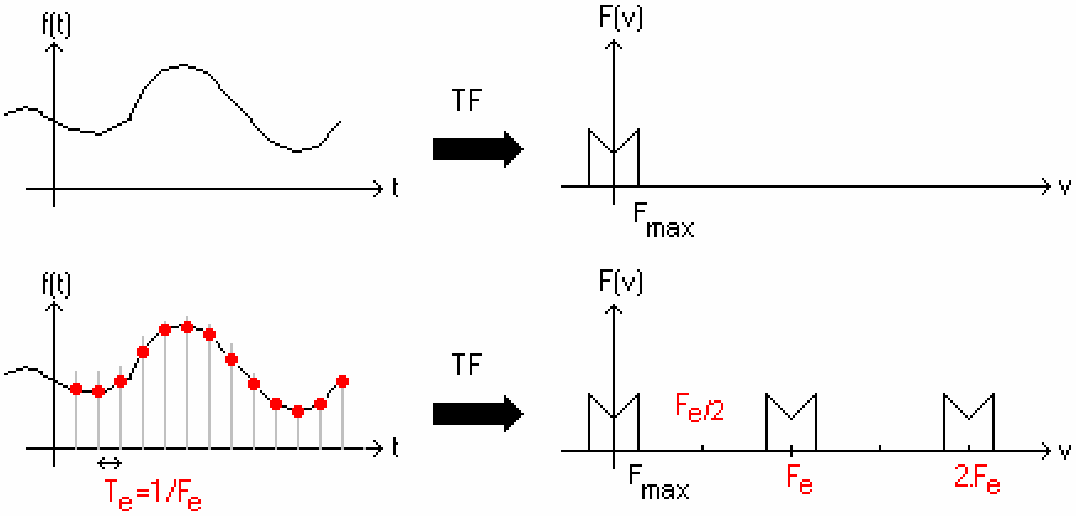
Annexe : quelques remarques importantes pour comprendre la FFT.

Dans un appareil numérique, il va falloir représenter le signal avec une quantité de données finie, en raison de la taille de mémoire disponible limitée.

<u>*Le problème du temps.*</u>

Il va tout d'abord falloir représenter le signal avec un nombre fini de points ce qui demande deux opérations :

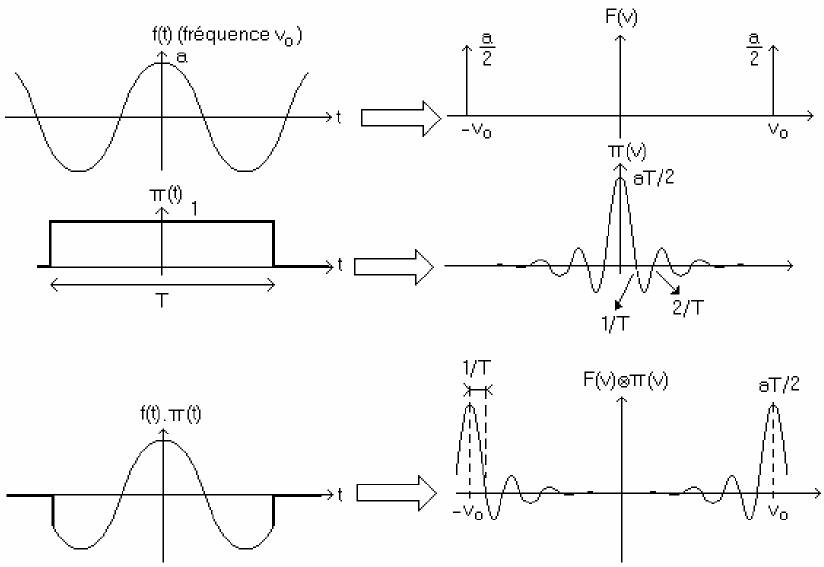
- **l'échantillonnage :** on prend des points à intervalle de temps donné (réglable avec la base de temps, nous verrons après pourquoi). Le fait d'échantillonner un signal, va provoquer une « périodisation » du spectre comme on peut le voir sur la figure suivante :



Tant que la fréquence maximale du spectre du signal non échantillonné reste inférieure à Fe/2 (critère de Shannon), il suffit d'observer le spectre sur une plage de fréquence assez étroite (de 0 à $F_e/2$) pour ne pas avoir de différence entre le signal échantillonné et le signal complet. En revanche, si cette condition n'est pas satisfaite, le motif principal et les motifs résultants de la périodisation vont se superposer et l'interprétation de la figure obtenue devient délicate. On parle alors de repliement de spectre.

- **La troncation ou troncature** : on n'observe le signal que sur une durée limitée dans le temps

Le temps a été quantifié avec l'étape d'échantillonnage. Le fait de tronquer le signal va faire, pour un spectre de raies, que les impulsions de Dirac vont être remplacées par la transformée de Fourier de la fenêtre de troncation. Pour mieux comprendre, on peut se référer à la figure suivante, qui traite du cas particulier de la troncation d'une sinusoïde par une fenêtre rectangulaire



Sur les systèmes d'acquisition comme les oscilloscopes numériques par exemple, vous pouvez choisir la forme de la fenêtre de troncation afin de pouvoir modifier la forme des pics pour la rendre plus adaptée aux mesures que vous souhaitez faire (sommets larges et plus aplatis pour avoir un meilleur résultat sur l'amplitude, ou au contraire pics plus fin pour pouvoir distinguer des raies proches).

<u>*Le problème de l'amplitude.*</u>

Il va falloir être en mesure de représenter l'amplitude par une grandeur occupant un espace mémoire limité. Pour représenter cette amplitude, nous allons utiliser un code binaire, interprétable par les systèmes numériques, qui va nous permettre de quantifier l'amplitude (nombre d'états limité). Par exemple, si le système fait une acquisition sur 20V d'amplitude et code l'information sur 8 bits, il y a 2^8 états possibles (256). L'écart en tension entre 2 états successifs est de 78,1 mV. Les valeurs réelles de signal tomberont évidemment toujours entre deux valeurs permises. On adoptera alors systématiquement la valeur permise directement supérieure ou inférieure, ce qui va nous permettre de représenter la tension réelle par un mot binaire de 8 bits. Plus le nombre de bits sera important, plus la résolution du système sera bonne, mais plus la place occupée en mémoire sera importante. Par exemple, les oscilloscopes d'entrée de gamme codent l'amplitude sur 8 ou 9 bits suivant les modèles. Avec le système PASCO utilisé, la conversion se fait sur 12 bits.

Liste de matériel.

Un microphone amplifié
Un oscilloscope numérique
Un système d'acquisition PASCO + carte PCMCIA + câbles de prise de tension + alimentation
Un ordinateur portable
Un pied de fixation avec un pince
Deux diapasons
Un marteau

Version du 01-05-2006