

Phénomènes de propagation non dispersifs

Sommaire

1.1 Équation de d'Alembert unidimensionnelle	2
1.1.1 Onde transversale sur une corde vibrante	2
1.1.2 Câble coaxial	3
1.2 Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle	5
1.2.1 Ondes progressives	5
1.2.2 Ondes progressives harmoniques	5
1.2.3 Ondes stationnaires	7
1.3 Conséquences des conditions aux limites	8
1.3.1 Corde vibrante	8
1.3.2 Câble coaxial	10

Questions de cours :

- Montrer que les déplacements transversaux d'une corde vibrante vérifient l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. En déduire la vitesse de propagation des ondes.
- Donner la modélisation électrique d'un câble coaxial (en expliquant). En déduire l'équation de d'Alembert associée aux ondes de tension et d'intensité.
- Préciser la solution la plus générale à une équation de d'Alembert 1D. Expliciter deux bases de solutions et le lien entre ces dernières.
- Équation de d'Alembert 1D : résolution en complexes, relation de dispersion, vecteur d'onde, vitesse de phase.
- Déterminer les modes propres d'une corde tendue entre ces deux extrémités. Expliciter succinctement la méthode de résolution connaissant les conditions initiales sur la position transversale et la vitesse de chaque élément de corde.

Capacités exigibles du BO :

- Établir l'équation d'onde en utilisant des systèmes infinitésimaux.
- Définir une onde longitudinale et une onde transversale.
- Identifier une équation de d'Alembert.
- Exprimer la célérité en fonction des paramètres du milieu.
- Définir une onde progressive et une onde stationnaire.
- Établir la relation de dispersion à partir de l'équation de d'Alembert. Utiliser la notation complexe.
- Définir le vecteur d'onde, la vitesse de phase.
- Retrouver la distance égale à $\lambda/2$ entre deux nœuds consécutifs ou entre deux ventres consécutifs.
- Décomposer une onde stationnaire en ondes progressives, une onde progressive en ondes stationnaires.
- Justifier et exploiter des conditions aux limites.
- Définir et décrire les modes propres.
- Construire une solution quelconque par superposition de modes propres.
- Associer mode propre et résonance en régime forcé.
- Décrire le modèle. Établir les équations de propagation.
- Établir l'expression de l'impédance caractéristique d'un câble coaxial.

I. Équation de d'Alembert unidimensionnelle

I.1 Onde transversale sur une corde vibrante

a) Hypothèses du modèle

Intéressons-nous à une corde de longueur L , masse m et masse linéique $\mu = \frac{m}{L}$. Quelques hypothèses sont nécessaires pour effectuer une modélisation simplifiée :



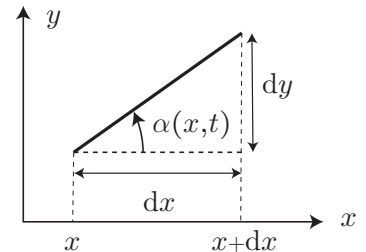
- * La corde est considérée comme quasi-inextensible et souple (c'est-à-dire qu'elle n'oppose aucune résistance à sa déformation) ;
- * elle est tendue entre ses deux extrémités avec une tension $T_0 \gg mg$ de sorte à négliger l'effet de son propre poids ;
- * à l'équilibre, la corde est tendue horizontalement, $y(x, t) = 0$;
- * on étudie les petites déformations transversales de la corde. Ainsi en notant $\alpha(M, t)$ l'angle que fait la tangente à un point M de la corde à l'instant t , on considère que $|\alpha| \ll 1$ de sorte à linéariser l'ensemble des équations.

Les déformations qui vont pouvoir se propager dans la corde sont alors des ondes transversales (perpendiculaires à la direction de propagation) unidimensionnelles (selon la direction (Ox)).

b) Mise en équation

* Considérons donc un élément infinitésimal de corde pris entre le point $M(x, y)$ et $M'(x+dx, y+dy)$. Notons $\alpha(x, t)$ l'angle entre la tangente à la corde en M et l'horizontale. Au premier ordre en α :

$$\tan \alpha \simeq \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \simeq \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}} \quad (1.1)$$



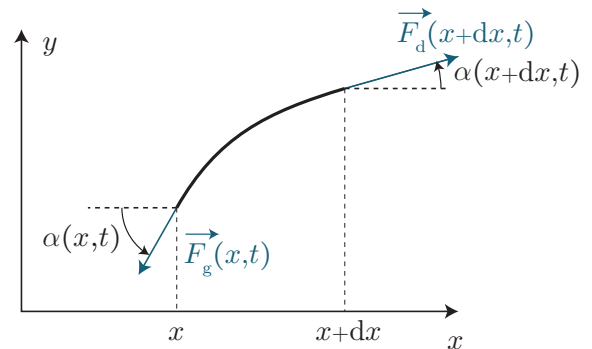
La longueur de cette portion de corde vaut alors :

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \simeq dx \sqrt{1 + \alpha^2} = dx(1 + \mathcal{O}(\alpha^2)) \simeq dx \quad (1.2)$$

Cet élément de corde est soumis à deux forces :

- * la tension exercée par la partie droite du fil sur cet élément de corde $\vec{T}_d(x+dx, t) = \vec{T}(x+dx, t)$;
- * la tension exercée par la partie gauche du fil sur cet élément de corde $\vec{T}_g(x, t)$. Or le principe des actions réciproques conduit à $\vec{T}_g(x, t) = -\vec{T}_d(x, t) = -\vec{T}(x, t)$.

Ainsi en appliquant la loi de la quantité de mouvement à cet élément de corde :



$$* \quad \mu dl \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}_d(x+dx, t) + \vec{T}_g(x, t) = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t) \iff \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \quad (1.3)$$

soit en projection sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial x} (T(x, t) \cos(\alpha(x, t))) \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T(x, t) \sin(\alpha(x, t))) \end{cases} \quad (1.5)$$

* La première équation donne au premier ordre en α $T(x, t) = f(t) = T_0$ (avec la condition aux limites $T(L, t) = T_0$), donc la tension est de norme constante dans toute la corde. Tandis que l'autre équation devient :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \iff \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Équation de d'Alembert à une dimension

On dit qu'un champ physique $f(x, t)$ vérifie une équation d'onde de d'Alembert si f est régi par l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (1.7)$$

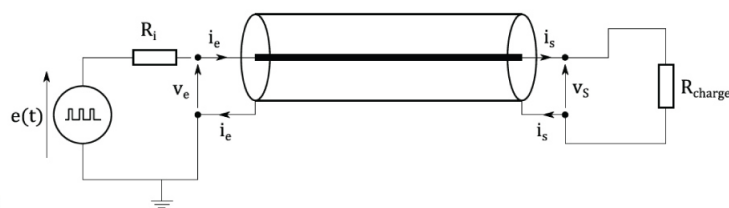
avec c la vitesse de propagation de l'onde associée au champ physique f .

Ainsi la vitesse de propagation de perturbations transversales à une corde est liée à la tension et la masse linéique par $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

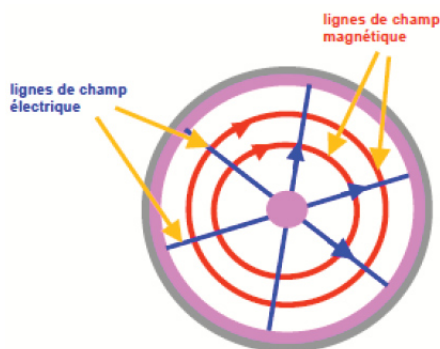
I.2 Câble coaxial

a) Présentation

Les câbles coaxiaux sont très couramment utilisés pour transmettre des signaux électriques, par exemple depuis une antenne satellite vers le décodeur, ou encore en TP. Ils sont constitués d'un conducteur central (appelé l'âme), d'une tresse métallique périphérique en cuivre ou aluminium, le tout séparé par un isolant électrique. En général le conducteur périphérique est porté à la masse.

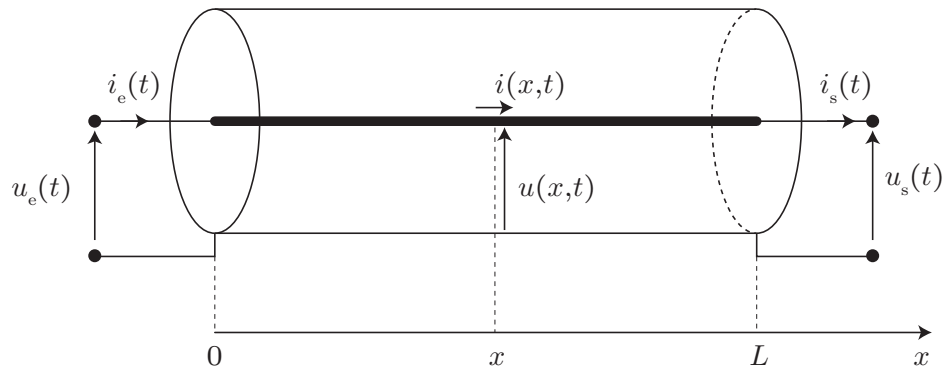


La tension est appliquée entre les deux conducteurs, et le courant circule en sens inverse dans les deux conducteurs (courant quasi surfaciques dans la tresse). On constate qu'outre des phénomènes résistifs, il y a des effets capacitifs et inductifs liés à la structure spatiale du champ électromagnétique créé par cette structure.



Comparativement à ce que l'on a fait d'habitude en électronique, on ne va pas se placer dans les conditions de l'ARQS, car les lignes de transmission avec des câbles coaxiaux peuvent être très longues, de sorte que $L > \lambda = \frac{c}{f}$, c'est-à-dire qu'il faut prendre en compte le temps de propagation. C'est

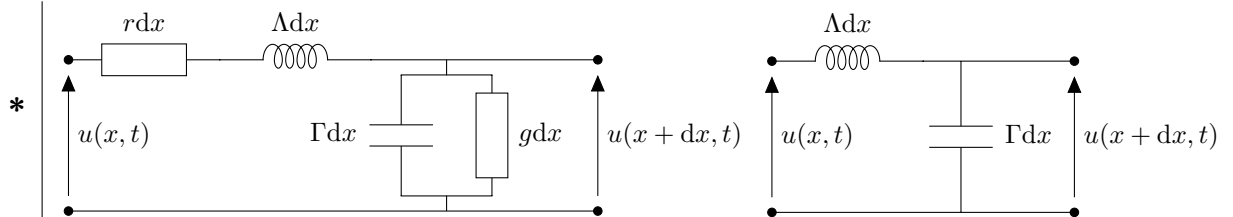
particulièrement le cas à haute fréquence. On note alors $i(x, t)$ et $u(x, t)$ la tension et le courant à une abscisse x du câble :



Un exemple concret d'application de cette théorie, lorsqu'on ne respecte plus l'ARQS, est la propagation d'information dans un câble ethernet : avec des fréquences de l'ordre de 10 MHz, la longueur d'onde est de l'ordre de la dizaine de mètres. Or les réseaux ont souvent des longueurs très grandes devant cette longueur d'onde !

b) Modélisation à constantes réparties

La modélisation du câble coaxial, ne respectant plus l'ARQS, nécessite un découpage en tronçons de longueur élémentaire dx . Pour prendre en compte les effets résistifs, capacitifs et inductifs, la modélisation électrique d'un câble est la suivante :



où $r dx$ est la résistance en série (le long des conducteurs), $G dx$ la capacité, $L dx$ l'inductance, et $g dx$ la conductance latérale de fuite (isolant imparfait). Le programme nous demandant d'étudier un modèle sans pertes, c'est bien la cellule de droite que l'on va étudier : on parle de modèle à **constantes réparties**.

Ordres de grandeur typiques : $G = 100 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$ et $L = 0,25 \text{ } \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$, quasi-constants jusqu'à des fréquences de l'ordre du GHz.

En notant a le rayon de l'âme et b le rayon de la tresse, on peut montrer en effet que $G = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(b/a)}$ et $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$.

c) Mise en équation

On écrit la loi des mailles que l'on développe au premier ordre en dx :

$$u(x, t) = L dx \frac{\partial i}{\partial t} + u(x + dx, t) \Rightarrow L dx \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (1.8)$$

et la loi des nœuds :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + G dx \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -G \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (1.9)$$

En dérivant la première par rapport à x et la deuxième par rapport à t , on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} t = -\frac{1}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -G \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (1.10)$$

On reconnaît là une équation de d'Alembert, en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} \sim 2 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On peut de même montrer que i vérifie l'équation $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$.

II. Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

II.1 Ondes progressives

a) Recherche des solutions

Considérons l'équation de d'Alembert à 1D $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$. Euler montra que les fonctions de la forme $s_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ et $s_-(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ sont les uniques formes de solutions de l'équation de d'Alembert. En effet, posons $u = t - x/c$:

$$\frac{\partial s_+}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{1}{c} f'(u) \Rightarrow \frac{\partial^2 s_+}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f''(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 s_+}{\partial t^2} = f''(u) \quad (1.11)$$

Donc f est bien solution de l'équation de d'Alembert, et il en est de même pour g . On admet alors que la solution générale de l'équation de d'Alembert à 1D est :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (1.12)$$

ou de manière équivalente $s(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. L'équation de d'Alembert en elle-même n'impose pas la forme des fonctions f et g , c'est la source et les conditions aux limites qui l'impose.

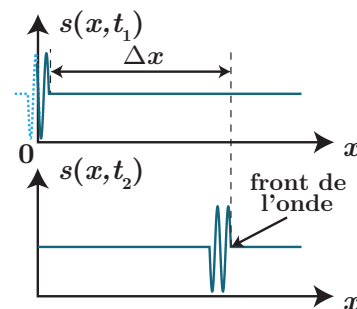
b) Interprétation

Connaissant l'allure de l'onde à l'instant t_1 , qu'en est-il à l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$? Supposons qu'elle s'écrive sous la forme $s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$

$$s(x, t_1 + \Delta t) = f\left(t_1 + \Delta t - \frac{x}{c}\right) \quad (1.13)$$

$$= f\left(t_1 - \frac{(x - c\Delta t)}{c}\right) \quad (1.14)$$

$$= s(x - c\Delta t, t_1) \quad (1.15)$$



c'est-à-dire la même courbe, mais translatée spatialement de $\Delta x = c\Delta t$ vers les x croissants : l'onde s'est propagée sans déformation à la vitesse c . $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ décrit donc une onde progressive dans le sens des x croissants, et de même $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ décrit une onde progressive dans le sens des x décroissants.



On peut en conclure qu'une onde quelconque est somme d'ondes progressive, mais $f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ n'est PAS une onde progressive.

II.2 Ondes progressives harmoniques

a) Définition

Une onde progressive est harmonique (OPH) ou monochromatique si sa fonction d'onde (f ou g) est sinusoïdale :

$$s(x, t) = s_0 \cos\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) \quad (1.16)$$

avec ω la pulsation et φ la phase à l'origine des temps et de l'espace.

b) Intérêt

L'intérêt d'introduire les OPH est que l'on peut faire des calculs plus simples, voire utiliser les notations complexes. Cependant une OPH n'existe pas, car elle serait infiniment étendue dans le temps et l'espace. Mézamor, comment décrire une onde réelle ?

- soit l'onde est périodique, on peut décomposer en série de Fourier (pas beaucoup plus réaliste, sauf si elle est construite à partir d'une onde de taille finie par répétition) :

$$s(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \cos \left(n\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_n \right) \quad (1.17)$$

*

- soit l'onde n'est pas périodique, on généralise alors à l'aide de la transformée de Fourier :

$$s(x, t) = \int_0^{+\infty} s(\omega) \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi(\omega) \right) \quad (1.18)$$

On parle alors de **paquet d'ondes**, notion qui sera développée dans un prochain chapitre.

Base de solution

La solution générale d'une équation de d'Alembert à 1D est une superposition d'une infinité d'OPH se propageant dans les deux sens : les OPH constituent alors une base des solutions.

c) Double périodicité

Soit une OPH décrite par $s(x, t) = s_0 \cos(\omega(t - x/c) + \varphi)$. Elle possède une période spatiale T :

$$\forall(x, t) \quad s(x, t + T) = s(x, t) \iff \cos(\omega t - \omega x/c + \varphi) = \cos(\omega t + \omega T - \omega x/c + \varphi) \quad (1.19)$$

$$\implies \omega T = 2\pi \iff T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.20)$$

mais également une période spatiale λ , la longueur d'onde :

$$\forall(x, t) \quad s(x + \lambda, t) = s(x, t) \iff \cos(\omega t - \omega x/c - \omega \lambda/c + \varphi) = \cos(\omega t - \omega x/c + \varphi) \quad (1.21)$$

$$\implies \frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi \implies \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT \quad (1.22)$$

- * On définit aussi le **vecteur d'onde** $\vec{k} = k\vec{u}$, dont la norme k correspondant à une pulsation spatiale, et $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dirigeant la propagation. Par définition $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$. On écrit alors couramment l'OPH sous la forme :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t \mp kx + \varphi) \quad (1.23)$$

d) Relation de dispersion

En passant en notations complexes, $\underline{s}(x, t) = s_0 e^{j(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{s}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ avec $\underline{s}_0 = s_0 e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe. On retrouve alors l'intérêt de l'introduction des notations complexes :

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = j\omega \underline{s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{s}}{\partial x} = -jk \underline{s} \quad (1.24)$$

dans le cas d'une OPH se propageant dans le sens des x croissants.



Certains sujets pourraient décider de prendre la convention $e^{j(kx - \omega t)}$ sans changer le sens physique. Dans ce cas les relations précédentes sont différentes. Il faut donc conserver tout le long d'un raisonnement les mêmes notations.

En injectant la solution complexe dans l'équation de d'Alembert, on aboutit à :

$$(-jk)^2 \underline{s} = c^2 (j\omega)^2 \underline{s} \implies k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.25)$$

appelée **relation de dispersion** des ondes.

On a alors deux solutions $k = \pm \frac{\omega}{c}$, traduisant les deux directions possibles de la propagation d'une onde progressive le long de la corde ou du câble coaxial, par exemple.

e) Vitesse de phase

On définit la phase totale de l'onde par $\Psi(x, t) = \omega t - kx + \varphi$. À phase totale égale, les vibrations sont égales. On peut chercher à quelle vitesse, appelée **vitesse de phase** v_φ , se propagent les points de phase égale en cherchant la durée nécessaire pour la vibration en $M' (x + dx)$ à l'instant $t + dt$ soit la même qu'en $M (x)$ à l'instant t :

$$* \quad d\Psi = \Psi(x + dx, t + dt) - \Psi(x, t) = 0 \iff \omega dt - k dx = 0 \implies v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (1.26)$$

Dans le cas de la corde vibrante ou du câble coaxial, la vitesse de phase est une constante ne dépendant que des caractéristiques du milieu, mais pas de la fréquence de l'onde : on parle de **milieu non dispersif**. On observe ici que $v_\varphi = c$.

On verra plus tard que ce n'est pas la vitesse de propagation de l'énergie. En particulier, on peut parfois observer que la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière !

II.3 Ondes stationnaires

Une onde est dite stationnaire si sa fonction d'onde au point M découple les variables temporelles et spatiales :

$$s(M, t) = f(M)g(t) \quad (1.27)$$

soit à une dimension $s(x, t) = f(x)g(t)$. Il n'y a alors **pas de propagation**.

a) Résolution par méthode des variables séparées

En injectant la forme d'onde stationnaire dans l'équation de d'Alembert à 1D, on aboutit à :

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2} f(x)g''(t) \implies \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} \quad (1.28)$$

* en des points où le produit $f(x)g(t)$ ne s'annule pas. On a donc l'égalité d'une fonction de x avec une fonction du temps, ces deux quantités sont constantes, on se retrouve alors à résoudre deux équations :

$$\begin{cases} f''(x) - Kf(x) = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} g''(t) - c^2 K g = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Partant de la seconde équation, on peut éliminer de notre étude les cas $K > 0$ et $K = 0$, car ils impliquent que $g \rightarrow +\infty$ ou $g \rightarrow 0$, ce qui ne sera pas le cadre d'étude de phénomènes entretenus sans dissipation d'énergie. Posons alors $K = -k^2$, on a alors deux équations d'oscillateurs harmoniques :

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \implies f(x) = A \cos(kx + \varphi) \end{cases} \quad (1.31)$$

$$* \quad \begin{cases} g''(t) + k^2 c^2 g(t) = 0 \implies g(t) = B \cos(\omega t + \Psi) \end{cases} \quad (1.32)$$

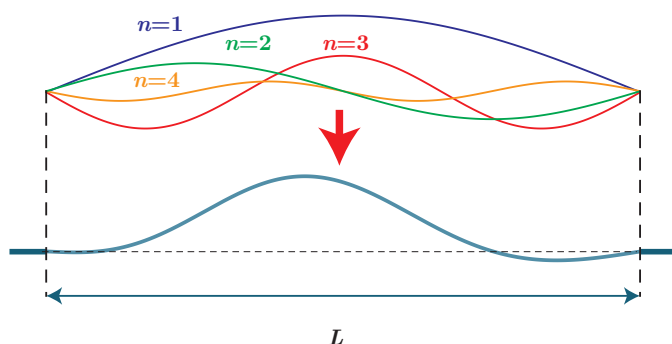
en posant $\omega = ck$. Ainsi on obtient une autre base de solutions de l'équation de d'Alembert 1D avec des ondes stationnaires harmoniques (OSH) :

$$s(x, t) = s_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \Psi) \quad (1.33)$$



Manipulation

<http://www.falstad.com/loadstring/>



b) Ventres et nœuds

Par définition :

- les nœuds de l'onde stationnaire sont tels que $s = 0$, $\forall t$, impliquant

$$\cos(kx + \varphi) = 0 \iff kx + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff x = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad (1.34)$$

c'est-à-dire, en notant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, que deux nœuds plus proches voisins sont distants de $\lambda/2$;

- les ventres de l'onde stationnaires sont les lieux où l'amplitude de s est maximale $\forall t$:

$$\cos(kx + \varphi) = \pm 1 \iff kx + \varphi = n\pi \iff x = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad (1.35)$$

Ainsi deux ventres sont distants de $\lambda/2$, et un ventre et un nœuds plus proches voisins sont distants de $\lambda/4$.

c) Relation entre les ondes stationnaires et les ondes progressives

Ces deux bases de solutions sont en réalité équivalentes. En effet, une onde stationnaire est la somme de deux ondes progressives contra-propageantes :

$$s_0 \cos(\omega t + \Psi) \cos(kx + \varphi) = \frac{s_0}{2} \left(\cos(\omega t - kx + \Psi - \varphi) + \cos(\omega t + kx + \Psi + \varphi) \right) \quad (1.36)$$

À l'inverse, une onde progressive est la somme de deux ondes stationnaires :

$$s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx) + s_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx) \quad (1.37)$$

On peut alors se demander quelle base choisir, au vu de cette équivalence. Le choix se fait souvent en lien avec la situation physique rencontrée, en particulier les conditions aux limites imposées au système.

III. Conséquences des conditions aux limites

III.1 Corde vibrante

a) Régime libre

i) Système étudié

Considérons une corde vérifiant une équation de d'Alembert 1D, fixée en ses deux extrémités. Elle vérifie deux **conditions aux limites** :

$$\begin{cases} \forall t, & y(0, t) = 0 \\ \forall t, & y(L, t) = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

$$\quad (1.39)$$

À $t = 0$, on déforme la corde : on impose alors des **conditions initiales** :

$$y(x, 0) = a(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = b(x) \quad (1.40)$$

où a et b sont deux fonctions définies sur $[0; L]$.

ii) Modes propres

On va chercher une solution sous forme d'OSH :

$$y(x, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad (1.41)$$

Appliquons les conditions aux limites :

$$\forall t, \quad y(0, t) = 0 \iff \forall t, \quad C \cos(\omega t + \varphi) \cos(\Psi) = 0 \iff \Psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (1.42)$$

$$\iff y(x, t) = C' \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx) \quad (1.43)$$

$$\forall t, \quad y(L, t) = 0 \iff \forall t, \quad C' \cos(\omega t + \varphi) \sin(kL) = 0 \implies \sin(kL) = 0 \quad (1.44)$$

$$\implies kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \implies \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N}^*} \quad (1.45)$$

soit avec $\omega = ck$, une valeur de n définit une pulsation associée $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, une fréquence $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$, où $f_1 = \frac{c}{2L}$ est le fondamental. Enfin les longueurs d'onde vérifient $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$.

Ainsi les solutions sont :

Modes propres d'une corde vibrante

Pour une corde de longueur L , célérité c maintenue entre ses deux extrémités, on définit une base particulière de solutions de l'équation de d'Alembert 1D appelés **modes propres** :

$$y_n(t) = C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \quad (1.46)$$

iii) Solution du problème

La solution générale pour une corde tendue entre ses deux extrémités est donc une combinaison linéaire des modes propres ainsi obtenues :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x) \quad (1.47)$$

On détermine alors les constantes $\{C_n, \varphi_n\}$ ou $\{A_n, B_n\}$ avec les conditions initiales

$$y(x, 0) = a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(k_n x) \quad (1.48)$$

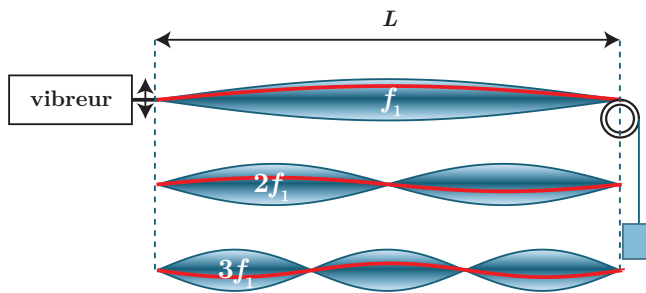
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = b(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) \quad (1.49)$$

c'est-à-dire que les A_n et $B_n \omega_n$ sont les coefficients du développement en série de Fourier de $a(x)$ et $b(x)$.

Plus précisément, les A_n représentent les coefficients du développement en série de Fourier de $a(x)$ prolongée de manière impaire, et $2L$ -périodique sur $\mathbb{R}$.

b) Régime forcé

Au lieu d'imposer des conditions initiales à la corde, on peut également imposer une condition aux limites périodique : on peut par exemple attacher l'extrémité $x = 0$ à un vibreur imposant une excitation sinusoïdale à la pulsation ω , tout en laissant l'autre extrémité fixe. Ainsi $y(0, t) = a \cos(\omega t)$ et $y(L, t) = 0, \forall t$. C'est l'expérience de la corde de Melde, observée en première année à l'aide d'un stroboscope qui a permis de mettre en évidence, pour certaines fréquences, les modes propres que l'on vient de déterminer :



On cherche également une solution sous forme d'ondes stationnaires :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad \text{avec} \quad \omega = ck \quad (1.50)$$

En $x = 0$:

$$\forall t \quad a \cos(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\Psi) \implies \varphi = 0 \quad \text{et} \quad a = A \cos \Psi \quad (1.51)$$

et en $x = L$:

$$0 = A \cos(\omega t) \cos(kL + \Psi) \implies kL + \Psi = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff \Psi = \frac{\pi}{2} + n\pi - kL \quad (1.52)$$

Ainsi si on remplace dans la forme générale, en notant que $\cos\left(kx + \frac{\pi}{2} + n\pi - kL\right) = (-1)^n \sin(k(L-x))$ et $\cos(\Psi) = (-1)^n \sin(kL)$:

$$y(x, t) = \frac{a}{\cos(\Psi)} \cos(\omega t) \cos(kx + \Psi) = a \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \quad (1.53)$$

On observe alors en particulier que pour $kL = n\pi$, $y \rightarrow +\infty$: il y a résonance de la corde de Melde pour les modes propres définis précédemment. En pratique, à cause des frottements et de la non-linéarité ($\alpha \ll 1$ plus vérifié), l'amplitude ne diverge pas.

III.2 Câble coaxial

a) Impédance caractéristique du câble

On a vu que la tension et l'intensité dans un câble coaxial obéissent à des équations de d'Alembert identiques. Toutefois, on ne peut les résoudre indépendamment l'une de l'autre, car ces deux grandeurs restent couplées par les équations établies à l'aide de la loi des mailles et des nœuds.

On peut se demander quel est le lien entre u et i , partant d'une OPH pour u se propageant dans le sens des x croissants :

$$\underline{u}^+(x, t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)} \quad (1.54)$$

* Le système étant linéaire, on peut chercher une forme similaire pour i , et donc en injectant cette forme dans l'une des deux équations :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow -jk\underline{u}^+ = -\Lambda j\omega \underline{i}^+ \Rightarrow \frac{\underline{u}^+}{\underline{i}^+} = \frac{\Lambda\omega}{k} = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c \quad (1.55)$$

On introduit l'impédance caractéristique du câble coaxial Z_c représentant le lien entre l'onde de tension et celle de courant. Elle s'exprime bien en ohms. Avec les valeurs typiques qui étaient données, $Z_c = 50 \Omega$. Pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants, $\underline{u}^- = -Z_c \underline{i}^-$.



Comme l'impédance est ici réelle dans ce modèle, les mêmes relations sont vérifiées pour les grandeurs réelles de tension et courant, mais uniquement pour des OPH, ou de manière générale pour des ondes progressives (par décomposition en série de Fourier).

Relation courant-tension dans un câble coaxial

Dans le cadre d'ondes progressives harmoniques se propageant dans un câble coaxial d'impédance caractéristique Z_c , on observe les relations suivantes :

$$u\left(t - \frac{x}{c}\right) = Z_c i\left(t - \frac{x}{c}\right) \Rightarrow u_0 \cos(\omega t - kx) = Z_c i_0 \cos(\omega t - kx) \quad (1.56)$$

$$u\left(t + \frac{x}{c}\right) = -Z_c i\left(t + \frac{x}{c}\right) \Rightarrow u_0 \cos(\omega t + kx) = -Z_c i_0 \cos(\omega t + kx) \quad (1.57)$$

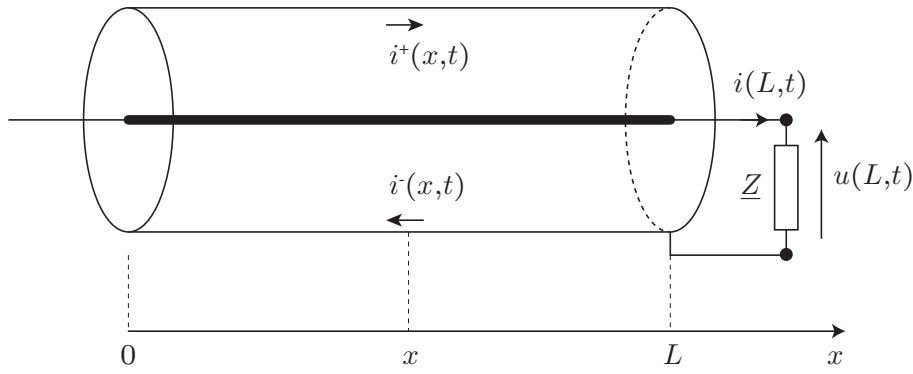
$$(1.58)$$

tandis que pour une onde quelconque de tension, on ne peut a priori pas établir de lien entre u et i .

b) Réflexion en amplitude sur une impédance terminale

i) Calcul du coefficient de réflexion

Considérons la propagation d'une onde de tension à l'intérieur d'un câble coaxial branché sur une impédance terminale, d'impédance $\underline{Z}$. L'onde est a priori partiellement absorbée par l'impédance terminale, partiellement réfléchiée. Comment choisir $\underline{Z}$ afin que toute la puissance de l'onde soit absorbée par le récepteur ?



On ne s'intéresse pas ici aux conditions aux limites en $x = 0$. On note $\underline{u}^+(x, t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)}$ l'onde incidente qui se dirige dans le sens des x croissants. L'impédance à l'extrémité du câble impose la condition aux limites :

$$\underline{u}(L, t) = \underline{Z} i(L, t) \quad (1.59)$$

* Dans le cas général, $\underline{Z} \neq Z_c$, donc $\underline{u}^+(L, t) = Z_c i_+(L, t)$ est incompatible avec cette condition aux limites, sauf s'il existe une onde réfléchie. Cette dernière se propage dans le sens des x décroissants, et l'on note : $\underline{u}^-(x, t) = \underline{u}_0^- e^{j(\omega t + kx)}$.

L'onde totale s'écrit :

$$\underline{u}(x, t) = \underline{u}^+(x, t) + \underline{u}^-(x, t) \quad \text{et} \quad \underline{i}(x, t) = \underline{i}^+(x, t) + \underline{i}^-(x, t) = \frac{1}{Z_c} (\underline{u}^+(x, t) - \underline{u}^-(x, t)) \quad (1.60)$$

Appelons $r_u = \frac{\underline{u}^-(L, t)}{\underline{u}^+(L, t)}$ le coefficient de réflexion en amplitude de la tension. On a alors

$$\underline{u}(L, t) = \underline{u}^+(L, t)(1 + r_u) \quad \text{et} \quad \underline{i}(L, t) = \underline{u}^+(L, t) \frac{1 - r_u}{Z_c} \quad (1.61)$$

* La condition aux limites donne alors :

$$\underline{u}(L, t) = \underline{Z} \underline{i}(L, t) \iff 1 + r_u = \frac{\underline{Z}}{Z_c} (1 - r_u) \iff r_u = \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c} \quad (1.62)$$

Si on a également une onde transmise, on notera alors u_i , u_r et u_t les ondes de tension incidente, réfléchie et transmise. Alors $r_u = \frac{u_r}{u_i}$ au point considéré.

Notons que de la même façon $r_i = \frac{\underline{i}^-(L, t)}{\underline{i}^+(L, t)} = \frac{-\underline{u}^-(L, t)}{\underline{u}^+(L, t)} = -r_u$.

ii) Analyse

Regardons quelques cas particuliers :

- * si $\underline{Z} = Z_c$, il n'y a pas de réflexion : on dit qu'il y a adaptation d'impédance, car l'onde incidente est totalement absorbée par la charge résistive ;
- * si $\underline{Z} = 0$, on est en **court-circuit**, $r_u = -1$, il y a alors réflexion totale avec changement de signe de la tension. Un calcul supplémentaire montre alors qu'on a une onde stationnaire à la fois pour la tension et pour l'intensité, mais elles sont en quadrature spatiale et temporelle (donc aucune puissance n'est transportée en moyenne)
- * si $|\underline{Z}| \rightarrow +\infty$, on est en **circuit ouvert**, $r_u = +1$, il y a également réflexion totale sans changement de signe de la tension. On peut également montrer que les ondes sont aussi en quadrature.

On peut généraliser la notion d'impédance caractéristique à d'autres types d'ondes et de milieux :

$$Z_c = \left| \frac{\text{cause de l'effet}}{\text{vitesse de l'effet}} \right| \quad (1.63)$$

pour une onde progressive. Par exemple pour une corde, $Z_c = \left| \frac{F_y}{v_y} \right| = \left| \frac{T_0 \alpha}{\frac{\partial y}{\partial t}} \right|$. Pour une OPH,

$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \mu \frac{\partial v_y}{\partial X} = -\frac{1}{c} \frac{\partial F_y}{\partial X}$ en posant $X = t - \frac{x}{c}$. Donc $F_y = -\mu c v_y$ et $Z_c = \mu c = \sqrt{T_0 \mu}$. L'approche réalisée pour le câble coaxial peut alors être étendue aux ondes qui se propagent sur une corde. En particulier le fait d'avoir une corde fixe à une extrémité est source d'une onde réfléchie avec changement de signe : $r_y = \frac{y^-(L, t)}{y^+(L, t)} = -1$.

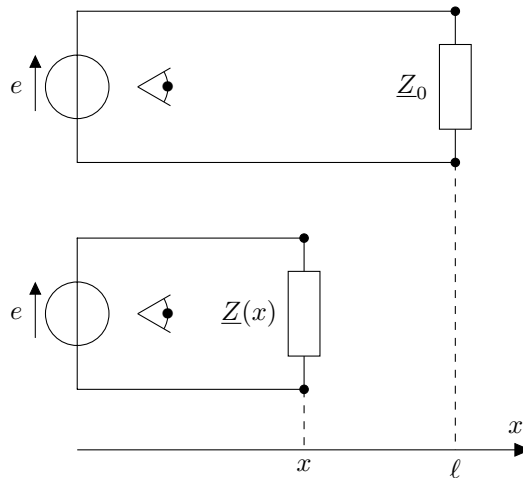
c) Sens physique associé à l'impédance

Un point essentiel à bien comprendre est l'intérêt d'introduire une impédance sur la ligne. En effet, de manière générale il est toujours possible de définir une impédance complexe en régime sinusoïdal forcé par

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} \quad (1.64)$$

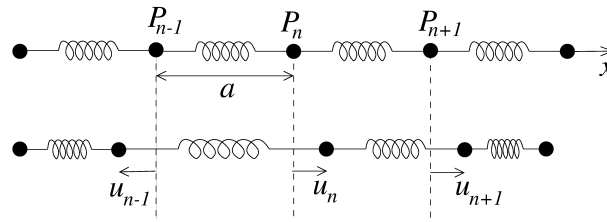
avec $\underline{U}$ et $\underline{I}$ les amplitudes complexes de la tension et du courant.

Du point de vue d'un observateur situé à gauche de l'abscisse x , si on remplace le tronçon de ligne situé à droite d'un plan d'abscisse x terminée par la charge $\underline{Z}_0$ par l'impédance $\underline{Z}(x)$, rien ne change. L'impédance $\underline{Z}(x)$ est l'impédance équivalente de tout ce qui se trouve à droite de x , comme illustré ci-dessous :



Exercices

1.1 Chaîne infinie d'oscillateurs



On considère une chaîne rectiligne infinie de points matériels P_n identiques, de masse m , de position x_n , reliés par des ressorts identiques de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k .

À l'équilibre, les points sont régulièrement espacés : $x_n = na$.

On note $u_n(t)$ le déplacement du point P_n par rapport à sa position d'équilibre.

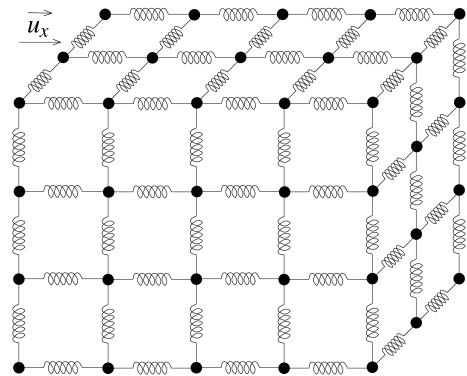
1. Établir une équation reliant les fonctions $u_n(t)$, $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$
2. Approximation continue. On considère le cas où la distance a entre deux points successifs est très petite devant l'échelle caractéristique de variation des u_n . On peut alors modéliser les déplacements de l'ensemble des points par une fonction continue $u(x, t)$. En effectuant des développements limités de $u_{n+1,t} = u(na + a, t)$ et de $u_{n-1,t} = u(na - a, t)$, montrer que $u(x, t)$ vérifie une équation de D'Alembert.

En déduire la vitesse de propagation des ondes dans la chaîne, et le type d'onde qui se propage.

3. Ondes sonores dans un solide.

On considère un solide dans lequel les atomes sont modélisés par des masses ponctuelles, en réseau cubique de paramètre de maille a , reliées par des ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . On définit le module d'Young E par $\sigma = E \varepsilon$ où σ est la contrainte normale (= force surfacique normale $\frac{d\vec{F} \cdot \vec{n}}{dS}$), et ε est l'allongement relatif. On considère une onde plane longitudinale se propageant selon la direction $\vec{e}_x$: le déplacement des atomes ne dépend que de x et est dirigé selon $\vec{e}_x$.

Déterminer la vitesse de propagation de l'onde en fonction du module d'Young et de la masse volumique. Faire l'application numérique pour un acier de masse volumique $\mu = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de module d'Young $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.



1. Appliquons la loi de la quantité de mouvement à la masse n soumise à deux forces de rappel de la part des ressorts de gauche et de droite, dans un référentiel galiléen, projeté selon l'axe (Ox) :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1}) \iff \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{k}{m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (1.65)$$

2. Dans l'approximation continue, à l'ordre 2 : $u_{n+1} = u(na + a, t) \simeq u(na, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(na, t)a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{a^2}{2}$, de même $u_{n-1} = u(na, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(na, t)a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{a^2}{2}$, soit en injectant dans l'équation précédente :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.66)$$

c'est-à-dire une équation de D'Alembert, en posant $c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}$. Il s'agit ici d'une onde longitudinale, car la direction de propagation est la même que celle de la déformation.

3. Le modèle précédent reste sensiblement valable, car on étudie toujours un mouvement unidirectionnel. On peut calculer le nombre de chaînes « infinies » qui relient une section dS du matériau : comme les atomes sont espacés de a , il y en a dS/a^2 . Il s'exerce une force de rappel, sur les atomes finaux du aux atomes précédents :

$$d\vec{F} = \sigma dS = E \frac{u_{n+1} - u_n}{a} dS = \frac{dS}{a^2} k(u_{n+1} - u_n) \quad (1.67)$$

donc en identifiant $k = Ea$, on peut exprimer la célérité en fonction du module d'Young :

$$c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}} = \sqrt{\frac{Ea^3}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\mu}} = 5,16 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \quad (1.68)$$

1. 2 Ondes de compression et onde de torsion

On considère une poutre cylindrique d'axe Ox , de section S , de masse volumique ρ .

1. Quand on tire sur les extrémités de la poutre, celle-ci s'allonge. Pour de faibles déformations, l'allongement est proportionnel à la force et on définit le module d'Young E par $\sigma = E\varepsilon$, où σ est la contrainte (force surfacique) normale et ε l'allongement relatif.

Le déplacement longitudinal du point d'abscisse x à l'instant t est noté $u(x, t)$.

On considère une tranche élémentaire de poutre d'épaisseur dx .

- (a) Exprimer ε en fonction de u .
 - (b) En appliquant la loi de la quantité de mouvement, montrer que le déplacement longitudinal $u(x, t)$ suit une équation de D'Alembert. En déduire la vitesse de propagation c_P des ondes de compression dans cette poutre. On obtient numériquement $c_P = 5,15 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.
2. Cette poutre peut également se déformer en tournant autour de l'axe Ox . On admettra qu'une tranche de longueur infinitésimale dx possède un moment d'inertie $dJ = j dx$ par rapport à Ox et que le couple exercé sur la tranche par la partie gauche de la poutre est $\Gamma(x, t) = -\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t)$ où $\alpha(x, t)$ est l'angle de torsion à l'abscisse x . γ est le coefficient de torsion linéique de la poutre.
 - (a) Établir l'équation de propagation d'une onde de torsion le long de la poutre. En déduire la célérité c_S des ondes de torsion.
 - (b) Application numérique. Pour une poutre à section de rayon R , $j = \frac{1}{2} \pi \rho R^4$ et $\gamma = \frac{1}{2} \pi G R^4$ avec $\rho = 7800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (masse volumique) et $G = 8.10^{10} \text{ Pa}$ (module de cisaillement). Calculer c_S .
 3. On frappe un coup sur une extrémité de la poutre, dans une direction quelconque, excitant à la fois la poutre en pression et en torsion. Quelles ondes arrivent en premier à l'autre extrémité de la poutre ?

1. (a) $\varepsilon = \frac{u(x+dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

(b) On applique la loi de la quantité de mouvement à la tranche dx :

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = +E \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t) - E \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \iff \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.69)$$

Donc $c_P = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$.

2. (a) En appliquant la loi du moment cinétique scalaire à une tranche infinitésimale, par rapport à l'axe (Ox) et à l'aide de la loi des actions réciproques :

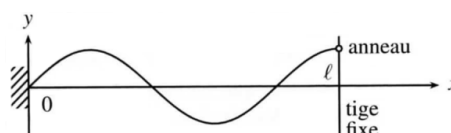
$$j dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \Gamma(x, t) - \Gamma(x+dx, t) = +\gamma \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx \iff \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{j} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (1.70)$$

(b) Donc $c_S = \sqrt{\frac{\gamma}{j}} = \sqrt{\frac{\pi G R^4}{\pi \rho R^4}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3,20 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$

3. Les ondes de compression !

1. 3 Modes propres d'une corde avec une extrémité libre

Une corde est attachée à une de ses extrémités. Sa seconde extrémité est libre de se mouvoir sur un anneau qui coulisse sans frotter sur une tige. Le présence de la tige permet de tendre la corde sous une tension T . L'anneau est de masse quasi nulle.



1. Quelles sont les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = \ell$?
2. Quels sont les modes propres de cette corde ?

1. En $x = 0$, on a la condition aux limites $y(0, t) = 0, \forall t$. En $x = \ell$, on n'a aucune contrainte sur $y(\ell, t)$, par contre on en a une sur la vitesse, comme $\alpha(\ell, t) = 0 = \frac{\partial y}{\partial x}(\ell, t)$, la réaction de la tige sur l'anneau étant horizontale.
2. On cherche une solution sous forme d'onde stationnaire :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad (1.71)$$

Avec $y(0, t) = 0$, on a donc $\cos(\Psi) = 0$, soit $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$. Prenons $\Psi = -\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x = \ell, t) = Ak \cos(\omega t + \varphi) \cos(k\ell) = 0 \quad (1.72)$$

soit $\cos(k\ell) = 0$, ce qui se traduit par $k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi, \omega = \frac{\pi c}{2\ell} + n \frac{\pi c}{\ell}$.

1.4 Réflexion et transmission sur une discontinuité

On considère une corde très longue, composée de deux tronçons, l'un de masse linéique μ_1 , l'autre de masse linéique μ_2 . La tension est T . On néglige la masse du nœud en $x = 0$.

On suppose que du côté $x < 0$ arrive une onde incidente : $y_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$.

1. Montrer qu'en plus de l'onde incidente, il existe une onde réfléchie $y_r(x, t)$ du côté $x < 0$ et une onde transmise $y_t(x, t)$ du côté $x > 0$. Donner leur expression générale à l'aide des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude r et τ .
2. Exprimer deux relations satisfaites par ces ondes en $x = 0$ et en déduire l'expression de r et τ . Entre quelles limites peuvent-ils varier ? Discuter ces cas suivant la valeur du coefficient $\alpha = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$.

1. On a montré dans le cours que l'impédance caractéristique est pour une onde progressive $Z_c = \mu c$. Or la célérité est modifiée sur chaque portion de corde, comme la masse volumique est différente. Cela implique nécessairement qu'il existe une onde réfléchie et transmise. On note alors $y_r(x, t) = rf\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$ et $y_t(x, t) = \tau f\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$.
2. Commençons par écrire la continuité de la position de la corde en $x = 0$:

$$y_i(0, t) + y_r(0, t) = y_t(0, t) \implies f(t) + rf(t) = \tau f(t) \iff \boxed{1 + r = \tau} \quad (1.73)$$

Ensuite on écrit une relation mécanique à la jonction, où la tension du fil à gauche et à droite sont reliées :

$$\vec{0} = \vec{T}_g(0, t) + \vec{T}_d(0, t) \implies T \cos \alpha_g(0, t) = T \cos \alpha_d(0, t) \quad \text{et} \quad T \sin \alpha_g(0, t) = T \sin \alpha_d(0, t) \quad (1.74)$$

donc au premier ordre $\alpha_g(0, t) = \alpha_d(0, t) \iff \frac{\partial y_g}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y_d}{\partial x}(0, t)$. Cela implique :

$$-\frac{1}{v_1} + \frac{r}{v_1} = -\frac{\tau}{v_2} \iff \boxed{1 - r = \frac{v_1}{v_2} \tau} \quad (1.75)$$

On en déduit alors $r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$ et $\tau = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$.

1.5 Résonance sur une corde vibrante en présence de forces volumiques

On étudie les petits mouvements dans la direction Oz d'une corde métallique de longueur L , fixée en ses deux extrémités d'abscisse $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I = I_0 \cos(\omega t)$ et plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \sin(\pi x/L) \vec{e}_y$.

On note F la tension de la corde et μ sa masse linéique.

1. Montrer que le déplacement $z(x, t)$ d'un point de la corde est solution de $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos \omega t$ où c et A sont des constantes à exprimer en fonction des données.
2. En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x, t) = C \sin(\pi x/L) \cos(\omega t)$. Déterminer C pour $\omega \neq \pi c/L$. Que se passe-t-il lorsque ω tend vers $\pi c/L$?

1. Effectuons un bilan des forces sur un élément infinitésimal de corde dx (à l'ordre 1 en $\alpha \simeq \frac{\partial z}{\partial x}$) :

- les forces de tension à gauche et à droite

$$\begin{cases} \vec{F}_g(x, t) = -F(x, t) \cos \alpha(x, t) \vec{e}_x - F(x, t) \sin \alpha(x, t) \vec{e}_z \\ \vec{F}_d(x + dx, t) = F(x) \cos \alpha(x + dx, t) \vec{e}_x + F \sin \alpha(x + dx, t) \vec{e}_z \end{cases} \quad (1.76)$$

$$(1.77)$$

- la force de Laplace à l'ordre 1 en α :

$$\vec{F}_L = Id \vec{r} \wedge B_0 \sin(\pi x/L) \vec{e}_y \simeq IB_0 \sin(\pi x/L) dx \vec{e}_z \quad (1.78)$$

$$\text{car } d\vec{r} = d\ell(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z) = dx\sqrt{1 + \alpha^2}(\vec{e}_x + \alpha \vec{e}_z) = dx\vec{e}_x + dx\alpha \vec{e}_z.$$

Ainsi en appliquant la loi de la quantité de mouvement à cet élément dans un référentiel galiléen :

$$\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{e}_z = -F \cos \alpha(x, t) \vec{e}_x - F \sin \alpha(x, t) \vec{e}_z + F \cos \alpha(x + dx, t) \vec{e}_x + F \sin \alpha(x + dx, t) \vec{e}_z + IB_0 \sin(\pi x/L) dx \vec{e}_z \quad (1.79)$$

soit en projection suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ (toujours le faire, pour bien justifier que F est bien constante) :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F \cos \alpha}{\partial x} dx \implies F(x, t) \cos \alpha(x, t) \simeq F(x, t) = F(t) \end{cases} \quad (1.80)$$

$$\begin{cases} \mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial F \sin \alpha}{\partial x} dx + IB_0 \sin(\pi x/L) dx \implies \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{I_0}{\mu} \cos \omega t \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{cases} \quad (1.81)$$

On aboutit bien à l'équation demandée, en posant $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ et $A = \frac{I_0 B_0}{\mu}$.

2. On injecte la solution proposée dans l'équation différentielle :

$$C \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(-\omega^2 + c^2 \frac{\pi^2}{L^2}\right) = A \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (1.82)$$

d'où $C = \frac{A}{\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 - \omega^2}$ si $\omega \neq \frac{\pi c}{L}$. Lorsque ω tend vers cette valeur, on a un phénomène de résonance, l'amplitude tend vers $+\infty$ (mais en même temps on sort du modèle linéaire + frottements possibles de l'air).

1. 6 Décomposition en mode de vibration

Le problème de la corde vibrante de longueur L fixée en deux points et soumise à une déformation initiale est un problème très général en physique des ondes (cavité électromagnétique, laser, ...). On suppose qu'une corde vibrante vérifie l'équation de d'Alembert. On a montré que les modes propres forment une base de solutions de l'équation de d'Alembert. On cherche dans la suite, pour une corde fixée en ses deux extrémités, une solution de la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \sin(nkx) \quad (1.83)$$

où $\omega = \frac{\pi c}{L}$ et $k = \frac{\pi}{L}$. Étudions le cas d'une corde de guitare pincée de sorte qu'à l'instant initial :

$$y(x, t = 0) = \frac{\beta}{\alpha} x \quad \text{pour } x \in [0; \alpha L] \quad \text{et} \quad y(x, t = 0) = \frac{\beta(L - x)}{1 - \alpha} \quad \text{pour } x \in [\alpha L; L] \quad (1.84)$$

On lâche la corde sans vitesse initiale $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$.

- Déterminer l'expression des coefficients b_n .
- Montrer que les coefficients a_n sont les coefficients de Fourier d'une fonction $2L$ -périodique que l'on représentera graphiquement entre $-L$ et L .
- Le calcul de a_n donne l'expression suivante : $a_n = \frac{2\beta L \sin(\alpha n \pi)}{\alpha(1 - \alpha)n^2 \pi^2}$. Expliciter l'intégrale permettant d'obtenir a_n . Quelle différence de timbre y a-t-il à jouer en pinçant la corde en son milieu plutôt qu'au dessus de la rosace de la guitare ?
- Pour changer la note sur une même corde, disons la seconde corde du La à 110 Hz, un guitariste peut appuyer le doigt sur une case entre deux frettes. En se contentant d'effleurer la corde au quart de sa longueur, il peut également obtenir une nouvelle note correspondant au diapason de référence à 440 Hz. Expliquer pour chaque cas la raison du changement de hauteur de la note.

1. En utilisant la condition initiale de vitesse :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t=0) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n k \sin(nkx) \quad (1.85)$$

donc par unicité du développement en série de Fourier, $b_n = 0, \forall n$.

2. L'autre condition initiale sur la position de la corde conduit à :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nkx) \quad (1.86)$$

Or la fonction $y(x, t=0)$ n'est pas périodique. En répétant le motif de la corde de longueur L , on peut obtenir un signal périodique, mais la fonction est alors paire. Or une telle décomposition en série de Fourier signifie une fonction impaire du fait du sinus. Donc on prolonge la fonction $y(x, t=0)$ de manière impaire sur $[-L; 0]$ (en traçant l'antisymétrique par rapport à l'axe $x=0$), puis on la rend périodique pour pouvoir calculer la transformée de Fourier.

3. NB : pour calculer a_n , on se sert l'intégrale suivante : $a_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L y(x, t=0) \sin(nkx) dx$. Si on pince la corde en son milieu, on prend donc $\alpha = \frac{1}{2}$, donc $a_n = \frac{8\beta L \sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2 \pi^2}$, c'est-à-dire que l'on n'aura que les harmoniques impaires $n = 1, 3, 5, \dots$, alors qu'en jouant au dessus de la rosace de la guitare, on aura également les harmoniques paires (par exemple pour $\alpha = \frac{1}{4}$, le sinus ne s'annulera par exemple que pour $n = 4$, puis $n = 8$, etc).
4. Si on modifie la longueur de la corde, on va modifier les différents modes propres, ce qui explique le changement de hauteur. Tandis que si on effleure la corde au quart de sa longueur, tout en excitant la corde, on impose un nœud de position en ce point : on excite donc un mode qui n'est pas le fondamental à 110 Hz, mais les harmoniques compatibles avec ce nœud, en l'occurrence le mode $n = 4$, $n = 8$, etc. On a donc augmenté d'un facteur 4 la fréquence du son produit.

1.7 Câble court-circuité

On étudie une onde incidente, progressive et harmonique, qui se propage dans un câble coaxial infini, dans le sens des x croissants. En $x = 0$ est branchée une résistance, de même valeur que l'impédance caractéristique Z_c du câble. Cette résistance, qui modifie le milieu de propagation, donne naissance à une onde transmise et une onde réfléchie.

1. On s'intéresse à l'onde de courant dans la partie $x < 0$. Montrer que cette onde « voit » en $x = 0$ une impédance équivalente Z_1 qui s'exprime très simplement en fonction de Z_c .
2. Définir et calculer le coefficient de réflexion en intensité de l'onde en $x = 0$.
3. On place sur le câble précédent un court-circuit en parallèle à l'abscisse $x = \ell$. Quelle est la forme de l'onde de courant entre les abscisses $x = 0$ et $x = \ell$? On calculera explicitement l'expression de l'intensité du courant et on montrera qu'elle représente une onde stationnaire.
4. Montrer qu'il existe une valeur minimale ℓ_0 de ℓ telle que le courant dans la partie $x > 0$ du câble s'annule en $x = 0$. On exprimera ℓ_0 en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde de courant dans le câble.
5. En déduire alors le coefficient de réflexion en courant et la forme de l'onde dans la partie $x < 0$ du câble.

1. Écrivons les relations obtenues en $x = 0$ avec une loi des nœuds et le fait que l'onde transmise est progressive :

$$i(x=0^-, t) = i_z + i(x=0^+, t) \quad , \quad u(x=0^+, t) = Z_c i(x=0^+, t) = Z_c i_z \quad (1.87)$$

par continuité de la tension en $x = 0$. On réinjecte dans la loi des nœuds :

$$i(x=0^-, t) = 2 \frac{u(x=0, t)}{Z_c} \iff Z_1 = \frac{Z_c}{2} \quad (1.88)$$

Attention, en $x = 0^-$, on ne peut pas écrire de relation entre $i(x=0^-)$ et Z_c , car c'est la superposition d'une onde incidente et réfléchie.

2. Par définition $r = \frac{i_r(x, t)}{i_i(x, t)}$ et $t = \frac{i_t(x, t)}{i_i(x, t)}$. On a alors :

$$i(x < 0, t) = i_- = i_i(x, t) + i_r(x, t) \quad \text{et} \quad i(x > 0, t) = i_+ = i_t(x, t) \quad (1.89)$$

La continuité de la tension en $x = 0$ s'écrit :

$$u(0, t) = u_i(0, t) + u_r(0, t) = Z_c (i_i(0, t) - i_r(0, t)) = Z_c i_t(0, t) \iff 1 - r = t \quad (1.90)$$

puis la loi des nœuds :

$$i_i(0, t) + i_r(0, t) = i_t(0, t) + \frac{u(0, t)}{Z_c} \iff 1 + r = t + 1 - r \iff 2r = t \quad (1.91)$$

d'où $r = \frac{1}{3}$.

3. Le court-circuit en $x = \ell$ conduit à une onde réfléchie, d'après le cours. Donc la forme des ondes à chercher entre 0 et ℓ s'écrit, à l'aide d'OPH complexes à :

$$\begin{cases} i(x, t) = I_+ \exp(j(\omega t - kx)) + I_- \exp(j(\omega t + kx)) \\ u(x, t) = Z_c (I_+ \exp(j(\omega t - kx)) - I_- \exp(j(\omega t + kx))) \end{cases} \quad (1.92)$$

$$(1.93)$$

La condition aux limites en $x = \ell$ de nullité de la tension conduit à :

$$I_+ e^{-jk\ell} = I_- e^{+jk\ell} \iff I_- = I_+ e^{-2jk\ell} \quad (1.94)$$

d'où un courant :

$$i(x, t) = I_+ \left(e^{j(\omega t - kx)} + e^{j(\omega t + kx - 2k\ell)} \right) = I_+ e^{j(\omega t - k\ell)} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right) = 2I_+ e^{j(\omega t - k\ell)} \cos(k(x-\ell)) \quad (1.95)$$

soit avec $\arg(I_+) = 0$, en réel $i(x, t) = 2I_+ \cos(\omega t - k\ell) \cos(k(x-\ell))$, correspondant à une onde stationnaire.

4. Si on veut un nœud de courant en $x = 0$, il faut donc $\cos(k\ell) = 0$, soit encore :

$$k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff \ell = \frac{\pi}{2k} + n\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \quad (1.96)$$

en identifiant $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Ainsi $\ell_0 = \frac{\lambda}{4}$. C'est logique car en $x = \ell$ il y a un ventre de courant (nœud de tension), et la distance minimale entre un ventre et un nœud est justement $\lambda/4$.

5. Le courant étant nul en $x = 0^+$, donc pour l'onde incidente, tout se passe comme si la partie $x > 0$ n'existait pas, c'est-à-dire que le circuit est fermé sur une impédance Z_c en $x = 0$. C'est donc la situation du cours, où l'on a vu qu'il n'existait pas d'onde réfléchie, mais uniquement une onde transmise. Ainsi pour $x < 0$, la forme de l'onde est une OPH se propageant vers les x croissants.

1. 8 Étude énergétique d'une ligne bifilaire sans perte

1. Établir une équation de conservation de l'énergie pour la ligne bifilaire sans perte, de la forme

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.97)$$

où ε est une densité linéique d'énergie et où p est une grandeur à définir.

2. On considère une onde progressive selon $\vec{e}_x$ dans la ligne bifilaire d'impédance caractéristique Z_c qui se réfléchit sur une impédance terminale Z_0 . Définir un coefficient de réflexion en puissance et déterminer son expression.

1. Réécrivons les équations caractéristiques au modèle à constantes réparties, à savoir la loi des mailles et la loi des nœuds linéarisées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.98)$$

on multiplie ces équations respectivement par l'intensité en x et le courant en x de sorte à obtenir des grandeurs homogènes à des puissances linéiques :

$$\frac{\partial u}{\partial x} i(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} i(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial i}{\partial x} u(x, t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} u(x, t) \quad (1.99)$$

et on cherche ensuite à faire apparaître $\varepsilon = \frac{1}{2} \Lambda i^2 + \frac{1}{2} \Gamma u^2$, associée à une densité d'énergie linéique stockée dans l'inductance et le condensateur en sommant les deux équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \Gamma u^2(x, t) + \frac{1}{2} \Lambda i^2(x, t) \right) + \frac{\partial u}{\partial x} i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} u(x, t) = 0 \iff \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.100)$$

en posant $p(x, t) = u(x, t)i(x, t)$.

2. Définissons un coefficient de réflexion en puissance :

$$R = \left| \frac{\langle u_r(x, t) i_r(x, t) \rangle}{\langle u_i(x, t) i_i(x, t) \rangle} \right| \quad (1.101)$$

La valeur moyenne n'est pas obligatoire, la valeur absolue n'est là que pour définir un coefficient positif. Or on a montré dans le cours, dans le cadre d'une ligne bifilaire qui est branchée sur une impédance terminale Z_0 que le coefficient de réflexion en amplitude pour l'onde de tension ou de courant s'exprimait :

$$r_u = \frac{u_r(x, t)}{u_i(x, t)} = \frac{Z_0 - Z_c}{Z_0 + Z_c} = -r_i \quad (1.102)$$

D'où finalement :

$$R = -r_u r_i = r_u^2 = \left(\frac{Z_0 - Z_c}{Z_0 + Z_c} \right)^2 \quad (1.103)$$