

Phénomènes de propagation non dispersifs

Sommaire

1.1 Équation de d'Alembert unidimensionnelle	2
1.1.1 Onde transversale sur une corde vibrante	2
1.1.2 Câble coaxial	3
1.2 Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle	5
1.2.1 Ondes progressives	5
1.2.2 Ondes progressives harmoniques	5
1.2.3 Ondes stationnaires	7
1.3 Conséquences des conditions aux limites	8
1.3.1 Corde vibrante	8
1.3.2 Câble coaxial	10

Questions de cours :

- Montrer que les déplacements transversaux d'une corde vibrante vérifient l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. En déduire la vitesse de propagation des ondes.
- Donner la modélisation électrique d'un câble coaxial (en expliquant). En déduire l'équation de d'Alembert associée aux ondes de tension et d'intensité.
- Préciser la solution la plus générale à une équation de d'Alembert 1D. Expliciter deux bases de solutions et le lien entre ces dernières.
- Équation de d'Alembert 1D : résolution en complexes, relation de dispersion, vecteur d'onde, vitesse de phase.
- Déterminer les modes propres d'une corde tendue entre ces deux extrémités. Expliciter succinctement la méthode de résolution connaissant les conditions initiales sur la position transversale et la vitesse de chaque élément de corde.

Capacités exigibles du BO :

- Établir l'équation d'onde en utilisant des systèmes infinitésimaux.
- Définir une onde longitudinale et une onde transversale.
- Identifier une équation de d'Alembert.
- Exprimer la célérité en fonction des paramètres du milieu.
- Définir une onde progressive et une onde stationnaire.
- Établir la relation de dispersion à partir de l'équation de d'Alembert. Utiliser la notation complexe.
- Définir le vecteur d'onde, la vitesse de phase.
- Retrouver la distance égale à $\lambda/2$ entre deux nœuds consécutifs ou entre deux ventres consécutifs.
- Décomposer une onde stationnaire en ondes progressives, une onde progressive en ondes stationnaires.
- Justifier et exploiter des conditions aux limites.
- Définir et décrire les modes propres.
- Construire une solution quelconque par superposition de modes propres.
- Associer mode propre et résonance en régime forcé.
- Décrire le modèle. Établir les équations de propagation.
- Établir l'expression de l'impédance caractéristique d'un câble coaxial.

I. Équation de d'Alembert unidimensionnelle

I.1 Onde transversale sur une corde vibrante

a) Hypothèses du modèle

Intéressons-nous à une corde de longueur L , masse m et masse linéique $\mu = \frac{m}{L}$. Quelques hypothèses sont nécessaires pour effectuer une modélisation simplifiée :



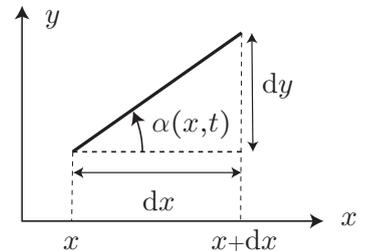
- * La corde est considérée comme quasi-inextensible et souple (c'est-à-dire qu'elle n'oppose aucune résistance à sa déformation) ;
- * elle est tendue entre ses deux extrémités avec une tension $T_0 \gg mg$ de sorte à négliger l'effet de son propre poids ;
- * à l'équilibre, la corde est tendue horizontalement, $y(x, t) = 0$;
- * on étudie les petites déformations transversales de la corde. Ainsi en notant $\alpha(M, t)$ l'angle que fait la tangente à un point M de la corde à l'instant t , on considère que $|\alpha| \ll 1$ de sorte à linéariser l'ensemble des équations.

Les déformations qui vont pouvoir se propager dans la corde sont alors des ondes transversales (perpendiculaires à la direction de propagation) unidimensionnelles (selon la direction (Ox)).

b) Mise en équation

* Considérons donc un élément infinitésimal de corde pris entre le point $M(x, y)$ et $M'(x+dx, y+dy)$. Notons $\alpha(x, t)$ l'angle entre la tangente à la corde en M et l'horizontale. Au premier ordre en α :

$$\tan \alpha \simeq \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \simeq \frac{\partial y}{\partial x} \implies \alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (1.1)$$

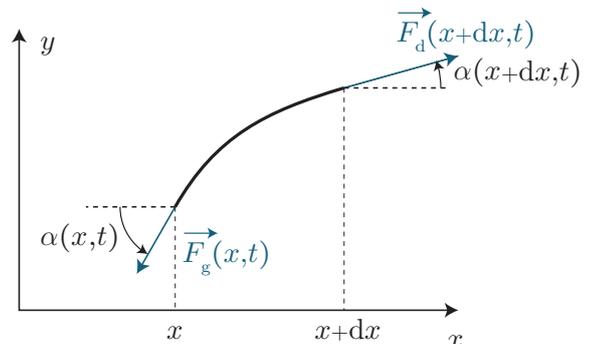


La longueur de cette portion de corde vaut alors :

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \simeq dx \sqrt{1 + \alpha^2} = dx(1 + \mathcal{O}(\alpha^2)) \simeq dx \quad (1.2)$$

Cet élément de corde est soumis à deux forces :

- * la tension exercée par la partie droite du fil sur cet élément de corde $\vec{T}_d(x+dx, t) = \vec{T}(x+dx, t)$;
- * la tension exercée par la partie gauche du fil sur cet élément de corde $\vec{T}_g(x, t)$. Or le principe des actions réciproques conduit à $\vec{T}_g(x, t) = -\vec{T}_d(x, t) = -\vec{T}(x, t)$.



Ainsi en appliquant la loi de la quantité de mouvement à cet élément de corde :

$$\mu dl \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}_d(x+dx, t) + \vec{T}_g(x, t) = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t) \iff \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \quad (1.3)$$

soit en projection sur \vec{e}_x et \vec{e}_y :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial x} (T(x, t) \cos(\alpha(x, t))) & (1.4) \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T(x, t) \sin(\alpha(x, t))) & (1.5) \end{cases}$$

* La première équation donne au premier ordre en α $T(x, t) = f(t) = T_0$ (avec la condition aux limites $T(L, t) = T_0$), donc la tension est de norme constante dans toute la corde. Tandis que l'autre équation devient :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \iff \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Équation de d'Alembert à une dimension

On dit qu'un champ physique $f(x, t)$ vérifie une équation d'onde de d'Alembert si f est régi par l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (1.7)$$

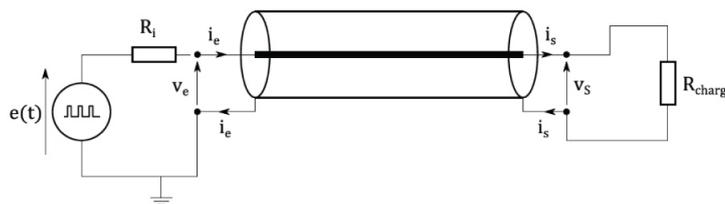
avec c la vitesse de propagation de l'onde associée au champ physique f .

Ainsi la vitesse de propagation de perturbations transversales à une corde est liée à la tension et la masse linéique par $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

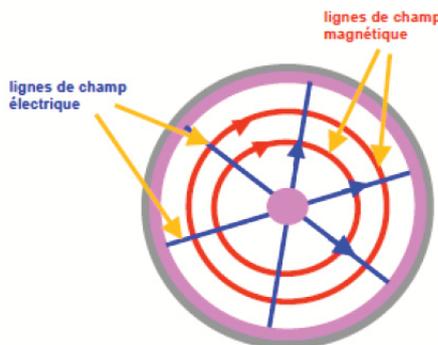
I.2 Câble coaxial

a) Présentation

Les câbles coaxiaux sont très couramment utilisés pour transmettre des signaux électriques, par exemple depuis une antenne satellite vers le décodeur, ou encore en TP. Ils sont constitués d'un conducteur central (appelé l'âme), d'une tresse métallique périphérique en cuivre ou aluminium, le tout séparé par un isolant électrique. En général le conducteur périphérique est porté à la masse.

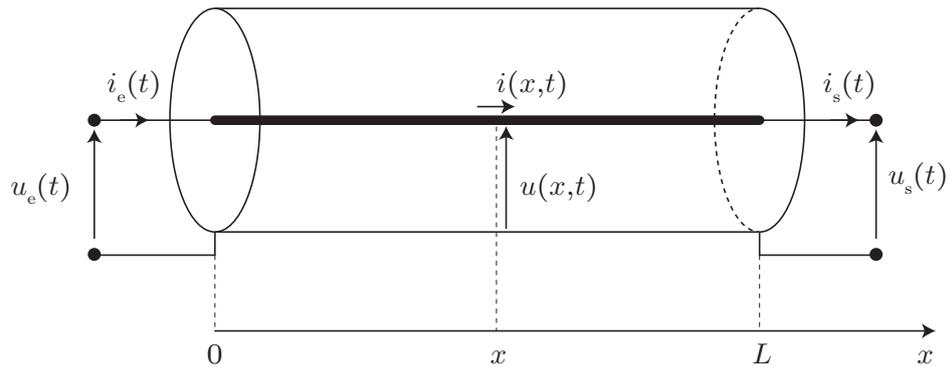


La tension est appliquée entre les deux conducteurs, et le courant circule en sens inverse dans les deux conducteurs (courant quasi surfaciques dans la tresse). On constate qu'outre des phénomènes résistifs, il y a des effets capacitifs et inductifs liés à la structure spatiale du champ électromagnétique créé par cette structure.



Comparativement à ce que l'on a fait d'habitude en électronique, on ne va pas se placer dans les conditions de l'ARQS, car les lignes de transmission avec des câbles coaxiaux peuvent être très longues, de sorte que $L > \lambda = \frac{c}{f}$, c'est-à-dire qu'il faut prendre en compte le temps de propagation. C'est

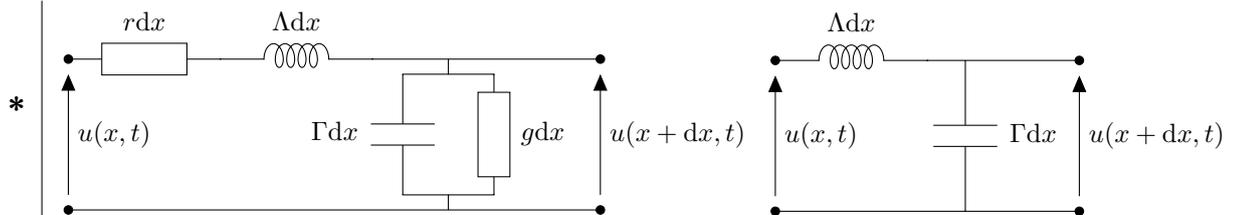
particulièrement le cas à haute fréquence. On note alors $i(x, t)$ et $u(x, t)$ la tension et le courant à une abscisse x du câble :



Un exemple concret d'application de cette théorie, lorsqu'on ne respecte plus l'ARQS, est la propagation d'information dans un câble ethernet : avec des fréquences de l'ordre de 10 MHz, la longueur d'onde est de l'ordre de la dizaine de mètres. Or les réseaux ont souvent des longueurs très grandes devant cette longueur d'onde !

b) Modélisation à constantes réparties

La modélisation du câble coaxial, ne respectant plus l'ARQS, nécessite un découpage en tronçons de longueur élémentaire dx . Pour prendre en compte les effets résistifs, capacitifs et inductifs, la modélisation électrique d'un câble est la suivante :



* où $r dx$ est la résistance en série (le long des conducteurs), Γdx la capacité, Λdx l'inductance, et $g dx$ la conductance latérale de fuite (isolant imparfait). Le programme nous demandant d'étudier un modèle sans pertes, c'est bien la cellule de droite que l'on va étudier : on parle de modèle à **constantes réparties**.

* Ordres de grandeur typiques : $\Gamma = 100 \text{ pF}\cdot\text{m}^{-1}$ et $\Lambda = 0,25 \text{ }\mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$, quasi-constants jusqu'à des fréquences de l'ordre du GHz.

En notant a le rayon de l'âme et b le rayon de la tresse, on peut montrer en effet que $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(b/a)}$ et $\Gamma = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$.

c) Mise en équation

On écrit la loi des mailles que l'on développe au premier ordre en dx :

$$u(x, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + u(x + dx, t) \implies \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \implies \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (1.8)$$

et la loi des nœuds :

$$* \quad i(x, t) = i(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx) \implies \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (1.9)$$

En dérivant la première par rapport à x et la deuxième par rapport à t , on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} t = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \implies \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (1.10)$$

On reconnaît là une équation de d'Alembert, en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} \sim 2 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. On peut de même montrer que i vérifie l'équation $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$.

II. Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

II.1 Ondes progressives

a) Recherche des solutions

Considérons l'équation de d'Alembert à 1D $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$. Euler montra que les fonctions de la forme $s_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ et $s_-(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ sont les uniques formes de solutions de l'équation de d'Alembert. En effet, posons $u = t - x/c$:

$$\frac{\partial s_+}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{1}{c} f'(u) \implies \frac{\partial^2 s_+}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f''(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 s_+}{\partial t^2} = f''(u) \quad (1.11)$$

Donc f est bien solution de l'équation de d'Alembert, et il en est de même pour g . On admet alors que la solution générale de l'équation de d'Alembert à 1D est :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (1.12)$$

ou de manière équivalente $s(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. L'équation de d'Alembert en elle-même n'impose pas la forme des fonctions f et g , c'est la source et les conditions aux limites qui l'impose.

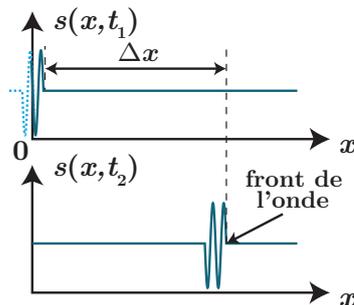
b) Interprétation

Connaissant l'allure de l'onde à l'instant t_1 , qu'en est-il à l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$? Supposons qu'elle s'écrive sous la forme $s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$

$$s(x, t_1 + \Delta t) = f\left(t_1 + \Delta t - \frac{x}{c}\right) \quad (1.13)$$

$$= f\left(t_1 - \frac{(x - c\Delta t)}{c}\right) \quad (1.14)$$

$$= s(x - c\Delta t, t_1) \quad (1.15)$$



c'est-à-dire la même courbe, mais translatée spatialement de $\Delta x = c\Delta t$ vers les x croissants : l'onde s'est propagée sans déformation à la vitesse c . $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ décrit donc une onde progressive dans le sens des x croissants, et de même $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ décrit une onde progressive dans le sens des x décroissants.



On peut en conclure qu'une onde quelconque est somme d'ondes progressive, mais $f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ n'est PAS une onde progressive.

II.2 Ondes progressives harmoniques

a) Définition

Une onde progressive est harmonique (OPH) ou monochromatique si sa fonction d'onde (f ou g) est sinusoïdale :

$$s(x, t) = s_0 \cos\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) \quad (1.16)$$

avec ω la pulsation et φ la phase à l'origine des temps et de l'espace.

b) Intérêt

L'intérêt d'introduire les OPH est que l'on peut faire des calculs plus simples, voire utiliser les notations complexes. Cependant une OPH n'existe pas, car elle serait infiniment étendue dans le temps et l'espace. Mézalor, comment décrire une onde réelle ?

- soit l'onde est périodique, on peut décomposer en série de Fourier (pas beaucoup plus réaliste, sauf si elle est construite à partir d'une onde de taille finie par répétition) :

$$s(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \cos\left(n\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_n\right) \quad (1.17)$$

*

- soit l'onde n'est pas périodique, on généralise alors à l'aide de la transformée de Fourier :

$$s(x, t) = \int_0^{+\infty} s(\omega) \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi(\omega)\right) \quad (1.18)$$

On parle alors de **paquet d'ondes**, notion qui sera développée dans un prochain chapitre.

Base de solution

La solution générale d'une équation de d'Alembert à 1D est une superposition d'une infinité d'OPH se propageant dans les deux sens : les OPH constituent alors une base des solutions.

c) Double périodicité

Soit une OPH décrite par $s(x, t) = s_0 \cos(\omega(t - x/c) + \varphi)$. Elle possède une période spatiale T :

$$\forall(x, t) \quad s(x, t + T) = s(x, t) \iff \cos(\omega t - \omega x/c + \varphi) = \cos(\omega t + \omega T - \omega x/c + \varphi) \quad (1.19)$$

$$\implies \omega T = 2\pi \iff T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.20)$$

mais également une période spatiale λ , la longueur d'onde :

$$\forall(x, t) \quad s(x + \lambda, t) = s(x, t) \iff \cos(\omega t - \omega x/c - \omega \lambda/c + \varphi) = \cos(\omega t - \omega x/c + \varphi) \quad (1.21)$$

$$\implies \frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi \implies \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT \quad (1.22)$$

- * On définit aussi le **vecteur d'onde** $\vec{k} = k\vec{u}$, dont la norme k correspondant à une pulsation spatiale, et \vec{u} est le vecteur unitaire dirigeant la propagation. Par définition $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$. On écrit alors couramment l'OPH sous la forme :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t \mp kx + \varphi) \quad (1.23)$$

d) Relation de dispersion

En passant en notations complexes, $\underline{s}(x, t) = s_0 e^{j(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{s}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ avec $\underline{s}_0 = s_0 e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe. On retrouve alors l'intérêt de l'introduction des notations complexes :

- *
$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = j\omega \underline{s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{s}}{\partial x} = -jk \underline{s} \quad (1.24)$$

dans le cas d'une OPH se propageant dans le sens des x croissants.



Certains sujets pourraient décider de prendre la convention $e^{j(kx - \omega t)}$ sans changer le sens physique. Dans ce cas les relations précédentes sont différentes. Il faut donc conserver tout le long d'un raisonnement les mêmes notations.

En injectant la solution complexe dans l'équation de d'Alembert, on aboutit à :

- *
$$(-jk)^2 \underline{s} = c^2 (j\omega)^2 \underline{s} \implies k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.25)$$

appelée **relation de dispersion** des ondes.

On a alors deux solutions $k = \pm \frac{\omega}{c}$, traduisant les deux directions possibles de la propagation d'une onde progressive le long de la corde ou du câble coaxial, par exemple.

e) Vitesse de phase

On définit la phase totale de l'onde par $\Psi(x, t) = \omega t - kx + \varphi$. À phase totale égale, les vibrations sont égales. On peut chercher à quelle vitesse, appelée **vitesse de phase** v_φ , se propagent les points de phase égale en cherchant la durée nécessaire pour la vibration en $M' (x + dx)$ à l'instant $t + dt$ soit la même qu'en $M (x)$ à l'instant t :

$$* \quad d\Psi = \Psi(x + dx, t + dt) - \Psi(x, t) = 0 \iff \omega dt - k dx = 0 \implies v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (1.26)$$

Dans le cas de la corde vibrante ou du câble coaxial, la vitesse de phase est une constante ne dépendant que des caractéristiques du milieu, mais pas de la fréquence de l'onde : on parle de **milieu non dispersif**. On observe ici que $v_\varphi = c$.

On verra plus tard que ce n'est pas la vitesse de propagation de l'énergie. En particulier, on peut parfois observer que la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière !

II.3 Ondes stationnaires

Une onde est dite stationnaire si sa fonction d'onde au point M découple les variables temporelles et spatiales :

$$s(M, t) = f(M)g(t) \quad (1.27)$$

soit à une dimension $s(x, t) = f(x)g(t)$. Il n'y a alors **pas de propagation**.

a) Résolution par méthode des variables séparées

En injectant la forme d'onde stationnaire dans l'équation de d'Alembert à 1D, on aboutit à :

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2} f(x)g''(t) \implies \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} \quad (1.28)$$

* en des points où le produit $f(x)g(t)$ ne s'annule pas. On a donc l'égalité d'une fonction de x avec une fonction du temps, ces deux quantités sont constantes, on se retrouve alors à résoudre deux équations :

$$\begin{cases} f''(x) - Kf(x) = 0 & (1.29) \\ g''(t) - c^2 K g = 0 & (1.30) \end{cases}$$

Partant de la seconde équation, on peut éliminer de notre étude les cas $K > 0$ et $K = 0$, car ils impliquent que $g \rightarrow +\infty$ ou $g \rightarrow 0$, ce qui ne sera pas le cadre d'étude de phénomènes entretenus sans dissipation d'énergie. Posons alors $K = -k^2$, on a alors deux équations d'oscillateurs harmoniques :

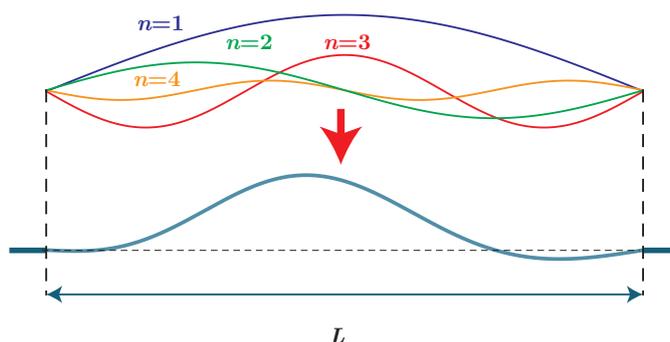
$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 \implies f(x) = A \cos(kx + \varphi) & (1.31) \\ g''(t) + k^2 c^2 g(t) = 0 \implies g(t) = B \cos(\omega t + \Psi) & (1.32) \end{cases}$$

* en posant $\omega = ck$. Ainsi on obtient une autre base de solutions de l'équation de d'Alembert 1D avec des ondes stationnaires harmoniques (OSH) :

$$s(x, t) = s_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \Psi) \quad (1.33)$$

Manipulation

<http://www.falstad.com/loadedstring/>



b) Ventres et nœuds

Par définition :

- les nœuds de l'onde stationnaire sont tels que $s = 0, \forall t$, impliquant

$$\cos(kx + \varphi) = 0 \iff kx + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff x = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad (1.34)$$

c'est-à-dire, en notant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, que deux nœuds plus proches voisins sont distants de $\lambda/2$;

- les ventres de l'onde stationnaires sont les lieux où l'amplitude de s est maximale $\forall t$:

$$\cos(kx + \varphi) = \pm 1 \iff kx + \varphi = n\pi \iff x = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad (1.35)$$

Ainsi deux ventres sont distants de $\lambda/4$, et un ventre et un nœuds plus proches voisins sont distants de $\lambda/4$.

c) Relation entre les ondes stationnaires et les ondes progressives

Ces deux bases de solutions sont en réalité équivalentes. En effet, une onde stationnaire est la somme de deux ondes progressives contra-propageantes :

$$s_0 \cos(\omega t + \Psi) \cos(kx + \varphi) = \frac{s_0}{2} \left(\cos(\omega t - kx + \Psi - \varphi) + \cos(\omega t + kx + \Psi + \varphi) \right) \quad (1.36)$$

À l'inverse, une onde progressive est la somme de deux ondes stationnaires :

$$s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx) + s_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx) \quad (1.37)$$

On peut alors se demander quelle base choisir, au vu de cette équivalence. Le choix se fait souvent en lien avec la situation physique rencontrée, en particulier les conditions aux limites imposées au système.

III. Conséquences des conditions aux limites

III.1 Corde vibrante

a) Régime libre

i) Système étudié

Considérons une corde vérifiant une équation de d'Alembert 1D, fixée en ses deux extrémités. Elle vérifie deux **conditions aux limites** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad y(0, t) = 0 \\ \forall t, \quad y(L, t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.38)$$

$$\quad (1.39)$$

À $t = 0$, on déforme la corde : on impose alors des **conditions initiales** :

$$y(x, 0) = a(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = b(x) \quad (1.40)$$

où a et b sont deux fonctions définies sur $[0; L]$.

ii) Modes propres

On va chercher une solution sous forme d'OSH :

$$y(x, t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad (1.41)$$

Appliquons les conditions aux limites :

$$\forall t, \quad y(0, t) = 0 \iff \forall t, \quad C \cos(\omega t + \varphi) \cos(\Psi) = 0 \iff \Psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (1.42)$$

$$\iff y(x, t) = C' \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx) \quad (1.43)$$

$$\forall t, \quad y(L, t) = 0 \iff \forall t, \quad C' \cos(\omega t + \varphi) \sin(kL) = 0 \implies \sin(kL) = 0 \quad (1.44)$$

$$\implies kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \implies \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N}^*} \quad (1.45)$$

soit avec $\omega = ck$, une valeur de n définit une pulsation associée $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, une fréquence $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$, où $f_1 = \frac{c}{2L}$ est le fondamental. Enfin les longueurs d'onde vérifient $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$.

Ainsi les solutions sont :

Modes propres d'une corde vibrante

Pour une corde de longueur L , célérité c maintenue entre ses deux extrémités, on définit une base particulière de solutions de l'équation de d'Alembert 1D appelés **modes propres** :

$$y_n(t) = C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \quad (1.46)$$

iii) Solution du problème

La solution générale pour une corde tendue entre ses deux extrémités est donc une combinaison linéaire des modes propres ainsi obtenues :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x) \quad (1.47)$$

On détermine alors les constantes $\{C_n, \varphi_n\}$ ou $\{A_n, B_n\}$ avec les conditions initiales

$$y(x, 0) = a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(k_n x) \quad (1.48)$$

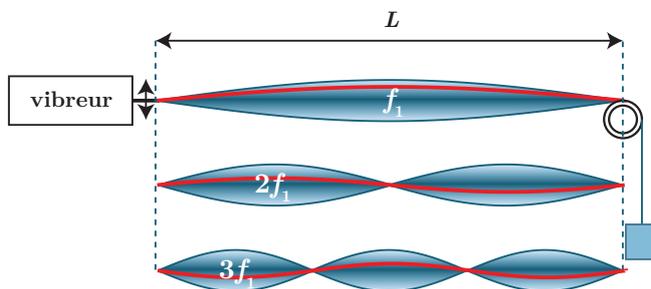
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = b(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) \quad (1.49)$$

c'est-à-dire que les A_n et $B_n \omega_n$ sont les coefficients du développement en série de Fourier de $a(x)$ et $b(x)$.

Plus précisément, les A_n représentent les coefficients du développement en série de Fourier de $a(x)$ prolongée de manière impaire, et $2L$ -périodique sur \mathbb{R} .

b) Régime forcé

Au lieu d'imposer des conditions initiales à la corde, on peut également imposer une condition aux limites périodique : on peut par exemple attacher l'extrémité $x = 0$ à un vibreur imposant une excitation sinusoïdale à la pulsation ω , tout en laissant l'autre extrémité fixe. Ainsi $y(0, t) = a \cos(\omega t)$ et $y(L, t) = 0, \forall t$. C'est l'expérience de la corde de Melde, observée en première année à l'aide d'un stroboscope qui a permis de mettre en évidence, pour certaines fréquences, les modes propres que l'on vient de déterminer :



On cherche également une solution sous forme d'ondes stationnaires :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad \text{avec} \quad \omega = ck \quad (1.50)$$

En $x = 0$:

$$\forall t \quad a \cos(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\Psi) \implies \varphi = 0 \quad \text{et} \quad a = A \cos \Psi \quad (1.51)$$

et en $x = L$:

$$0 = A \cos(\omega t) \cos(kL + \Psi) \implies kL + \Psi = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff \Psi = \frac{\pi}{2} + n\pi - kL \quad (1.52)$$

Ainsi si on remplace dans la forme générale, en notant que $\cos\left(kx + \frac{\pi}{2} + n\pi - kL\right) = (-1)^n \sin(k(L-x))$ et $\cos(\Psi) = (-1)^n \sin(kL)$:

$$y(x, t) = \frac{a}{\cos(\Psi)} \cos(\omega t) \cos(kx + \Psi) = a \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \quad (1.53)$$

On observe alors en particulier que pour $kL = n\pi$, $y \rightarrow +\infty$: il y a résonance de la corde de Melde pour les modes propres définis précédemment. En pratique, à cause des frottements et de la non-linéarité ($\alpha \ll 1$ plus vérifié), l'amplitude ne diverge pas.

III.2 Câble coaxial

a) Impédance caractéristique du câble

On a vu que la tension et l'intensité dans un câble coaxial obéissent à des équations de d'Alembert identiques. Toutefois, on ne peut les résoudre indépendamment l'une de l'autre, car ces deux grandeurs restent couplées par les équations établies à l'aide de la loi des mailles et des nœuds.

On peut se demander quel est le lien entre u et i , partant d'une OPH pour u se propageant dans le sens des x croissants :

$$\underline{u}^+(x, t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)} \quad (1.54)$$

* Le système étant linéaire, on peut chercher une forme similaire pour i , et donc en injectant cette forme dans l'une des deux équations :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \implies -jk\underline{u}^+ = -\Lambda j\omega \underline{i}^+ \implies \frac{\underline{u}^+}{\underline{i}^+} = \frac{\Lambda\omega}{k} = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c \quad (1.55)$$

On introduit l'impédance caractéristique du câble coaxial Z_c représentant le lien entre l'onde de tension et celle de courant. Elle s'exprime bien en ohms. Avec les valeurs typiques qui étaient données, $Z_c = 50 \Omega$. Pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants, $\underline{u}^- = -Z_c \underline{i}^-$.



Comme l'impédance est ici réelle dans ce modèle, les mêmes relations sont vérifiées pour les grandeurs réelles de tension et courant, mais uniquement pour des OPH, ou de manière générale pour des ondes progressives (par décomposition en série de Fourier).

Relation courant-tension dans un câble coaxial

Dans le cadre d'ondes progressives harmoniques se propageant dans un câble coaxial d'impédance caractéristique Z_c , on observe les relations suivantes :

$$u\left(t - \frac{x}{c}\right) = Z_c i\left(t - \frac{x}{c}\right) \implies u_0 \cos(\omega t - kx) = Z_c i_0 \cos(\omega t - kx) \quad (1.56)$$

$$u\left(t + \frac{x}{c}\right) = -Z_c i\left(t + \frac{x}{c}\right) \implies u_0 \cos(\omega t + kx) = -Z_c i_0 \cos(\omega t + kx) \quad (1.57)$$

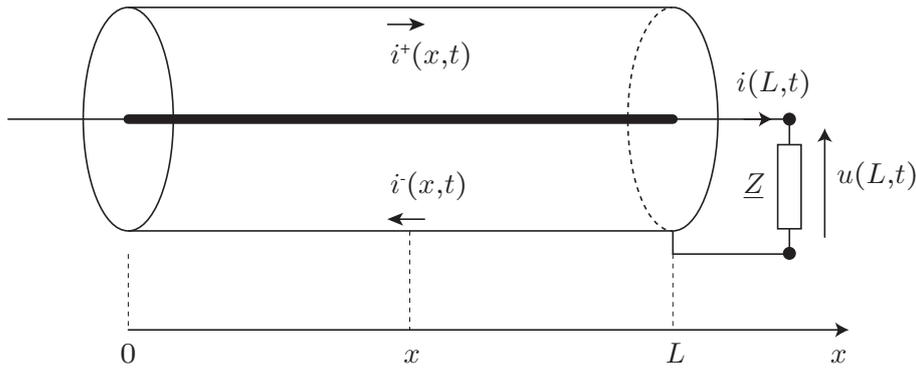
$$(1.58)$$

tandis que pour une onde quelconque de tension, on ne peut a priori pas établir de lien entre u et i .

b) Réflexion en amplitude sur une impédance terminale

i) Calcul du coefficient de réflexion

Considérons la propagation d'une onde de tension à l'intérieur d'un câble coaxial branché sur une impédance terminale, d'impédance \underline{Z} . L'onde est a priori partiellement absorbée par l'impédance terminale, partiellement réfléchi. Comment choisir \underline{Z} afin que toute la puissance de l'onde soit absorbée par le récepteur ?



On ne s'intéresse pas ici aux conditions aux limites en $x = 0$. On note $\underline{u}^+(x, t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)}$ l'onde incidente qui se dirige dans le sens des x croissants. L'impédance à l'extrémité du câble impose la condition aux limites :

$$\underline{u}(L, t) = \underline{Z} \underline{i}(L, t) \quad (1.59)$$

* Dans le cas général, $\underline{Z} \neq Z_c$, donc $\underline{u}^+(L, t) = Z_c \underline{i}^+(L, t)$ est incompatible avec cette condition aux limites, sauf s'il existe une onde réfléchi. Cette dernière se propage dans le sens des x décroissants, et l'on note : $\underline{u}^-(x, t) = \underline{u}_0^- e^{j(\omega t + kx)}$.

L'onde totale s'écrit :

$$\underline{u}(x, t) = \underline{u}^+(x, t) + \underline{u}^-(x, t) \quad \text{et} \quad \underline{i}(x, t) = \underline{i}^+(x, t) + \underline{i}^-(x, t) = \frac{1}{Z_c} (\underline{u}^+(x, t) - \underline{u}^-(x, t)) \quad (1.60)$$

Appelons $r_u = \frac{\underline{u}^-(L, t)}{\underline{u}^+(L, t)}$ le coefficient de réflexion en amplitude de la tension. On a alors

$$\underline{u}(L, t) = \underline{u}^+(L, t)(1 + r_u) \quad \text{et} \quad \underline{i}(L, t) = \underline{u}^+(L, t) \frac{1 - r_u}{Z_c} \quad (1.61)$$

* La condition aux limites donne alors :

$$\underline{u}(L, t) = \underline{Z} \underline{i}(L, t) \iff 1 + r_u = \frac{\underline{Z}}{Z_c} (1 - r_u) \iff r_u = \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c} \quad (1.62)$$

Notons que de la même façon $r_i = \frac{\underline{i}^-(L, t)}{\underline{i}^+(L, t)} = \frac{-\underline{u}^-(L, t)}{\underline{u}^+(L, t)} = -r_u$.

ii) Analyse

Regardons quelques cas particuliers :

- * si $\underline{Z} = Z_c$, il n'y a pas de réflexion : on dit qu'il y a adaptation d'impédance, car l'onde incidente est totalement absorbée par la charge résistive ;
- * si $\underline{Z} = 0$, on est en **court-circuit**, $r_u = -1$, il y a alors réflexion totale avec changement de signe de la tension. Un calcul supplémentaire montre alors qu'on a une onde stationnaire à la fois pour la tension et pour l'intensité, mais elles sont en quadrature spatiale et temporelle (donc aucune puissance n'est transportée en moyenne)
- * si $|\underline{Z}| \rightarrow +\infty$, on est en **circuit ouvert**, $r_u = +1$, il y a également réflexion totale sans changement de signe de la tension. On peut également montrer que les ondes sont aussi en quadrature.

Si on a également une onde transmise, on notera alors u_i , u_r et u_t les ondes de tension incidente, réfléchi et transmise. Alors $r_u = \frac{u_r}{u_i}$ au point considéré.

On peut généraliser la notion d'impédance caractéristique à d'autres types d'ondes et de milieux :

$$Z_c = \left| \frac{\text{cause de l'effet}}{\text{vitesse de l'effet}} \right| \quad (1.63)$$

pour une onde progressive. Par exemple pour une corde, $Z_c = \left| \frac{F_y}{v_y} \right| = \left| \frac{T_0 \alpha}{\frac{\partial y}{\partial t}} \right|$. Pour une OPH,

$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \implies \mu \frac{\partial v_y}{\partial X} = -\frac{1}{c} \frac{\partial F_y}{\partial X}$ en posant $X = t - \frac{x}{c}$. Donc $F_y = -\mu c v_y$ et $Z_c = \mu c = \sqrt{T_0 \mu}$. L'approche réalisée pour le câble coaxial peut alors être étendue aux ondes qui se propagent sur une corde. En particulier le fait d'avoir une corde fixe à une extrémité est source d'une onde réfléchie avec changement de signe : $r_y = \frac{y^-(L, t)}{y^+(L, t)} = -1$.

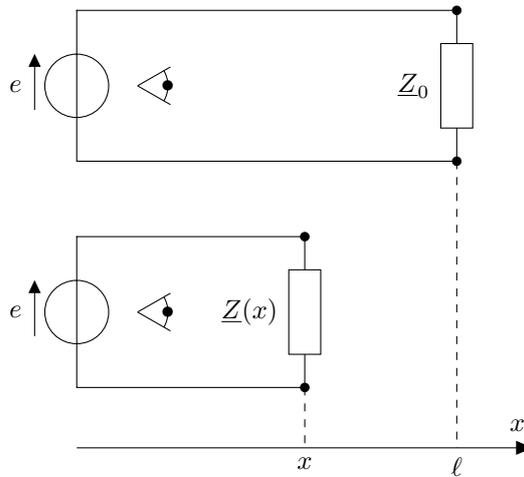
c) Sens physique associé à l'impédance

Un point essentiel à bien comprendre est l'intérêt d'introduire une impédance sur la ligne. En effet, de manière générale il est toujours possible de définir une impédance complexe en régime sinusoïdal forcé par

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} \quad (1.64)$$

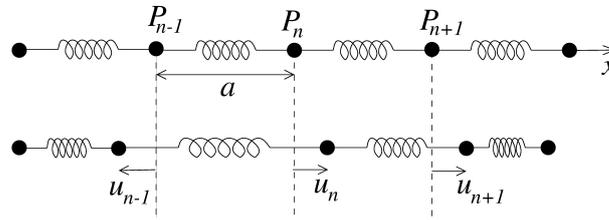
avec \underline{U} et \underline{I} les amplitudes complexes de la tension et du courant.

Du point de vue d'un observateur situé à gauche de l'abscisse x , si on remplace le tronçon de ligne situé à droite d'un plan d'abscisse x terminée par la charge \underline{Z}_0 par l'impédance $\underline{Z}(x)$, rien ne change. L'impédance $\underline{Z}(x)$ est l'impédance équivalente de tout ce qui se trouve à droite de x , comme illustré ci-dessous :



Exercices

1.1 Chaîne infinie d'oscillateurs



On considère une chaîne rectiligne infinie de points matériels P_n identiques, de masse m , de position x_n , reliés par des ressorts identiques de longueur à vire ℓ_0 et de raideur k .

À l'équilibre, les points sont régulièrement espacés : $x_n = na$.

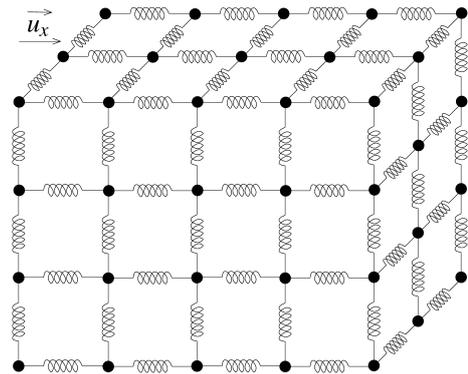
On note $u_n(t)$ le déplacement du point P_n par rapport à sa position d'équilibre.

- Établir une équation reliant les fonctions $u_n(t)$, $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$
- Approximation continue. On considère le cas où la distance a entre deux points successifs est très petite devant l'échelle caractéristique de variation des u_n . On peut alors modéliser les déplacements de l'ensemble des points par une fonction continue $u(x, t)$. En effectuant des développements limités de $u_{n+1,t} = u(na + a, t)$ et de $u_{n-1,t} = u(na - a, t)$, montrer que $u(x, t)$ vérifie une équation de D'Alembert.

En déduire la vitesse de propagation des ondes dans la chaîne, et le type d'onde qui se propage.

- Ondes sonores dans un solide.

On considère un solide dans lequel les atomes sont modélisés par des masses ponctuelles, en réseau cubique de paramètre de maille a , reliées par des ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . On définit le module d'Young E par $\sigma = E \varepsilon$ où σ est la contrainte normale (= force surfacique normale $\frac{d\vec{F} \cdot \vec{n}}{dS}$), et ε est l'allongement relatif. On considère une onde plane longitudinale se propageant selon la direction \vec{e}_x : le déplacement des atomes ne dépend que de x et est dirigé selon \vec{e}_x .



Déterminer la vitesse de propagation de l'onde en fonction du module d'Young et de la masse volumique. Faire l'application numérique pour un acier de masse volumique $\mu = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de module d'Young $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.

- Appliquons la loi de la quantité de mouvement à la masse n soumise à deux forces de rappel de la part des ressorts de gauche et de droite, dans un référentiel galiléen, projeté selon l'axe (Ox) :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1}) \iff \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{k}{m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (1.65)$$

- Dans l'approximation continue, à l'ordre 2 : $u_{n+1} = u(na + a, t) \simeq u(na, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(na, t)a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{a^2}{2}$, de même $u_{n-1} = u(na, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(na, t)a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{a^2}{2}$, soit en injectant dans l'équation précédente :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.66)$$

c'est-à-dire une équation de D'Alembert, en posant $c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}$. Il s'agit ici d'une onde longitudinale, car la direction de propagation est la même que celle de la déformation.

- Le modèle précédent reste sensiblement valable, car on étudie toujours un mouvement unidirectionnel. On peut calculer le nombre de chaînes « infinies » qui relie une section dS du matériau : comme les atomes sont espacés de a , il y en a dS/a^2 . Il s'exerce une force de rappel, sur les atomes finaux du aux atomes précédents :

$$d\vec{F} = \sigma dS = E \frac{u_{n+1} - u_n}{a} dS = \frac{dS}{a^2} k(u_{n+1} - u_n) \quad (1.67)$$

donc en identifiant $k = Ea$, on peut exprimer la célérité en fonction du module d'Young :

$$c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}} = \sqrt{\frac{Ea^3}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\mu}} = 5,16 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \quad (1.68)$$

1. 2 Ondes de compression et onde de torsion

On considère une poutre cylindrique d'axe Ox , de section S , de masse volumique ρ .

1. Quand on tire sur les extrémités de la poutre, celle-ci s'allonge. Pour de faibles déformations, l'allongement est proportionnel à la force et on définit le module d'Young E par $\sigma = E\varepsilon$, où σ est la contrainte (force surfacique) normale et ε l'allongement relatif.

Le déplacement longitudinal du point d'abscisse x à l'instant t est noté $u(x, t)$.

On considère une tranche élémentaire de poutre d'épaisseur dx .

- (a) Exprimer ε en fonction de u .
 - (b) En appliquant la loi de la quantité de mouvement, montrer que le déplacement longitudinal $u(x, t)$ suit une équation de D'Alembert. En déduire la vitesse de propagation c_P des ondes de compression dans cette poutre. On obtient numériquement $c_P = 5,15 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.
2. Cette poutre peut également se déformer en tournant autour de l'axe Ox . On admettra qu'une tranche de longueur infinitésimale dx possède un moment d'inertie $dJ = j dx$ par rapport à Ox et que le couple exercé sur la tranche par la partie gauche de la poutre est $\Gamma(x, t) = -\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t)$ où $\alpha(x, t)$ est l'angle de torsion à l'abscisse x . γ est le coefficient de torsion linéique de la poutre.
 - (a) Établir l'équation de propagation d'une onde de torsion le long de la poutre. En déduire la célérité c_S des ondes de torsion.
 - (b) Application numérique. Pour une poutre à section de rayon R , $j = \frac{1}{2} \pi \rho R^4$ et $\gamma = \frac{1}{2} \pi G R^4$ avec $\rho = 7800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (masse volumique) et $G = 8.10^{10} \text{ Pa}$ (module de cisaillement). Calculer c_S .
 3. On frappe un coup sur une extrémité de la poutre, dans une direction quelconque, excitant à la fois la poutre en pression et en torsion. Quelles ondes arrivent en premier à l'autre extrémité de la poutre ?

1. (a) $\varepsilon = \frac{u(x+dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

(b) On applique la loi de la quantité de mouvement à la tranche dx :

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = +E \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t) - E \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \iff \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.69)$$

Donc $c_P = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$.

2. (a) En appliquant la loi du moment cinétique scalaire à une tranche infinitésimale, par rapport à l'axe (Ox) et à l'aide de la loi des actions réciproques :

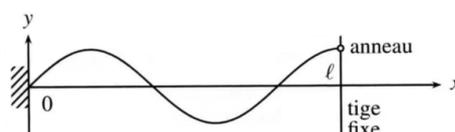
$$j dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \Gamma(x, t) - \Gamma(x+dx, t) = +\gamma \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx \iff \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{j} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (1.70)$$

(b) Donc $c_S = \sqrt{\frac{\gamma}{j}} = \sqrt{\frac{\pi G R^4}{\pi \rho R^4}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3,20 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$

3. Les ondes de compression !

1. 3 Modes propres d'une corde avec une extrémité libre

Une corde est attachée à une de ses extrémités. Sa seconde extrémité est libre de se mouvoir sur un anneau qui coulisse sans frotter sur une tige. Le présence de la tige permet de tendre la corde sous une tension T . L'anneau est de masse quasi nulle.



1. Quelles sont les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = \ell$?
2. Quels sont les modes propres de cette corde ?

1. En $x = 0$, on a la condition aux limites $y(0, t) = 0, \forall t$. En $x = \ell$, on n'a aucune contrainte sur $y(\ell, t)$, par contre on en a une sur la vitesse, comme $\alpha(\ell, t) = 0 = \frac{\partial y}{\partial x}(\ell, t)$, la réaction de la tige sur l'anneau étant horizontale.
2. On cherche une solution sous forme d'onde stationnaire :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad (1.71)$$

Avec $y(0, t) = 0$, on a donc $\cos(\Psi) = 0$, soit $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$. Prenons $\Psi = -\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x = \ell, t) = Ak \cos(\omega t + \varphi) \cos(k\ell) = 0 \quad (1.72)$$

soit $\cos(k\ell) = 0$, ce qui se traduit par $k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi, \omega = \frac{\pi c}{2\ell} + n \frac{\pi c}{\ell}$.

1.4 Réflexion et transmission sur une discontinuité

On considère une corde très longue, composée de deux tronçons, l'un de masse linéique μ_1 , l'autre de masse linéique μ_2 . La tension est T . On néglige la masse du nœud en $x = 0$.

On suppose que du côté $x < 0$ arrive une onde incidente : $y_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$.

1. Montrer qu'en plus de l'onde incidente, il existe une onde réfléchie $y_r(x, t)$ du côté $x < 0$ et une onde transmise $y_t(x, t)$ du côté $x > 0$. Donner leur expression générale à l'aide des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude r et τ .
2. Exprimer deux relations satisfaites par ces ondes en $x = 0$ et en déduire l'expression de r et τ . Entre quelles limites peuvent-ils varier ? Discuter ces cas suivant la valeur du coefficient $\alpha = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$.

1. On a montré dans le cours que l'impédance caractéristique est pour une onde progressive $Z_c = \mu c$. Or la célérité est modifiée sur chaque portion de corde, comme la masse volumique est différente. Cela implique nécessairement qu'il existe une onde réfléchie et transmise. On note alors $y_r(x, t) = rf\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$ et $y_t(x, t) = tf\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$.

2. Commençons par écrire la continuité de la position de la corde en $x = 0$:

$$y_i(0, t) + y_r(0, t) = y_t(0, t) \implies f(t) + rf(t) = tf(t) \iff \boxed{1 + r = t} \quad (1.73)$$

Ensuite on écrit une relation mécanique à la jonction, où la tension du fil à gauche et à droite sont reliées :

$$\vec{0} = \vec{T}_g(0, t) + \vec{T}_d(0, t) \implies T \cos \alpha_g(0, t) = T \cos \alpha_d(0, t) \quad \text{et} \quad T \sin \alpha_g(0, t) = T \sin \alpha_d(0, t) \quad (1.74)$$

donc au premier ordre $\alpha_g(0, t) = \alpha_d(0, t) \iff \frac{\partial y_g}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y_d}{\partial x}(0, t)$. Cela implique :

$$-\frac{1}{v_1} + \frac{r}{v_1} = -\frac{t}{v_2} \iff \boxed{1 - r = \frac{v_1}{v_2} t} \quad (1.75)$$

On en déduit alors $r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$ et $t = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$.

1.5 Résonance sur une corde vibrante en présence de forces volumiques

On étudie les petits mouvements dans la direction Oz d'une corde métallique de longueur L , fixée en ses deux extrémités d'abscisse $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I = I_0 \cos(\omega t)$ et plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \sin(\pi x/L) \vec{e}_y$.

On note F la tension de la corde et μ sa masse linéique.

1. Montrer que le déplacement $z(x, t)$ d'un point de la corde est solution de $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos \omega t$ où c et A sont des constantes à exprimer en fonction des données.
2. En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x, t) = C \sin(\pi x/L) \cos(\omega t)$. Déterminer C pour $\omega \neq \pi c/L$. Que se passe-t-il lorsque ω tend vers $\pi c/L$?

1. Effectuons un bilan des forces sur un élément infinitésimal de corde $dl \sin \alpha dx$ (à l'ordre 1 en $\alpha \simeq \frac{\partial z}{\partial x}$) :

- les forces de tension à gauche et à droite

$$\begin{cases} \vec{F}_g(x, t) = -F(x, t) \cos \alpha(x, t) \vec{e}_x - F(x, t) \sin \alpha(x, t) \vec{e}_z \\ \vec{F}_d(x + dx, t) = F(x) \cos \alpha(x + dx, t) \vec{e}_x + F \sin \alpha(x + dx, t) \vec{e}_z \end{cases} \quad (1.76)$$

$$\vec{F}_d(x + dx, t) = F(x) \cos \alpha(x + dx, t) \vec{e}_x + F \sin \alpha(x + dx, t) \vec{e}_z \quad (1.77)$$

- la force de Laplace à l'ordre 1 en α :

$$\vec{F}_L = Id \vec{r} \wedge B_0 \sin(\pi x/L) \vec{e}_y \simeq IB_0 \sin(\pi x/L) dx \vec{e}_z \quad (1.78)$$

$$\text{car } d\vec{r} = dl(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) = dx \sqrt{1 + \alpha^2} (\vec{e}_x + \alpha \vec{e}_y) = dx \vec{e}_x + dx \alpha \vec{e}_y.$$

Ainsi en appliquant la loi de la quantité de mouvement à cet élément dans un référentiel galiléen :

$$\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{e}_z = -F \cos \alpha(x, t) \vec{e}_x - F \sin \alpha(x, t) \vec{e}_z + F \cos \alpha(x + dx, t) \vec{e}_x + F \sin \alpha(x + dx, t) \vec{e}_z + IB_0 \sin(\pi x/L) dx \vec{e}_z \quad (1.79)$$

soit en projection suivant \vec{e}_x et \vec{e}_z (toujours le faire, pour bien justifier que F est bien constante) :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F \cos \alpha}{\partial x} dx \implies F(x, t) \cos \alpha(x, t) \simeq F(x, t) = F(t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial F \sin \alpha}{\partial x} dx + IB_0 \sin(\pi x/L) dx \implies \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{I_0}{\mu} \cos \omega t \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{cases} \quad (1.80)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial F \sin \alpha}{\partial x} dx + IB_0 \sin(\pi x/L) dx \implies \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{I_0}{\mu} \cos \omega t \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (1.81)$$

On aboutit bien à l'équation demandée, en posant $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ et $A = \frac{I_0 B_0}{\mu}$.

2. On injecte la solution proposée dans l'équation différentielle :

$$C \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(-\omega^2 + c^2 \frac{\pi^2}{L^2}\right) = A \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (1.82)$$

d'où $C = \frac{A}{\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 - \omega^2}$ si $\omega \neq \frac{\pi c}{L}$. Lorsque ω tend vers cette valeur, on a un phénomène de résonance, l'amplitude tend vers $+\infty$ (mais en même temps on sort du modèle linéaire + frottements possibles de l'air).

1. 6 Décomposition en mode de vibration

Le problème de la corde vibrante de longueur L fixée en deux points et soumise à une déformation initiale est un problème très général en physique des ondes (cavité électromagnétique, laser, ...). On suppose qu'une corde vibrante vérifie l'équation de d'Alembert. On a montré que les modes propres forment une base de solutions de l'équation de d'Alembert. On cherche dans la suite, pour une corde fixée en ses deux extrémités, une solution de la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \sin(nkx) \quad (1.83)$$

où $\omega = \frac{\pi c}{L}$ et $k = \frac{\pi}{L}$. Étudions le cas d'une corde de guitare pincée de sorte qu'à l'instant initial :

$$y(x, t = 0) = \frac{\beta}{\alpha} x \quad \text{pour } x \in [0; \alpha L] \quad \text{et} \quad y(x, t = 0) = \frac{\beta(L - x)}{1 - \alpha} \quad \text{pour } x \in [\alpha L; L] \quad (1.84)$$

On lâche la corde sans vitesse initiale $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$.

- Déterminer l'expression des coefficients b_n .
- Montrer que les coefficients a_n sont les coefficients de Fourier d'une fonction $2L$ -périodique que l'on représentera graphiquement entre $-L$ et L .
- Le calcul de a_n donne l'expression suivante : $a_n = \frac{2\beta L \sin(\alpha n \pi)}{\alpha(1 - \alpha)n^2 \pi^2}$. Expliciter l'intégrale permettant d'obtenir a_n .
Quelle différence de timbre y a-t-il à jouer en pinçant la corde en son milieu plutôt qu'au dessus de la rosace de la guitare ?
- Pour changer la note sur une même corde, disons la seconde corde du La à 110 Hz, un guitariste peut appuyer le doigt sur une case entre deux frettes. En se contentant d'effleurer la corde au quart de sa longueur, il peut également obtenir une nouvelle note correspondant au diapason de référence à 440 Hz. Expliquer pour chaque cas la raison du changement de hauteur de la note.

1. En utilisant la condition initiale de vitesse :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n k \sin(nkx) \quad (1.85)$$

donc par unicité du développement en série de Fourier, $b_n = 0, \forall n$.

2. L'autre condition initiale sur la position de la corde conduit à :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nkx) \quad (1.86)$$

Or la fonction $y(x, t = 0)$ n'est pas périodique. En répétant le motif de la corde de longueur L , on peut obtenir un signal périodique, mais la fonction est alors paire. Or une telle décomposition en série de Fourier signifie une fonction impaire du fait du sinus. Donc on prolonge la fonction $y(x, t = 0)$ de manière impaire sur $[-L; 0]$ (en traçant l'antisymétrie par rapport à l'axe $x = 0$), puis on la rend périodique pour pouvoir calculer la transformée de Fourier.

3. NB : pour calculer a_n , on se sert l'intégrale suivante : $a_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L y(x, t = 0) \sin(nkx) dx$. Si on pince la corde en son milieu, on prend donc $\alpha = \frac{1}{2}$, donc $a_n = \frac{8\beta L \sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2 \pi^2}$, c'est-à-dire que l'on n'aura que les harmoniques impaires $n = 1, 3, 5, \dots$, alors qu'en jouant au dessus de la rosace de la guitare, on aura également les harmoniques paires (par exemple pour $\alpha = \frac{1}{4}$, le sinus ne s'annulera par exemple que pour $n = 4$, puis $n = 8$, etc).
4. Si on modifie la longueur de la corde, on va modifier les différents modes propres, ce qui explique le changement de hauteur. Tandis que si on effleure la corde au quart de sa longueur, tout en excitant la corde, on impose un nœud de position en ce point : on excite donc un mode qui n'est pas le fondamental à 110 Hz, mais les harmoniques compatibles avec ce nœud, en l'occurrence le mode $n = 4$, $n = 8$, etc. On a donc augmenté d'un facteur 4 la fréquence du son produit.

1.7 Câble court-circuité

On étudie une onde incidente, progressive et harmonique, qui se propage dans un câble coaxial infini, dans le sens des x croissants. En $x = 0$ est branchée une résistance, de même valeur que l'impédance caractéristique Z_c du câble. Cette résistance, qui modifie le milieu de propagation, donne naissance à une onde transmise et une onde réfléchie.

- On s'intéresse à l'onde de courant dans la partie $x < 0$. Montrer que cette onde « voit » en $x = 0$ une impédance équivalente Z_1 qui s'exprime très simplement en fonction de Z_c .
- Définir et calculer le coefficient de réflexion en intensité de l'onde en $x = 0$.
- On place sur le câble précédent un court-circuit en parallèle à l'abscisse $x = \ell$. Quelle est la forme de l'onde de courant entre les abscisses $x = 0$ et $x = \ell$? On calculera explicitement l'expression de l'intensité du courant et on montrera qu'elle représente une onde stationnaire.
- Montrer qu'il existe une valeur minimale ℓ_0 de ℓ telle que le courant dans la partie $x > 0$ du câble s'annule en $x = 0$. On exprimera ℓ_0 en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde de courant dans le câble.
- En déduire alors le coefficient de réflexion en courant et la forme de l'onde dans la partie $x < 0$ du câble.

1. Écrivons les relations obtenues en $x = 0$ avec une loi des nœuds et le fait que l'onde transmise est progressive :

$$i(x = 0^-, t) = i_z + i(x = 0^+, t) \quad , \quad u(x = 0^+, t) = Z_c i(x = 0^+, t) = Z_c i_z \quad (1.87)$$

par continuité de la tension en $x = 0$. On réinjecte dans la loi des nœuds :

$$i(x = 0^-, t) = 2 \frac{u(x = 0, t)}{Z_c} \iff Z_1 = \frac{Z_c}{2} \quad (1.88)$$

Attention, en $x = 0^-$, on ne peut pas écrire de relation entre $i(x = 0^-)$ et Z_c , car c'est la superposition d'une onde incidente et réfléchie.

2. Par définition $r = \frac{i_r(x, t)}{i_i(x, t)}$ et $t = \frac{i_t(x, t)}{i_i(x, t)}$. On a alors :

$$i(x < 0, t) = i_- = i_i(x, t) + i_r(x, t) \quad \text{et} \quad i(x > 0, t) = i_+ = i_t(x, t) \quad (1.89)$$

La continuité de la tension en $x = 0$ s'écrit :

$$u(0, t) = u_i(0, t) + u_r(0, t) = Z_c (i_i(0, t) - i_r(0, t)) = Z_c i_t(0, t) \iff 1 - r = t \quad (1.90)$$

puis la loi des nœuds :

$$i_i(0, t) + i_r(0, t) = i_t(0, t) + \frac{u(0, t)}{Z_c} \iff 1 + r = t + 1 - r \iff 2r = t \quad (1.91)$$

d'où $r = \frac{1}{3}$.

3. Le court-circuit en $x = \ell$ conduit à une onde réfléchi, d'après le cours. Donc la forme des ondes à chercher entre 0 et ℓ s'écrit, à l'aide d'OPH complexes à :

$$\begin{cases} i(x, t) = I_+ \exp(j(\omega t - kx)) + I_- \exp(j(\omega t + kx)) \\ u(x, t) = Z_c (I_+ \exp(j(\omega t - kx)) - I_- \exp(j(\omega t + kx))) \end{cases} \quad (1.92)$$

$$\quad (1.93)$$

La condition aux limites en $x = \ell$ de nullité de la tension conduit à :

$$I_+ e^{-jk\ell} = I_- e^{+jk\ell} \iff I_- = I_+ e^{-2jk\ell} \quad (1.94)$$

d'où un courant :

$$i(x, t) = I_+ \left(e^{j(\omega t - kx)} + e^{j(\omega t + kx - 2k\ell)} \right) = I_+ e^{j(\omega t - k\ell)} \left(e^{-jk(x-\ell)} + e^{jk(x-\ell)} \right) = 2I_+ e^{j(\omega t - k\ell)} \cos(k(x-\ell)) \quad (1.95)$$

soit avec $\arg(I_+) = 0$, en réel $i(x, t) = 2I_+ \cos(\omega t - k\ell) \cos(k(x-\ell))$, correspondant à une onde stationnaire.

4. Si on veut un nœud de courant en $x = 0$, il faut donc $\cos(k\ell) = 0$, soit encore :

$$k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff \ell = \frac{\pi}{2k} + n\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \quad (1.96)$$

en identifiant $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Ainsi $\ell_0 = \frac{\lambda}{4}$. C'est logique car en $x = \ell$ il y a un ventre de courant (nœud de tension), et la distance minimale entre un ventre et un nœud est justement $\lambda/4$.

5. Le courant étant nul en $x = 0^+$, donc pour l'onde incidente, tout se passe comme si la partie $x > 0$ n'existait pas, c'est-à-dire que le circuit est fermé sur une impédance Z_c en $x = 0$. C'est donc la situation du cours, où l'on a vu qu'il n'existait pas d'onde réfléchi, mais uniquement une onde transmise. Ainsi pour $x < 0$, la forme de l'onde est une OPH se propageant vers les x croissants.

1. 8 Étude énergétique d'une ligne bifilaire sans perte

1. Établir une équation de conservation de l'énergie pour la ligne bifilaire sans perte, de la forme

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.97)$$

où ε est une densité linéique d'énergie et où p est une grandeur à définir.

2. On considère une onde progressive selon \vec{e}_x dans la ligne bifilaire d'impédance caractéristique Z_c qui se réfléchit sur une impédance terminale Z_0 . Définir un coefficient de réflexion en puissance et déterminer son expression.

1. Réécrivons les équations caractéristiques au modèle à constantes réparties, à savoir la loi des mailles et la loi des nœuds linéarisées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.98)$$

on multiplie ces équations respectivement par l'intensité en x et le courant en x de sorte à obtenir des grandeurs homogènes à des puissances linéiques :

$$\frac{\partial u}{\partial x} i(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} i(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial i}{\partial x} u(x, t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} u(x, t) \quad (1.99)$$

et on cherche ensuite à faire apparaître $\varepsilon = \frac{1}{2}\Lambda i^2 + \frac{1}{2}\Gamma u^2$, associée à une densité d'énergie linéique stockée dans l'inductance et le condensateur en sommant les deux équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\Gamma u^2(x, t) + \frac{1}{2}\Lambda i^2 \right) + \frac{\partial u}{\partial x} i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} u(x, t) = 0 \iff \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.100)$$

en posant $p(x, t) = u(x, t)i(x, t)$.

2. Définissons un coefficient de réflexion en puissance :

$$R = \left| \frac{\langle u_r(x, t) i_r(x, t) \rangle}{\langle u_i(x, t) i_i(x, t) \rangle} \right| \quad (1.101)$$

La valeur moyenne n'est pas obligatoire, la valeur absolue n'est là que pour définir un coefficient positif. Or on a montré dans le cours, dans le cadre d'une ligne bifilaire qui est branchée sur une impédance terminale Z_0 que le coefficient de réflexion en amplitude pour l'onde de tension ou de courant s'exprimait :

$$r_u = \frac{u_r(x,t)}{u_i(x,t)} = \frac{Z_0 - Z_c}{Z_0 + Z_c} = -r_i \quad (1.102)$$

D'où finalement :

$$R = -r_u r_i = r_u^2 = \left(\frac{Z_0 - Z_c}{Z_0 + Z_c} \right)^2 \quad (1.103)$$

Ondes sonores dans les fluides

Sommaire

2.1	Modélisation de la propagation des ondes sonores	3
2.1.1	Présentation	3
2.1.2	Approximation acoustique	3
2.1.3	Équations linéarisées	3
2.1.4	Équation de propagation	4
2.1.5	Célérité des ondes acoustiques	5
2.2	Étude énergétique	5
2.2.1	Bilan énergétique	5
2.2.2	Intensité acoustique et niveau sonore	6
2.3	Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)	7
2.3.1	Définition	7
2.3.2	Relation de dispersion	8
2.3.3	Caractère longitudinal de l'OPPH sonore	8
2.3.4	Impédance acoustique	8
2.3.5	Aspects énergétiques d'une OPPH	9
2.3.6	Justification de l'approximation acoustique	9
2.4	Réflexion et transmission des ondes sonores sur une interface plane	10
2.4.1	Modélisation et conditions aux limites	10
2.4.2	Conséquence sur les amplitudes	11
2.4.3	Conséquences énergétiques	11
2.5	Ondes sphériques	12
2.5.1	Ondes sphériques progressives	12
2.5.2	Cas d'un onde sphérique progressive harmonique	12
2.5.3	Onde plane / sphérique et diffraction	13

Questions de cours :

- Présenter l'approximation acoustique et établir dans ce modèle les équations linéarisées.
- À partir des équations linéarisées, établir les équations de d'Alembert unidimensionnelles pour la vitesse et la pression. Établir l'expression de la célérité des ondes acoustiques dans l'air en fonction de la température.
- Après avoir défini le vecteur de Poynting acoustique, démontrer l'équation de conservation de l'énergie.
- Présenter l'onde plane progressive harmonique. Justifier le caractère longitudinal de l'OPPH, et démontrer l'expression de l'impédance acoustique.
- Déterminer le coefficient de réflexion en amplitude pour la vitesse et la pression dans le cas d'une interface entre deux milieux non miscibles d'impédances Z_1 et Z_2 .
- Onde sphérique : présentation, expression générale et cas de l'onde sphérique progressive harmonique. Lien avec les ondes planes progressives harmoniques.

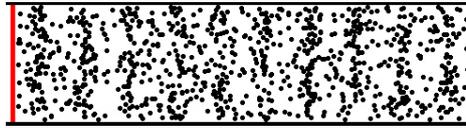
Capacités exigibles du BO :

- Classer les ondes sonores par domaines fréquentiels.
- Justifier les hypothèses de l'approximation acoustique par des ordres de grandeur. Montrer que l'accélération de la particule de fluide s'écrit $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ lorsque $v \ll c$.
- Écrire les trois équations locales linéarisées.
- Déterminer l'équation de propagation de la surpression dans une situation unidirectionnelle en coordonnées cartésiennes.
- Utiliser sa généralisation admise à trois dimensions avec l'opérateur laplacien.
- Exprimer la célérité en fonction de la température pour un gaz parfait.
- Citer les ordres de grandeur de la célérité pour l'air et pour l'eau.
- Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde.
- Définir l'intensité acoustique en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ et le niveau sonore en décibels. Citer quelques ordres de grandeur (minimum d'audition, seuil de douleur, conversation).
- En relation avec la diffraction, discuter la validité du modèle de l'onde plane en comparant la dimension latérale à la longueur d'onde.
- Décrire le caractère longitudinal de l'onde sonore.
- Établir et utiliser l'impédance acoustique.
- Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.
- Commenter l'expression de la surpression $p(r, t) \propto \frac{1}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$ générée par une sphère pulsante.
- Expliciter des conditions aux limites à une interface.
- Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en amplitude de surpression, en amplitude de vitesse ou en puissance.
- Relier l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.

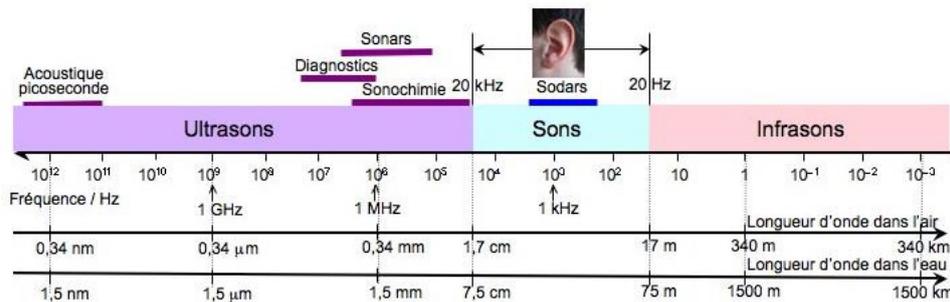
I. Modélisation de la propagation des ondes sonores

I.1 Présentation

Le son est une onde mécanique qui se propage à travers un milieu matériel. Cette onde est transmise par changement de pression du milieu : lorsqu'un son est émis, le milieu proche est comprimé, puis comprime à son tour le fluide un peu plus loin, et ainsi de suite, dans la direction de propagation de l'onde : il s'agit d'ondes **longitudinales**.



Le domaine de fréquence reste assez vaste, allant des infrasons (inaudibles pour l'Homme, $f < 20$ Hz) aux ultrasons ($f > 20$ kHz) jusqu'aux ondes émises par certains cristaux piézoélectriques ($f \sim 10$ MHz pour les sondes échographiques).



I.2 Approximation acoustique

On souhaite modéliser la propagation des ondes sonores dans les milieux. On fait l'hypothèse que l'écoulement est instationnaire mais périodique de période T , faiblement compressible et parfait.

* En effet, les processus dissipatifs sont négligés (diffusion de la quantité de mouvement ou de la chaleur) : l'écoulement est donc adiabatique. Les effets de la pesanteur seront négligés. D'un point de vue thermodynamique, on considère donc des transformations isentropiques.

Les champs physiques associés aux ondes sonores sont la **pression** $P(M, t)$, la **vitesse** (eulérienne) des particules du milieu $\vec{v}(M, t)$ et leur **masse volumique** $\mu(M, t)$. Il nous faut donc 5 équations pour pouvoir connaître l'ensemble de ces champs. Les équations de la mécanique des fluides vont coupler de manière non linéaire ces différents champs : on va donc **linéariser** à l'ordre le plus bas. Les éléments qui suivent constituent alors **l'approximation acoustique** :

- au repos, en l'absence d'ondes sonores, le fluide est décrit par :

$$P(M, t) = P_0 \quad , \quad \mu(M, t) = \mu_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(M, t) = \vec{0} \quad (2.1)$$

- lors du passage d'une onde, on décrit l'onde sonore par des termes infiniment petits d'ordre 1 (ce qui devra être vérifié *a posteriori*), indicés par 1 :

$$* \quad P(M, t) = P_0 + P_1(M, t) \quad , \quad \mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t) \quad \text{et} \quad \vec{v}(M, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M, t) \quad (2.2)$$

où $|P_1| \ll P_0$ et $|\mu_1| \ll \mu_0$. Quant à \vec{v}_1 , on peut la comparer à la vitesse caractéristique, c'est-à-dire la célérité c des ondes sonores : $\|\vec{v}_1\| \ll c$.

De plus, en notant a l'amplitude caractéristique de la vibration des particules de fluide, de l'ordre de $v_1 T$ est alors très inférieure à cT , c'est-à-dire la longueur d'onde : on a donc $a \ll \lambda$.

On appelle $P_1(M, t) = P(M, t) - P_0$ la **surpression**. Elle est parfois notée en minuscule $p(M, t)$.

I.3 Équations linéarisées

a) Équation du mouvement d'une particule de fluide

Appliquons la loi de la quantité de mouvement à une particule de fluide P de volume $d\tau$ située en M à l'instant t , dans un référentiel galiléen. Elle n'est soumise qu'aux forces de pression (on néglige la pesanteur et les forces de viscosité) :

$$\mu d\tau \vec{a}_P(t) = -\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau \quad (2.3)$$

L'accélération d'une particule de fluide doit se calculer avec précaution, car si à t la particule de fluide se trouve en M , à $t + dt$ elle se trouve en M' :

$$\vec{a}_P(t) = \frac{\vec{v}(M', t + dt) - \vec{v}(M, t)}{dt} \quad (2.4)$$

$$= \frac{\vec{v}(M, t + dt) - \vec{v}(M, t)}{dt} + \frac{\vec{v}(M', t + dt) - \vec{v}(M, t + dt)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{a}_{\text{conv}} \quad (2.5)$$

* où le premier terme correspond à l'accélération dite locale, et le deuxième à l'**accélération convective**. On peut montrer que $\vec{a}_{\text{conv}} = (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$. En particulier, pour un déplacement unidimensionnel :

$$\vec{v}(M', t + dt) - \vec{v}(M, t + dt) = (v(x + dx, t + dt) - v(x, t)) \vec{e}_x \simeq \frac{\partial v}{\partial x} dx = \frac{\partial v}{\partial x} v(x, t) dt \quad (2.6)$$

donc $\vec{a}_{\text{conv}} = v \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_x$.

Remplaçons donc dans la LQM et ne gardons que les termes d'ordre 1 :

$$* \quad (\mu_0 + \mu_1) \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1 \right) = -\text{grad} (P_0 + P_1) \implies \boxed{\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad} (P_1)} \quad (2.7)$$

car les termes $\mu \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$ sont d'ordre 2 en infiniment petits, tout comme $(\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1$.

b) Équation de conservation de la masse

Exprimons et linéarisons l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \iff \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \text{div}(\mu_0 \vec{v}_1 + \mu_1 \vec{v}_1) = 0 \implies \boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}) = 0} \quad (2.8)$$

c) Équation thermodynamique

Nous avons pour l'instant 4 équations pour 5 inconnues, il nous faut donc une équation supplémentaire, liée à l'évolution thermodynamique de l'écoulement. En effet, on a fait l'hypothèse d'un écoulement adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique. On va alors se servir d'un **coefficient thermoélastique**, à savoir le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, noté χ_s et défini par :

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s \quad (2.9)$$

liant l'évolution de la masse volumique à celle de la pression. Ce coefficient, quasiment constant, est positif, homogène à une pression, et petit. Typiquement $\chi_s(\text{eau}) \simeq 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ et $\chi_s(\text{air}) \simeq 7 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$. On peut donc à nouveau linéariser, en approximant la dérivée à un quotient :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{\mu - \mu_0}{P - P_0} = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{\mu_1}{P_1} \simeq \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \iff \boxed{\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1} \quad (2.10)$$

1.4 Équation de propagation

On va établir l'équation de propagation associée à la surpression et la vitesse dans le cas général (à 3D), mais la démarche est identique à 1D (seule démonstration exigible au programme). Partant de la LQM, appliquons la divergence :

$$* \quad \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div}(\vec{v})) = -\text{div}(\text{grad} P_1) = -\Delta P_1 \iff -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) = -\Delta P_1 \quad (2.11)$$

en injectant l'équation de conservation de la masse. En utilisant enfin l'équation d'évolution isentropique :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \Delta P_1} \quad (2.12)$$

La surpression vérifie donc une équation de d'Alembert à 3D (généralisation de celle vue au chapitre précédent), en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$ la célérité.

Le même travail peut être effectué pour la vitesse, mais à 1D :

Exercice

Montrer que $\vec{v}_1 = v_1(x, t)\vec{e}_x$ vérifie une équation de d'Alembert 1D pour une modélisation unidimensionnelle.

Partons des équations linéarisées, et en particulier la LQM projetée selon l'axe (Ox) :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1 \quad (2.13)$$

On dérive la première par rapport au temps, et on injecte la troisième équation dans la deuxième :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

On injecte enfin cette dernière équation, en utilisant le théorème de Schwartz :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \iff \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

Pour le démontrer à 3D, il faut d'abord démontrer que $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$, démonstration hors de portée avec les outils à notre programme. On peut donc ajouter comme hypothèse que l'écoulement du fluide est irrotationnel. En appliquant alors le gradient à l'équation de conservation de la masse (en utilisant $\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1$) :

$$\chi_s \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad}(P_1)) + \text{grad}(\text{div}(\vec{v}_1)) = 0 \quad (2.16)$$

puis l'identité $\text{grad}(\text{div}) = \text{rot}(\text{rot}) + \Delta$, il vient, ayant $\text{rot}(\vec{v}) = 0$:

$$\chi_s \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad}(P_1)) + \Delta \vec{v}_1 = 0 \implies \chi_s \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right) + \Delta \vec{v}_1 = 0 \iff \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{v}_1 \quad (2.17)$$

où l'opérateur laplacien est ici vectoriel !

1.5 Célérité des ondes acoustiques

La détermination de la célérité des ondes sonores (à ne pas confondre avec la vitesse mésoscopique des particules de fluide v_1) nécessite de connaître la masse volumique μ_0 et le coefficient de compressibilité isentropique χ_s . Dans le cas d'un gaz parfait, on peut se servir de :

- l'équation des gaz parfait $PV = nRT = \frac{m}{M}RT$ conduisant à $\mu = \frac{MP}{RT}$ et donc $\mu_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$;
- la loi de Laplace, du fait de la transformation isentropique : $PV^\gamma = \text{cste} = P\mu^{-\gamma}$. On différencie logarithmiquement :

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0 \implies \chi_s = \frac{1}{\gamma P} \quad (2.18)$$

D'où une célérité :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{RT}{MP_0}} \times \gamma P = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (2.19)$$

soit avec $M = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\gamma = \frac{7}{5}$ (GP diatomique) à $T = 298 \text{ K}$, il vient $c = 345 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Pour des gaz réels, ou pour d'autres fluides, on peut par contre se servir des valeurs tabulées de μ_0 et χ_s . En particulier, retenons $c(\text{eau}) = 1410 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

II. Étude énergétique

II.1 Bilan énergétique

a) Vecteur densité de courant énergétique

Soit un élément de surface $d\vec{S}$. Sous l'effet de l'onde, celui-ci se déplace à la vitesse \vec{v}_1 , l'onde acoustique exerçant la force $d\vec{F} = P_1 d\vec{S}$. L'énergie, sonore, qui traverse cette surface pendant la durée dt vaut donc :

$$d^2\mathcal{E} = (d\vec{F} \cdot \vec{v}_1)dt = \vec{\Pi} d\vec{S} dt \quad (2.20)$$

avec $\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1$ le **vecteur de Poynting acoustique**, vecteur densité de courant énergétique acoustique, homogène à une puissance surfacique (exprimée en $W \cdot m^{-2}$). Notons que l'on ne tient compte que de la surpression qui caractérise l'onde sonore, et non de la pression au repos.

b) Équation de conservation de l'énergie

Afin d'écrire un bilan énergétique, faisons un parallèle avec le bilan d'énergie lors de la diffusion thermique, qui s'écrit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_Q) = 0 \quad (2.21)$$

où $e = \rho u$ est homogène à une énergie volumique. Calculons donc la divergence du vecteur de Poynting acoustique :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) = \vec{\nabla} \cdot (P_1 \vec{v}_1) = (\vec{\nabla} P_1) \cdot \vec{v}_1 + P_1 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) = \overrightarrow{\text{grad}} P_1 \cdot \vec{v}_1 + P_1 \text{div}(\vec{v}_1) \quad (2.22)$$

puis en utilisant la LQM et l'équation de conservation de la masse :

$$\text{div} \vec{\Pi} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \cdot \vec{v}_1 + P_1 \left(-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) \quad (2.23)$$

puis à l'aide de $\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1$ et en reconnaissant le développement de la dérivée de carrés $\vec{v}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{v}_1^2 \right)$:

$$\text{div} \vec{\Pi} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{v}_1^2 \right) - \chi_s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} P_1^2 \right) \quad (2.24)$$

d'où l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e_a}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = 0 \quad \text{où} \quad e_a = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s P_1^2 \quad (2.25)$$

L'énergie volumique acoustique e_a se décompose en un terme d'énergie cinétique volumique, et un autre terme ressemblant à une sorte d'énergie potentielle élastique volumique, en réalité il correspond à un surcroît d'énergie interne dû à la compression du fluide.

II.2 Intensité acoustique et niveau sonore

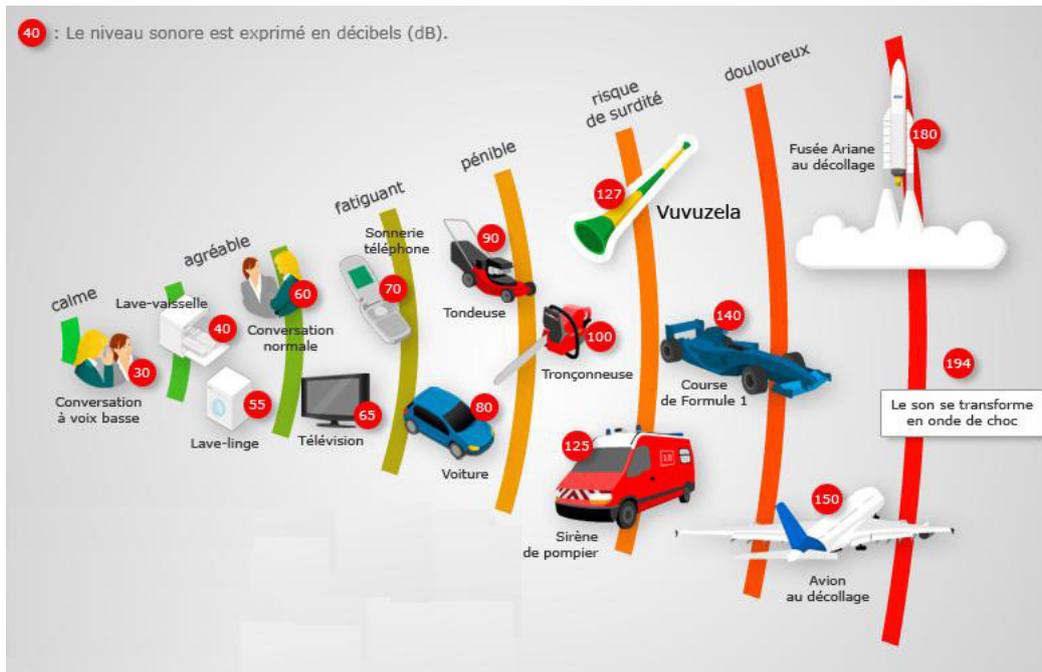
On définit l'intensité acoustique (ou sonore) comme la moyenne temporelle du vecteur de Poynting acoustique :

$$I = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle \quad (2.26)$$

Elle s'exprime également en $W \cdot m^{-2}$. Toutefois, les capteurs humains (oreilles et yeux) sont des détecteurs **logarithmiques**, c'est-à-dire que quand l'intensité est multipliée par 10, la sensation ressentie est multipliée par deux. On utilise alors plutôt le **niveau sonore**, intensité exprimée en décibel :

$$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (2.27)$$

avec $I_0 = 10^{-12} W \cdot m^{-2}$, intensité sonore de référence, correspondant au seuil moyen de perception sonore. Quelques odg :



III. Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

III.1 Définition

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une famille de solutions de l'équation de d'Alembert 1D était constituée d'ondes progressives harmoniques. Nous élargissons maintenant le spectre, étant donné le caractère 3D. Considérons dans un premier temps un cas « simple » (et surtout courant) où la propagation est unidirectionnelle selon le vecteur \vec{u} . Construisons une base orthonormée directe telle que $+\vec{e}_x = \vec{u}$.

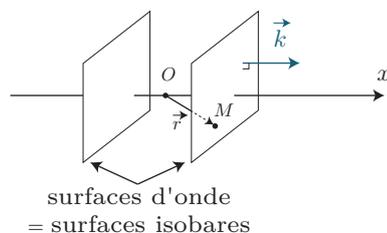
L'onde progressive harmonique est alors décrite par :

$$P_1(M, t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) = P_{10} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad (2.28)$$

où $\vec{k} = k\vec{e}_x = k\vec{u}$ est le vecteur d'onde, dirigé dans le sens de propagation de l'onde et \vec{r} est le vecteur position. En notations complexes :

$$\underline{P}_1(M, t) = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (2.29)$$

*



On dit de ce type d'onde qu'il s'agit d'une **onde plane progressive harmonique** (OPPH) dans la mesure où les **surfaces d'ondes** (ou plans d'ondes), c'est-à-dire les surfaces où la valeur de la surpression est la même à une date t fixée, sont des plans (ici des plans d'équation $x = cste$), orthogonaux à la direction \vec{u} de propagation de l'onde.

D'après la théorie de Fourier, toute onde plane progressive (OPP) est somme (éventuellement conti-

nue) d'ondes planes progressives harmoniques, et sera également solution de l'équation de d'Alembert :

$$P_1^+(M, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{1n} \cos(n\omega t - n\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_n) \quad (2.30)$$

$$\text{ou } P_1^+(M, t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi(\omega)) d\omega \quad (2.31)$$

III.2 Relation de dispersion

Une OPPH de la forme $\underline{P}_1(M, t) = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ est solution de l'équation de d'Alembert si :

$$(j\omega)^2 \underline{P}_1 = c^2 (-j\vec{k})^2 \underline{P}_1 \iff \omega^2 = c^2 k^2 \iff k = \pm \frac{\omega}{c} \quad (2.32)$$

On retrouve la relation de dispersion classique, et les deux solutions possibles pour la norme du vecteur d'onde, caractérisant les deux sens possibles de la propagation d'une OPPH. On en déduit que la vitesse de phase vaut toujours $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$.

III.3 Caractère longitudinal de l'OPPH sonore

Pour justifier le caractère longitudinal d'une OPPH sonore, partons de la forme précédente pour la pression, que l'on injecte dans la LQM :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} P_1 \implies \mu_0 j\omega \vec{v}_1 = -(-j\vec{k}) \underline{P}_1 \iff \vec{v}_1 = \frac{\underline{P}_1}{\mu_0 \omega} \vec{k} = \frac{\underline{P}_{10}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u} \quad (2.33)$$

Le champ eulérien des vitesses est donc colinéaire au vecteur \vec{k} (ou \vec{u}), ce qui traduit bien le caractère longitudinal : le mouvement des particules de fluide est dans la même direction que la propagation de l'onde.

III.4 Impédance acoustique

On élargit la définition d'impédance étudiée au chapitre précédent en écrivant le rapport entre la cause de l'onde (grandeur d'excitation, source) sur la grandeur de réponse, ici respectivement la surpression et le champ de vitesse eulérien. Ainsi, on définit l'**impédance acoustique** par :

$$Z = \frac{P_1(M, t)}{v_1(M, t)} \quad \text{ou parfois} \quad Z = \frac{P_1(M, t)}{D_v(M, t)} \quad (2.34)$$

où $D_v = S v_1(M, t)$ est le débit volumique à travers une surface S . Dans toute la suite nous utiliserons la première définition.

Pour une OPPH se propageant dans le sens $+\vec{u}$, on a écrit précédemment le lien entre la vitesse et la pression :

$$\vec{v}_1 = \frac{\underline{P}_{10}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u} \implies Z = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}} = Z_c \quad (2.35)$$

Pour une OPPH se propageant dans le sens $-\vec{u}$ du type $\underline{P}_1 = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$, un signe apparaît du fait de la dérivée spatiale :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} P_1 \implies \mu_0 j\omega \vec{v}_1 = -(j\vec{k}) \underline{P}_1 \iff \vec{v}_1 = -\frac{\underline{P}_{10}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u} \implies Z = -\mu_0 c \quad (2.36)$$

Relation entre surpression et vitesse pour une OPP

L'impédance étant indépendante de ω , on généralise la notion d'impédance acoustique à toute OPP :

- pour une OPP se propageant dans le sens $+\vec{u}$, $P_1^+(M, t) = Z_c v_1^+(M, t)$;
- pour une OPP se propageant dans le sens $-\vec{u}$, $P_1^+(M, t) = -Z_c v_1^+(M, t)$;

en posant $Z_c = \mu_0 c$. Citons deux ordres de grandeurs importants : $Z(\text{air}) = 410 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ et $Z(\text{eau}) = 1,4\cdot 10^6 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$.

Retenons que de manière globale :

$$Z(\text{solide}) \gg Z(\text{liquide}) \gg Z(\text{gaz}) \quad (2.37)$$

traduisant qu'à surpression égale, la vitesse des particules de fluide est plus grande dans les gaz que dans les phases condensées liquide et solide. Par analogie avec l'électrocinétique, l'impédance acoustique caractérise la résistance du milieu au passage de l'onde. Nous allons nous en servir dans la partie suivante.

III.5 Aspects énergétiques d'une OPPH

Partons d'une OPPH se déplaçant dans le sens $+\vec{e}_x$ dans l'air :

$$P_1(x, t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{et} \quad v_1(x, t) = v_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.38)$$

avec $P_1(x, t) = Z_c v_1(x, t) \implies P_{10} = Z_c v_{10}$ où $Z_c = \mu_0 c$.

Exercice

Déterminer l'expression des deux énergies volumiques, les comparer. Exprimer enfin le vecteur de Poynting en fonction de e_a .

Écrivons les deux énergies volumiques ainsi définies :

$$\frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 = \frac{\mu_0 v_{10}^2}{2} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.39)$$

tandis que l'équivalent d'énergie potentielle s'écrit :

$$\frac{1}{2} \chi_s P_1^2 = \frac{\chi_s}{2} P_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{\chi_s \mu_0 c}{2} v_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{\mu_0 v_{10}^2}{2} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.40)$$

On observe donc que les deux énergies sont égales à tout instant : l'énergie totale acoustique est donc constamment répartie entre ces deux formes cinétique et de pression, on parle d'**équipartition de l'énergie**. Ce résultat est général pour une OPP.

De plus, $e_a = \mu_0 v_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \mu_0 v_1^2$. Enfin le vecteur de Poynting acoustique s'écrit :

$$\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1 = \mu_0 c v_1^2 \vec{e}_x = \boxed{e_a c \vec{e}_x} \quad (2.41)$$

résultat que nous retrouverons également au prochain chapitre sur les ondes électromagnétiques.

III.6 Justification de l'approximation acoustique

Grâce aux OPPH, nous allons pouvoir vérifier *a posteriori* que les approximations sur lesquelles s'appuie la théorie de propagation d'une onde acoustique sont bien vérifiées quantitativement.

a) Évolution isentropique

Utilisons les ordres de grandeurs pour étudier l'influence des échanges thermiques. Les phénomènes sont périodiques de fréquence f , les champs thermodynamiques varient sur une distance caractéristique λ , la longueur d'onde. Supposons qu'il n'y a que de la conduction caractérisée par une conductivité κ . Alors le transfert thermique infinitésimal reçu par une particule de fluide de volume $d\tau$ pendant dt vaut :

$$\delta^2 Q = \kappa \Delta T d\tau dt \sim \kappa \frac{T}{\lambda^2} d\tau dt \quad (2.42)$$

tandis que l'énergie interne varie de :

$$d^2 U = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau dt \sim \mu c f T d\tau dt \quad (2.43)$$

En faisant le quotient :

$$\frac{\delta^2 Q}{d^2 U} = \frac{\kappa}{\mu c f \lambda^2} \sim \frac{D_{th} f}{c^2} \quad (2.44)$$

en introduisant le coefficient de diffusivité thermique $D_{th} = \frac{\kappa}{\mu c}$. En prenant les ordg classiques pour l'eau ($D_{th} = 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) et l'air ($D_{th} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), à la limite de l'audible $f < 20 \text{ kHz}$:

$$\left(\frac{\delta^2 Q}{d^2 U} \right)_{\text{air}} < 3,5 \cdot 10^{-6} \ll 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\delta^2 Q}{d^2 U} \right)_{\text{eau}} < 9 \cdot 10^{-10} \ll 1 \quad (2.45)$$

On aurait aussi pu tout simplement comparer le temps caractéristique de diffusion thermique à la période :

$$\tau_{th} = \frac{L_c^2}{D_{th}} = \frac{\lambda^2}{D_{th}} = \frac{c^2}{f^2 D_{th}} \gg T = \frac{1}{f} \iff f \ll \frac{c^2}{D_{th}} \sim 10^9 \text{ Hz} \quad (2.46)$$

dans l'air. Donc à faible fréquence, l'hypothèse d'adiabaticité est bien vérifiée.

b) Expression simplifiée de l'accélération

À l'aide d'ordres de grandeurs liés au caractère ondulatoire, on peut justifier facilement l'expression de l'accélération d'une particule de fluide.



Exercice

Comparer les termes $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$ avec des ordres de grandeurs. En déduire une condition sur $\|\vec{v}\|$.

On souhaite que $\|(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}\| \ll \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|$, cela se traduit en ordres de grandeurs par $\frac{v^2}{\lambda} \ll \frac{v}{T}$, soit $v \ll \frac{\lambda}{T} = c$. Il faut donc que la vitesse mésoscopique des particules de fluide soit très petite devant la célérité.

Cette condition sur la vitesse est également liée à l'incompressibilité du fluide. On dit souvent qu'un écoulement est incompressible à condition que la vitesse du fluide soit très inférieure à celle de propagation des ondes acoustiques. On introduit d'ailleurs le **nombre de Mach** $Ma = \frac{v}{c}$, qui doit ainsi vérifier $Ma \ll 1$.

Si on suppose l'écoulement parfait, on peut utiliser le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant horizontale entre un point de vitesse nulle et pression P_0 et un point où la vitesse est v et la pression $P_0 + P_1$. Ainsi $P_0 + P_1 + \frac{1}{2}\mu_0 v^2 = P_0$ donc $P_1 \sim -\frac{1}{2}\mu_0 v^2$. Ainsi la condition $v \ll c$ se traduit par :

$$v \ll \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \chi_s}} \iff \chi_s \mu_0 v^2 \ll 1 \iff -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \mu_0 v^2 \ll 1 \iff \frac{dV}{V} \ll 1 \quad (2.47)$$

en remplaçant dP par P_1 . Cela traduit bien l'incompressibilité.

c) Ordres de grandeurs

Vérifions quantitativement que l'amplitude de la vitesse, la surpression et le déplacement a vérifient bien $v_{10} \ll c$, $P_{10} \ll P_0$ et $a \ll \lambda$. Plaçons-nous à une fréquence de 1 kHz, et une intensité sonore de $I_{dB} = 120 \text{ dB}$, c'est-à-dire une intensité sonore $I = I_0 10^{I_{dB}/10} = 1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ correspondant au seuil de douleur. Partons d'une OPPH se déplaçant dans le sens $+\vec{e}_x$ dans l'air, s'écrivant donc :

$$P_1(x, t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{et} \quad v_1(x, t) = v_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.48)$$

avec $P_1(x, t) = Z_c v_1(x, t) \implies P_{10} = Z_c v_{10}$ où $Z_c = \mu_0 c$. On peut alors calculer l'intensité sonore :

$$* \quad I = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle = \langle P_1 v_1 \rangle = Z \langle v_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c v_{10}^2 = \frac{P_{10}^2}{2 \mu_0 c} \quad (2.49)$$

On en déduit $v_{10} = \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c}} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \ll c$ et $P_{10} = \sqrt{2I \mu_0 c} = 28 \text{ Pa} \ll P_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

L'amplitude du mouvement vaut alors :

$$a \simeq \frac{v_{10}}{\omega} = \frac{v_{10}}{2\pi f} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m} \ll \lambda = \frac{c}{f} = 0,34 \text{ m} \quad (2.50)$$

L'approximation acoustique est donc vérifiée quantitativement.

IV. Réflexion et transmission des ondes sonores sur une interface plane

IV.1 Modélisation et conditions aux limites

La propagation d'ondes acoustiques avec un changement de milieu est un phénomène courant en physique. Citons notamment des ondes ultrasonores qui passent de l'air aux tissus de la peau, aux os, etc. lors d'une échographie. On étudie pour cela la propagation d'une OPPH de pulsation ω dirigée selon $+\vec{e}_x$, rencontrant une interface plane située en $x = 0$ entre deux milieux non miscibles caractérisés par leur impédance Z_1 et Z_2 et leur célérité c_1 et c_2 . Étant donné le changement d'impédance, il est nécessaire d'avoir une onde réfléchi (indiquée r) et une onde transmise (indiquée t) pour pouvoir vérifier les conditions aux limites en $x = 0$:

$$\begin{cases} P_i(x, t) = P_{i0}e^{j(\omega t - kx)} & \text{et } \vec{v}_i = v_{i0}e^{j(\omega t - kx)}\vec{e}_x \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\begin{cases} P_r(x, t) = P_{r0}e^{j(\omega_r t + k_r x)} & \text{et } \vec{v}_r = v_{r0}e^{j(\omega_r t + k_r x)}\vec{e}_x \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} P_t(x, t) = P_{t0}e^{j(\omega_t t - k_t x)} & \text{et } \vec{v}_t = v_{t0}e^{j(\omega_t t - k_t x)}\vec{e}_x \end{cases} \quad (2.53)$$

Notons que l'onde réfléchi ou l'onde transmise ont *a priori* une pulsation (et donc un vecteur d'onde) différente de celle de l'onde incidente.

Il y a deux conditions aux limites à respecter à l'interface en $x = 0$ que l'on considère fixe car l'amplitude des déplacements est très petite devant λ :

- la **continuité du champ de vitesse**, sinon il y aurait mélange des fluides ou formation de vide, ce qui est exclu par hypothèse :

$$v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t) \quad (2.54)$$

- la **continuité de la surpression**, qui s'obtient en appliquant la LQM projetée selon l'axe Ox à une tranche d'épaisseur 2ε autour de $x = 0$:

$$\delta m(\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t} = 0 = S(P_0 + P_i(-\varepsilon, t) + P_r(-\varepsilon, t)) - S(P_0 + P_t(+\varepsilon, t)) \quad (2.55)$$

car on somme les surpressions du côté $x < 0$ et $x > 0$ à la pression ambiante P_0 . Il vient à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ $\delta m(\varepsilon) \rightarrow 0$ conduisant à :

$$P_i(0, t) + P_r(0, t) = P_t(0, t) \quad (2.56)$$

La première équation se réécrit :

$$v_{i0}e^{j\omega t} + v_{r0}e^{j\omega_r t} = v_{t0}e^{j\omega_t t} \quad \forall t \quad (2.57)$$

ce qui impose l'égalité des trois pulsations $\omega_r = \omega_t = \omega$, tandis que les vecteurs d'onde admettent pour norme $k_r = k = \frac{\omega}{c_1}$, et $k_t = \frac{\omega}{c_2}$.

IV.2 Conséquence sur les amplitudes

On peut ensuite chercher à déterminer les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour la vitesse et la pression :

$$r_v = \frac{v_{r0}}{v_{i0}} \quad , \quad t_v = \frac{v_{t0}}{v_{i0}} \quad , \quad r_p = \frac{P_{r0}}{P_{i0}} \quad \text{et} \quad t_p = \frac{P_{t0}}{P_{i0}} \quad (2.58)$$

Exercice

À partir des équations précédentes, déterminer ces coefficients de réflexion et de transmission en amplitude en fonction des impédances.

Réécrivons les conditions aux limites en termes d'impédances et de vitesse :

$$v_i + v_r = v_t \quad \text{et} \quad Z_1 v_i - Z_1 v_r = Z_2 v_t \quad (2.59)$$

puis on utilise les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour les vitesses :

$$v_{i0}(1 + r_v) = t_v v_{i0} \quad \text{et} \quad Z_1(1 - r_v)v_{i0} = Z_2 t_v v_{i0} \iff 1 + r_v = t_v \quad \text{et} \quad Z_1(1 - r_v) = Z_2 t_v \quad (2.60)$$

Attention, la continuité de la surpression n'est pas toujours vérifiée, cela dépend des systèmes étudiés, du type de frontière entre les milieux d'impédances différentes.

conduisant après résolution à $r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ et $t_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$. D'autre part, $r_p = \frac{-Z_1 v_{r0}}{Z_1 v_{i0}} = -r_v$ et $t_p = \frac{Z_2}{Z_1} t_v = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

On constate à nouveau qu'il n'y a pas d'onde réfléchiée dans le cas d'adaptation d'impédance $Z_1 = Z_2$. Il existe cependant des situations où il est impossible de modifier Z_1 ou Z_2 : on peut alors ajouter un milieu supplémentaire pour limiter les réflexions. C'est ce qui explique l'ajout d'une couche de gel entre l'appareil à échographie et la peau (cf. TD).

IV.3 Conséquences énergétiques

On définit également des coefficients de réflexion et transmission en puissance à partir de l'intensité acoustique :

$$R = \frac{I_r(0)}{I_i(0)} \quad \text{et} \quad T = \frac{I_t(0)}{I_i(0)} \quad (2.61)$$

Comme $I_i = \langle \|\vec{P}_i \vec{v}_i\| \rangle = Z_1 \langle v_i^2 \rangle$ et $I_r = Z_1 \langle v_r^2 \rangle$, il vient

$$R = \frac{v_r^2/2}{v_i^2/2} = r_v^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (2.62)$$

tandis que le coefficient de transmission en puissance vaut :

$$T = \frac{Z_2 \langle v_t^2 \rangle}{Z_1 \langle v_i^2 \rangle} = \frac{Z_2}{Z_1} t_v^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (2.63)$$

On vérifie alors que $R + T = 1$, traduisant la conservation de l'énergie à l'interface.

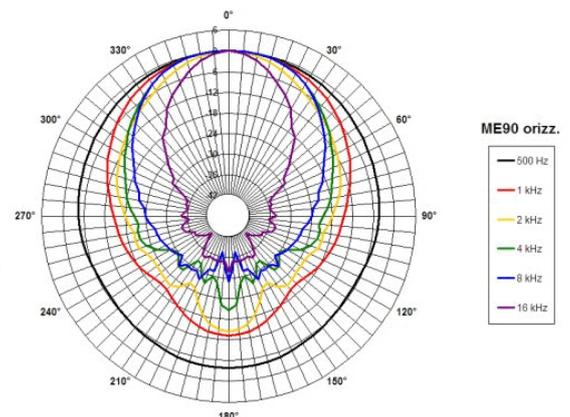
Cela explique en particulier pourquoi les sons émis dans l'air sont très peu entendus dans l'eau, car l'impédance de l'eau étant élevée, $R \simeq 1$, il n'y a presque pas d'onde transmise.

Concernant le cas des instruments de musique, il faut d'une part traduire la discontinuité de section à l'embouchure d'un instrument, et éventuellement prendre en compte le fait que l'onde transmise n'est pas plane, en particulier dans le cas où le diamètre de l'embouchure se rapproche de λ . En effet, un phénomène de diffraction se produit, et la modélisation en ondes planes n'est plus valide.

V. Ondes sphériques

V.1 Ondes sphériques progressives

Une source sonore réelle n'émet jamais dans une seule direction, mais souvent de manière anisotrope dans plusieurs directions. On peut d'ailleurs mesurer, à distance fixée, un diagramme de directivité d'un haut-parleur en traçant l'intensité sonore en fonction de l'angle.



Étudions alors l'émission d'une onde sphérique, dans le cas simple d'une invariance par rotation autour du centre du repère. La suppression comme la norme du champ des vitesses ne dépendent alors que de r et de t . L'équation de d'Alembert à trois dimensions s'écrit alors en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rP_1) \iff \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rP_1) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rP_1) \quad (2.64)$$

en multipliant par r . La fonction rP_1 obéit alors à une équation de d'Alembert classique à une dimension, dont les solutions sont :

$$rP_1(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \iff P_1(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (2.65)$$

Au lieu de l'intensité acoustique, on peut aussi utiliser la puissance, en multipliant l'intensité acoustique par la surface (ou en intégrant si le vecteur de Poynting n'est pas constant sur la surface).

Ces deux fonctions représentent deux ondes progressives se propageant dans le sens des r croissants ($+\vec{e}_r$), c'est une onde divergente ; et dans le sens des r décroissants ($-\vec{e}_r$), c'est une onde convergente.

En médecine particulièrement, il est intéressant de savoir créer des ondes sphériques convergentes, de sorte à concentrer l'énergie pour traiter des cellules cancéreuses, ou lors d'échographie pour déterminer précisément la nature d'un tissu à une certaine profondeur.



L'amplitude des ondes semble décroître en $1/r$, mais ce n'est PAS dû à de la dissipation d'énergie, bien au contraire. En effet, aucun phénomène dissipatif n'est pris en compte dans les équations du mouvement. Si l'amplitude diminue, c'est que la puissance de l'onde, qui reste constante, est répartie sur une surface de plus en plus grande, de valeur $4\pi r^2$. Cela signifie que le vecteur de Poynting acoustique est justement proportionnel à $\frac{1}{r^2}$, ce qui est cohérent avec l'expression de P_1 .

V.2 Cas d'un onde sphérique progressive harmonique

Considérons le cas d'une sphère pulsante située en $r = 0$ imposant localement une perturbation sinusoïdale de sa surface, à l'origine d'une onde acoustique. On peut alors écrire la surpression avec une dépendance harmonique du type :

$$P_1^+(r, t) = A_0 \frac{\cos(\omega t - kr + \varphi)}{r} \quad (2.66)$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ d'après la relation de dispersion. On peut également chercher le champ de vitesse associé.



Il n'est pas licite d'utiliser la relation $v_1 = \frac{P_1}{\mu_0 c}$, on n'a pas une onde plane !

On utilise donc la LQM :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} P_1 = A_0 \left(\frac{\cos(\omega t - kr + \varphi)}{r^2} - \frac{k \sin(\omega t - kr + \varphi)}{r} \right) \vec{e}_r \quad (2.67)$$

puis par intégration (pas de constante d'intégration), le champ de vitesse s'exprime selon :

$$\vec{v}_1 = \frac{A}{\mu_0 r \omega} \left(\frac{\sin(\omega t - kr + \varphi)}{r} + k \cos(\omega t - kr + \varphi) \right) \vec{e}_r \quad (2.68)$$

On peut distinguer deux situations :

- champ dit « proche » où $r \ll \lambda$, c'est-à-dire $\frac{1}{r} \gg k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donc :

$$\vec{v}_1 \simeq \frac{A}{\mu_0 r^2 \omega} \sin(\omega t - kr + \varphi) \vec{e}_r \quad (2.69)$$

et l'impédance est complexe et vaut $\underline{Z} = \frac{P_1}{v_1} = j\mu_0 r \omega$;

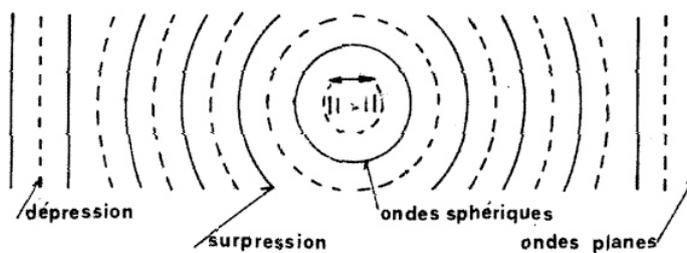
- champ dit « lointain » où $r \gg \lambda$: c'est le contraire, $\frac{1}{r} \ll k$, d'où :

$$\vec{v}_1 \simeq \frac{Ak}{\mu_0 r \omega} \cos(\omega t - kr + \varphi) \vec{e}_r \quad (2.70)$$

et l'impédance est simplement $Z = \frac{\mu_0 \omega}{k} = \mu_0 c$: on retrouve le cas d'une onde plane.

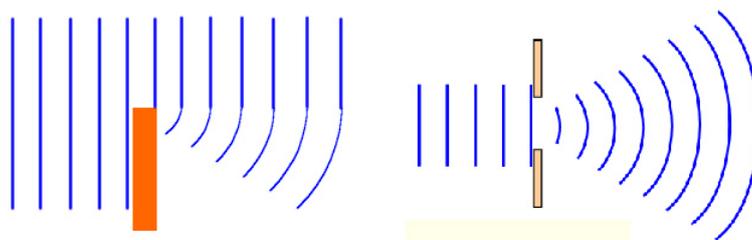
V.3 Onde plane / sphérique et diffraction

La distinction entre champ proche et lointain permet d'illustrer l'importance du concept de l'onde plane progressive. En effet, à grande distance de l'émetteur isotrope de l'onde, les plans d'ondes qui sont des sphères de rayon r deviennent localement assimilables à des ondes planes. Il suffit alors de se placer dans une zone d'extension spatiale de petite dimension devant le rayon de courbure de la surface d'onde sphérique.



Ainsi, retenons que toute onde peut être décomposée soit en superposition d'ondes planes ou d'ondes sphériques, on choisit donc la base adaptée au problème étudié.

Notons enfin l'importance de la diffraction. En effet, si on place sur le parcours d'une onde plane (ou assimilée) un obstacle de dimension caractéristique $L \lesssim \lambda$, l'onde cesse d'être plane en aval de l'obstacle, et les fronts d'onde se déforment.



Exercices

2.1 Isolation phonique

Le mur est modélisé par une membrane de masse volumique ρ et d'épaisseur e en translation au voisinage de $x = 0$ dans un tuyau sonore de section S rempli d'air à la température de 20°C de masse volumique $\rho_0 = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

On cherche à déterminer les ondes transmises et réfléchies en $x = 0$ pour une onde de vitesse incidente $\underline{v}_i = v_0 e^{j(\omega t - kx)}$ pour $x < 0$.

1. On considère que la membrane se trouve constamment en $x = 0$. À quelle condition cette approximation est-elle valable ?
2. Écrire les conditions aux limites en $x = 0$.
3. Donner la forme des ondes de pression et de vitesse du côté (1) : $x < 0$ et du côté (2) : $x > 0$.
4. En déduire le coefficient complexe de transmission en vitesse $\tau(j\omega)$, puis celui en puissance $T(\omega)$. Commenter le type de filtre obtenu au vu de la fonction de transfert $\tau(j\omega)$. Donner l'expression de sa fréquence de coupure.
5. Pour $\rho = 1800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, quelle est l'épaisseur du mur permettant une atténuation de 40 dB à 400 Hz ?
Quels instruments d'un groupe de rock entend-on le mieux à travers un mur ?

-
1. Cette approximation n'est valable que si la membrane se déplace très peu à l'échelle de la longueur d'onde λ . C'est à la base de l'approximation acoustique.
 2. Écrivons les conditions aux limites, en considérant qu'il y a une onde réfléchie et une onde transmise. D'une part on a continuité du champ de vitesse à l'interface :

$$v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t) \quad (2.71)$$

et d'autre part, on n'a pas continuité de la surpression, car il faut appliquer la loi de la quantité de mouvement à la membrane, qui se déplace en bloc à la vitesse $v_t(0, t)$:

$$\rho S e \frac{\partial v_t(0, t)}{\partial t} = (p_i(0, t) + p_r(0, t) - p_t(0, t)) S \quad (2.72)$$

3. On écrit les formes d'onde de la manière suivante :

$$\underline{v}_r(x, t) = v_{r0} e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_t(x, t) = v_{t0} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.73)$$

et pour la pression :

$$\underline{p}_i(x, t) = Z v_i, \quad \underline{p}_r(x, t) = -Z v_r \quad \text{et} \quad \underline{p}_t(x, t) = v_{t0} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.74)$$

en posant $Z = \rho_0 c$.

4. En injectant les formes précédentes dans les conditions aux limites, en introduisant le coefficient de transmission en vitesse $\tau(j\omega) = \frac{v_t(0, t)}{v_i(0, t)}$ (et par analogie celui en réflexion $r(j\omega)$) :

$$1 + r = \tau \quad \text{et} \quad \rho e j \omega \tau = Z(1 - r - \tau) \quad (2.75)$$

soit en réinjectant r dans la seconde équation, il vient après réarrangement :

$$\tau(j\omega) = \frac{2Z}{2Z + \rho e j \omega} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad (2.76)$$

avec $\omega_c = \frac{2Z}{\rho e} = \frac{2\rho_0 c}{\rho e}$. Concernant le coefficient en puissance :

$$T(\omega) = \left| \frac{P_t(0, t) v_i(0, t)}{P_i(0, t) v_i(0, t)} \right| = \left| \frac{Z v_t(0, t)^2}{Z v_i(0, t)^2} \right| = |\tau|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (2.77)$$

On a donc un filtre passe-bas, ce qui était relativement attendu, car les basses fréquences sont souvent plus difficiles à filtrer que les hautes fréquences. La fréquence de coupure est $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$.

5. Si on veut une atténuation de 40 dB à 400 Hz, il faut que :

$$T = \frac{1}{100} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \iff \omega_c = \frac{\omega}{\sqrt{99}} = \frac{2\rho_0 c}{\rho e} \iff e = \frac{2\rho_0 c \sqrt{99}}{\omega \rho} = 9,4 \text{ cm} \quad (2.78)$$

sachant que $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_0}} = 258 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour un groupe de rock, on entendra très certainement la basse et la batterie, dommage pour les voisins !!

2. 2 Réflexion et transmission dues à un changement de section

On considère la propagation d'ondes sonores planes dans un tube cylindrique d'axe Ox rempli d'un gaz. On se place dans l'approximation acoustique. On pose pour les champs de pression, masse volumique, température et vitesse : $p(x, t) = p_0 + p_1(x, t)$; $\vec{v}(x, t) = v_1(x, t) \vec{e}_x$ où les grandeurs indicées par 1 sont des infiniment petits du même ordre (perturbations acoustiques) et les grandeurs indicées par 0 sont les grandeurs dans le fluide au repos, supposées uniformes. On note c la célérité des ondes sonores dans le fluide ; ρ_0 la masse volumique du fluide au repos.

En $x = 0$, la section du cylindre passe de S_1 à S_2 . On s'intéresse au cas où une onde plane progressive harmonique se propage pour $x < 0$ dans le sens des x croissants, la vitesse s'écrit alors pour $x < 0$: $\vec{v}(x, t) = v_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_x$

1. À quelle condition un changement de section continu peut-il être modélisé comme dans cet exercice par un changement brutal en $x = 0$? Quelles sont alors les conditions aux limites que vérifient les champs en $x = 0$?
2. En déduire les coefficients de réflexion r et de transmission τ en vitesse des ondes en fonction de $\alpha = S_2/S_1$, puis ceux R et T en puissance. Faire un bilan énergétique et commenter. Tracer $R(\alpha)$ et $T(\alpha)$. Commenter le cas $S_2 \gg S_1$.
3. Rappeler l'expression des coefficients précédents quand la section ne varie pas mais quand les fluides sont différents de part et d'autre de la section $x = 0$, caractérisés par des impédances $Z_1 = \rho_1 c_1$ pour $x < 0$, et $Z_2 = \rho_2 c_2$ pour $x > 0$. Comment définir une nouvelle impédance Z' qui permettrait de traiter simplement le cas où le fluide et la section changent en $x = 0$.

1. C'est possible à condition que la distance caractéristique de changement de section soit très inférieure à la longueur d'onde de l'onde progressive qui se propage. On écrit la continuité de la surpression à ce changement de section, ainsi que la conservation du débit volumique (on ne peut plus écrire la continuité de la vitesse, et le fluide peut être considéré comme quasi-incompressible), en introduisant des ondes réfléchies et transmises, de même pulsation :

$$S_1(v_i(0, t) + v_r(0, t)) = S_2 v_t(0, t) \quad \text{et} \quad p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t) \quad (2.79)$$

soit en se servant des impédances et des coefficients de réflexion en amplitude :

$$S_1(1 + r) = S_2 \tau \quad \text{et} \quad Z_1(1 - r) = Z_2 \tau \quad (2.80)$$

En l'occurrence ici, $Z_1 = Z_2$ car il s'agit d'air de même masse volumique de part et d'autre. D'où après simplification, et en posant $\alpha = S_2/S_1$:

$$r = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2}{\alpha + 1} \quad (2.81)$$

En puissance, cela donne :

$$R = \frac{\langle \Pi_r \rangle S_1}{\langle \Pi_i \rangle S_1} = \frac{\langle v_r^2 \rangle}{\langle v_i^2 \rangle} = r^2 = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)^2 \quad (2.82)$$

et pour le coefficient de transmission en puissance :

$$T = \frac{\langle \Pi_t \rangle S_2}{\langle \Pi_i \rangle S_1} = \alpha \frac{\langle v_t^2 \rangle}{\langle v_i^2 \rangle} = \alpha \tau^2 = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} \quad (2.83)$$

On obtient trivialement $R + T = 1$, traduisant la conservation de l'énergie. Dans le cas où $S_2 \gg S_1$, on a donc $\alpha \gg 1$, et ainsi $R \rightarrow 1$ et $T \rightarrow 0$, on a réflexion totale en puissance.

2. Cf cours. Si on utilise l'impédance à partir de la pression et du débit volumique $Z' = \frac{P_1}{S v_1} = \frac{\rho_0 c}{S} = \frac{Z}{S}$, on peut traiter à la fois du changement de fluide et de section.

2. 3 Ondes sonores sphériques. Impédance de rayonnement

Une sphère pulsante de centre O fixe dont le rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$ varie sinusoidalement avec une amplitude $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$ émet des ondes sonores dans tout l'espace extérieur à la sphère, rempli d'air de masse volumique μ_0 où

la célérité des ondes sonores vaut c . Compte tenu de la symétrie du problème, on cherche en coordonnées sphériques de centre O des champs de la forme $p_1(M, t) = p_1(r, t)$ et $\vec{v}_1(M, t) = v_1(M, t) \vec{u}_r$.

On rappelle que pour un champ scalaire ne dépendant que de r en coordonnées sphériques le laplacien peut s'écrire : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r, t))$.

- Déterminer la forme générale des solutions $p_1(r, t)$ et interpréter. Justifier que l'on doit choisir $p_1(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c)$.
- Dans la suite, on pose $k = \omega/c$ et on cherche une solution de la forme $p_1 = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr - \alpha)$. Déterminer le champ des vitesses correspondant. Simplifier l'expression du champ des vitesses pour $r \ll \lambda$ et déterminer A et α en exploitant la condition aux limites sur la sphère. Commenter la structure de l'onde pour $r \gg \lambda$.
- Exprimer la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$. Expliquer pourquoi des enceintes acoustiques sphériques sont-elles d'autant plus grande que le son émis est grave ?
- Exprimer l'impédance complexe $Z_R = p_1/v_1$ au niveau de la membrane et la comparer à l'impédance des ondes planes progressives. En déduire pourquoi on peut considérer qu'on a un nœud de pression à l'extrémité d'un tuyau ouvert sur une sphère, dont la section a a pour dimension typique $a_0 \ll \lambda$.

- Partons de l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ de surpression :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \iff \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r p_1(r, t))}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad (2.84)$$

soit en posant $b(r, t) = r p_1(r, t)$, on a une équation de d'Alembert 1D vérifiée par $b(r, t)$, d'où :

$$p_1(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (2.85)$$

On choisit ici une onde progressive se dirigeant selon $+\vec{e}_r$, car il n'y a aucune condition aux limites pour de grandes valeurs de r qui expliquent qu'en plus de l'onde progressive émise par la sphère pulsante, il y ait une onde réfléchi.

- Pour déterminer le champ de vitesse, on ne peut pas utiliser l'impédance, car on n'a pas une OPPH. Partons de la LQM que l'on intègre par rapport au temps :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad} p_1 = A_0 \left(\frac{\cos(\omega t - kr - \alpha)}{r^2} - \frac{k \sin(\omega t - kr - \alpha)}{r} \right) \vec{e}_r \quad (2.86)$$

puis par intégration (pas de constante d'intégration) :

$$\vec{v}_1 = \frac{A}{\mu_0 r \omega} \left(\frac{\sin(\omega t - kr - \alpha)}{r} + k \cos(\omega t - kr - \alpha) \right) \vec{e}_r \quad (2.87)$$

On utilise ensuite la condition aux limites de continuité de la vitesse en $x \simeq a_0$ (comme $a_1 \ll a_0$) :

$$v_1(r = a_0, t) = -a_1 \omega \sin(\omega t) = \frac{A}{\mu_0 a_0 \omega} \left(\frac{\sin(\omega t - ka_0 - \alpha)}{a_0} + k \cos(\omega t - ka_0 - \alpha) \right) \quad (2.88)$$

On simplifie car $a_0 \ll \lambda$:

$$v_1(r = a_0, t) = -a_1 \omega \sin(\omega t) \simeq \frac{A}{\mu_0 a_0^2 \omega} \sin(\omega t - ka_0 - \alpha) \quad (2.89)$$

conduisant à $A = \mu_0 a_1 a_0^2 \omega^2$ et $ka_0 + \alpha = \pi$, soit $\alpha = \pi - ka_0 \simeq \pi$, car $ka_0 = \frac{2\pi a_0}{\lambda} \ll 1$.

Pour $r \gg \lambda$, on a alors

$$v_1(r, t) \simeq \frac{A}{\mu_0 r c} \cos(\omega t - kr - \alpha) = \frac{p_1(r, t)}{\mu_0 c} \quad (2.90)$$

et l'on retrouve donc le lien entre surpression et vitesse pour une onde plane progressive harmonique !

- En champ lointain, la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r vaut :

$$\mathcal{P} = \langle (p_1 4\pi r^2) v_1(r, t) \rangle = 4\pi \frac{A^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kr - \alpha) \rangle = \frac{2\pi A^2}{\mu_0 c} = \frac{2\pi \mu_0 \omega^4 a_0^4 a_1^2}{c} \quad (2.91)$$

Comme la puissance est proportionnelle à $(a_0 \omega)^4$, pour obtenir une même puissance, il faut augmenter a_0 pour permettre d'avoir ω plus faible.

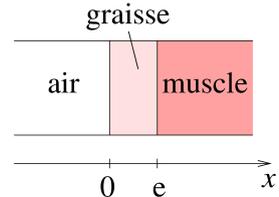
4. Au niveau de la membrane, $p_1 = \frac{A}{a_0} \cos(\omega t - ka_0 - \alpha) = -\frac{A}{a_0} \cos(\omega t)$, tandis que $v_1 = -a_1 \omega \sin(\omega t) = +\Re(a_1 \omega j e^{j\omega t})$
l'impédance complexe vaut donc :

$$\underline{Z}_R = \frac{A}{-ja_0 \omega a_1} = j\mu_0 \omega a_0 \quad (2.92)$$

Or, on constate que $|\underline{Z}_R| = \mu_0(a_0 \omega) \ll \mu_0 \lambda \omega$ conduisant à $|\underline{Z}_R| \ll \mu_0 c = Z_{\text{OPP}}$. Ainsi, sachant que $a_0 \ll \lambda$, l'onde émise en sortie du tuyau est diffractée et peut être assimilée à une onde sphérique. En extrapolant l'étude qui a été conduite pour la réflexion et transmission d'une onde acoustique à l'interface entre deux milieux d'impédance différentes, on se retrouve donc dans une situation où la différence d'impédance est grande, et donc un coefficient de réflexion en puissance qui se rapproche de 1. Par contre le coefficient de transmission en pression tend vers 0, donc cela impose une surpression nulle à la sortie. C'est logique, en sortie de l'écoulement d'air d'un instrument, la pression suit la loi de l'hydrostatique lorsqu'on se déplace à la verticale, donc en négligeant l'effet de la pesanteur, on impose $P = P_0$.

2. 4 Couche anti-reflet

1. Les impédances caractéristiques de l'air et des tissus musculaires pour les ultrasons valent $Z_a = 400 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ et $Z_m = 1,7.10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$. Calculer le coefficient de transmission des puissances sonores à l'interface air-muscle et commenter.



2. Pour supprimer l'onde réfléchie, on réalise une couche anti-reflet d'épaisseur e en graisse, d'impédance Z_g . On note c_a, c_g et c_m les célérités du son dans chacun des trois milieux et on pose $k_a = \omega/c_a, k_g = \omega/c_g$ et $k_m = \omega/c_m$. On cherche alors en notation complexe des champs de vitesse dans les trois milieux de la forme :
 $\underline{v}(x < 0, t) = A_a e^{j(\omega t - k_a x)}, \underline{v}(0 < x < e, t) = A_g e^{j(\omega t - k_g x)} + B_g e^{j(\omega t + k_g x)}$ et $\underline{v}(x > e, t) = A_m e^{j(\omega t - k_m x)}$

- (a) Justifier la forme de ces expressions.
(b) Quelle est la forme du champ de surpression dans les trois milieux ?
(c) Écrire les conditions aux limites et en déduire les valeurs qu'il faut choisir pour e et Z_g .
(d) Commenter la puissance acoustique reçue dans le muscle, dans cette configuration.

1. On a vu dans le cours que le coefficient de transmission des puissances valait :

$$T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 9,1.10^{-4} \quad (2.93)$$

en remplaçant Z_1 par Z_a et Z_2 par Z_m .

2. Cette méthode de calcul est plus rapide que de considérer le cas général d'une onde réfléchie dans l'air et calculer le coefficient de réflexion et l'annuler. On doit ici aboutir à des équations qui doivent nous conduire à des conditions d'obtention d'une telle situation physique.

- (a) Dans l'air, on a des ondes progressives dirigées selon $+\vec{e}_x$ car on cherche en particulier à avoir en $x = 0$ aucune réflexion ; tandis que dans la graisse, il apparaît impossible d'avoir à la fois une transmission totale air - graisse et une transmission totale graisse-muscle, vu la différence d'impédance. On a donc une onde réfléchie en $x = e$, d'où la forme.
(b) Pour le champ de surpression, servons-nous des impédances :

$$\underline{p}(x < 0, t) = Z_a A_a e^{j(\omega t - k_a x)} \quad , \quad \underline{p}(0 < x < e, t) = Z_g \left(A_g e^{j(\omega t - k_g x)} - B_g e^{j(\omega t + k_g x)} \right) \quad (2.94)$$

$$\text{et } \underline{p}(x > e, t) = Z_m A_m e^{j(\omega t - k_m x)} \quad (2.95)$$

- (c) En écrivant la continuité du champ de vitesse et de surpression en $x = 0$ et $x = e$, il vient :

$$\begin{cases} A_a = A_g + B_g & \text{et } Z_a A_a = Z_g (A_g - B_g) \\ A_g e^{-jk_g e} + B_g e^{+jk_g e} = A_m e^{-jk_m e} & \text{et } Z_g (A_g e^{-jk_g e} - B_g e^{+jk_g e}) = Z_m A_m e^{-jk_m e} \end{cases} \quad (2.96)$$

$$\quad (2.97)$$

La résolution conduit d'une part à :

$$A_g (Z_g - Z_a) = B_g (Z_g + Z_a) \quad (2.98)$$

et d'autre part à :

$$A_g e^{-jk_g e} (Z_g - Z_m) = B_g e^{+jk_g e} (Z_g + Z_m) \quad (2.99)$$

soit en les combinant :

$$e^{2jk_g e} = \frac{(Z_g - Z_m)(Z_a + Z_g)}{(Z_m + Z_g)(Z_g - Z_a)} \quad (2.100)$$

On a donc nécessairement $\sin(2k_g e) = 0$ et $\cos(2k_g e) = \pm 1$. Seule la solution -1 permet d'aboutir à une égalité pertinente (sinon on trouve $Z_m = Z_a$, ce qui est impossible). On trouve alors $Z_g^2 = Z_m Z_a$, et d'autre part $\cos(2k_g e) = -1$ conduit à :

$$2k_g e = \pi + 2n\pi \iff e = \frac{\lambda_g}{4} + n \frac{\lambda_g}{2} = \frac{(2n+1)\lambda_g}{4} \quad (2.101)$$

en posant $\lambda_g = \frac{2\pi}{k_g}$.

(d) Notons que l'onde stationnaire qui se crée dans la graisse ne transporte pas d'énergie. On peut en effet montrer à partir des équations précédentes que :

$$A_m = A_g + B_g e^{2jk_g e} = A_g - B_g = \frac{Z_a}{Z_g} A_a = \sqrt{\frac{Z_a}{Z_m}} A_a \quad (2.102)$$

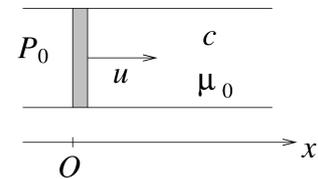
Puis :

$$\langle \Pi_i \rangle = Z_a \langle v(x=0, t)^2 \rangle = \frac{Z_a A_a^2}{2} \quad \text{et} \quad \langle \Pi_t \rangle = Z_m A_m^2 / 2 = \frac{Z_a A_a^2}{2} = \langle \Pi_i \rangle \quad (2.103)$$

Ainsi le coefficient de transmission en puissance entre l'air et le muscle vaut 1 !

2.5 Onde progressive non harmonique. Amortissement par rayonnement

On considère un tuyau sonore de section constante S et d'axe Ox s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = \infty$. Ce tuyau est rempli d'air de masse volumique μ_0 où la célérité du son vaut c . Il est fermé par un piston de masse m mobile sans frottement : à l'instant $t = 0$, on lance le piston avec une vitesse u_0 et on constate qu'il s'arrête après avoir parcouru une distance finie qu'on supposera faible devant toute distance caractéristique du problème, de telle sorte que l'abscisse du piston reste approximativement nulle.



À un instant quelconque, on note $u(t)$ la vitesse du piston. À droite, le mouvement du piston engendre une onde sonore décrite par la surpression $p_1(x, t)$ et le champ de vitesse $v_1(x, t)$. Pour simplifier, on néglige l'onde émise vers la gauche, c'est-à-dire qu'on suppose que la pression y reste uniforme, égale à P_0 .

1. Écrire les conditions aux limites sur le piston, et en exploitant la notion d'impédance d'une onde plane progressive, en déduire $u(t)$. Définir un temps caractéristique τ et commenter ses variations avec m et S .
2. En déduire l'expression de $v_1(x, t)$ et la représenter graphiquement à un instant $t > 0$ donné.
3. Établir l'expression de l'énergie de l'onde sonore à l'instant t et interpréter le résultat.

-
1. À droite du piston, on a affaire à une OPPH, donc la surpression vérifie $p_1(x, t) = Z_c v_1(x, t)$ (car onde plane progressive, même si non harmonique!). En particulier au niveau du piston $v_1(x=0, t) = u(t)$ et donc $p_1(x=0, t) = \mu_0 c u(t)$. On écrit ensuite la loi de la quantité de mouvement sur le piston dans un référentiel galiléen, projetée selon l'axe horizontal :

$$m \frac{du}{dt} = (P_0 - (P_0 + p_1(x=0, t))) S = -S \mu_0 c u(t) \iff \frac{m}{\mu_0 S c} \frac{du}{dt} + u(t) = 0 \quad (2.104)$$

soit en posant $\tau = \frac{m}{\mu_0 S c}$, $u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. En particulier, on constate que le piston retrouve un état d'équilibre au bout de quelques τ , d'autant plus grand que la masse est importante (inertie) ou que la surface est faible (plus la surface est importante, pour le piston dissipe d'énergie à l'air qu'il met en mouvement).

2. Connaissant la condition aux limites, $u(t) = v_1(x=0, t)$, on peut ensuite déterminer la vitesse pour toute position sachant qu'on recherche une onde progressive, donc $v_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$. Ainsi :

$$v_1(x, t) = v_1(x=0, t - \frac{x}{c}) = u_0 e^{-\frac{t-x/c}{\tau}} \quad (2.105)$$

à condition que $t - x/c > 0$, soit encore $x < ct$ (logique, le front d'onde se trouve en $x = ct$).

3. L'énergie acoustique s'écrit :

$$e_a = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s P_1^2 = \mu_0 v_1^2 \quad (2.106)$$

soit en intégrant entre $x = 0$ et $x = ct$:

$$E(t) = \int_0^{ct} \mu_0 u_0^2 e^{-2(t-x/c)/\tau} S dx = \mu_0 S u_0^2 \left[\frac{e^{-2(t-x/c)/\tau}}{\frac{2}{c\tau}} \right]_0^{ct} = \mu_0 S c u_0^2 \tau (1 - e^{-2t/\tau}) \quad (2.107)$$

d'où finalement en remplaçant τ :

$$E(t) = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}mu_0^2e^{-2t/\tau} = \frac{m}{2}(u_0^2 - u(t)^2) \quad (2.108)$$

L'expression obtenue est cohérente, et traduit la conservation de l'énergie entre l'instant $t = 0$ et un instant t quelconque : $\frac{1}{2}mu_0^2 = E(t) + \frac{1}{2}mu(t)^2$, où l'énergie associée au piston est purement cinétique.

2. 6 Tuyau d'orgue

Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau de longueur $\ell = 1$ m fermé à l'une de ses extrémités et ouvert à l'autre. Les pressions, température et masse volumique moyenne de l'air contenu dans le tuyau sont : $P_0 = 1,013.10^5$ Pa ; $T_0 = 290$ K ; $\mu_0 = 1,22$ kg.m⁻³. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1,4$.

1. Déterminer les fréquences ν_0 et ν_1 du fondamental et du premier harmonique.
2. À la fréquence ν_1 , on a mesuré une amplitude maximale des élongations de l'air à $a_0 = 1$ mm. En déduire l'amplitude correspondante p_0 pour la surpression et τ_0 pour la température.

-
1. Dans un tel tuyau, d'après les exercices qui précèdent, on a vu qu'une ouverture vers l'extérieur imposait un noeud de surpression. Tandis qu'une membrane fermée fixe impose un noeud de vitesse. D'autre part, on s'attend ici à avoir une onde stationnaire, d'après de telles conditions aux limites. On cherche donc la surpression sous la forme :

$$P_1(x, t) = P_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \psi) \quad (2.109)$$

À partir de la loi de la quantité de mouvement linéarisée, on en déduit le champ de vitesse correspondant :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} = +P_0 k \cos(\omega t) \sin(kx + \psi) \iff v_1(x, t) = \frac{P_0}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx + \psi) + f(t) \quad (2.110)$$

où l'on prend $f(t) = 0$ car une fonction du temps uniquement ne peut pas représenter une onde.

Notons qu'un noeud de pression s'accompagne d'un ventre de vitesse, et inversement, dans le cas d'ondes stationnaires !

En utilisant les deux conditions aux limites, il vient :

$$\begin{cases} v_1(x = 0, t) = 0 \forall t \implies \sin \psi = 0 \implies \psi = p\pi & (2.111) \\ p_1(x = \ell, t) = 0 \forall t \implies \cos(k\ell + \psi) = 0 \implies \cos(k\ell) = 0 \implies k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}^* & (2.112) \end{cases}$$

soit avec $k = \frac{2\pi\nu}{c}$, $\nu_n = \frac{c}{4\ell} + n\frac{c}{2\ell}$. On trouve numériquement $\nu_0 = 85$ Hz et $\nu_1 = 255$ Hz.

2. Comme $\frac{P_0}{\mu_0 c}$ est l'amplitude maximale de la vitesse, mais qu'elle vaut aussi $a_0\omega$ à partir de l'amplitude maximale de l'élongation, il vient

$$P_0 = a_0\omega\mu_0 c = 2\pi\mu_0 c a_0 \nu_1 = 670 \text{ Pa} \quad (2.113)$$

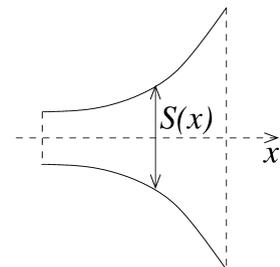
Concernant la température, on utilise le fait que la transformation est adiabatique réversible pour un gaz parfait, soit en différenciant :

$$P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste} \iff (1-\gamma)\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dT}{T} = 0 \implies \frac{p_0}{P_0}(1-\gamma) + \frac{\tau_0}{T_0} = 0 \implies T_1 = \frac{(\gamma-1)T_0 p_0}{\gamma P_0} = 0,55 \text{ K} \quad (2.114)$$

On constate que la température évolue sensiblement peu lorsque l'instrument est sollicité !

2. 7 Ondes sonores dans un pavillon de section croissante

On étudie la propagation d'ondes acoustiques planes dans un tuyau d'axe (Ox) et de section variable $S(x)$. Ce pavillon contient de l'air de masse volumique ρ_0 et de compressibilité adiabatique χ_0 .



1. En considérant une tranche de fluide contenue dans le pavillon et comprise entre les plans d'abscisse x et $x + dx$, effectuer un bilan de masse afin d'obtenir l'équation de conservation de la masse dans un tuyau de section variable.

- En déduire l'équation de propagation dans le pavillon relative à la pression acoustique $P_1(x, t)$.
- On considère la cas particulier d'un pavillon exponentiel pour lequel $S(x) = S_0 e^{mx}$ (où S_0 et m sont deux constantes positives). Comment s'écrit l'équation de propagation dans ce cas particulier ?
- On considère une OPPH se propageant dans le sens des x croissants. La pression acoustique peut se mettre sous la forme $\underline{P}_1(x, t) = p_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}x))$, où \underline{k} est *a priori* complexe.
 - Déterminer la relation de dispersion reliant \underline{k} et ω .
 - En décomposant $\underline{k} = k_r + jk_i$, interpréter l'effet de k_r et k_i sur l'OPPH. En déduire qu'il existe une pulsation de coupure ω_c en dessous de laquelle aucune propagation n'est possible. Donner son expression.
 - Dans le cas où il y a propagation, donner la vitesse de phase de l'onde $v_\varphi = \frac{\omega}{\Re(\underline{k})}$.
- Calculer la section maximale que doit avoir un pavillon de géométrie exponentielle pour transmettre les sons de fréquence supérieure à 500 Hz sachant que la section minimale du pavillon est $S_0 = 3 \text{ cm}^2$, la longueur du pavillon $x_0 = 10 \text{ cm}$ et la célérité du son dans l'air $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$.

- On effectue un bilan de masse sur une tranche d'épaisseur dx :

$$S(x)\rho(x, t + dt)dx = S(x)\rho(x, t)dx + \mu(x)S(x)v(x, t) - \mu(x+dx)S(x+dx)v(x+dx, t) \implies S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho S v}{\partial x} = 0 \quad (2.115)$$

- Écrivons à l'ordre 1 cette équation :

$$S \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial S v}{\partial x} = 0 \quad (2.116)$$

et on doit toujours vérifier la loi de la quantité de mouvement, dans les hypothèses usuelles de l'approximation acoustique :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x} \quad (2.117)$$

Enfin, avec la relation $\rho_1 = \rho_0 \chi_s P_1$, il reste à les combiner :

$$S \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} + v_1 \frac{dS}{dx} + S \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2.118)$$

grâce à l'équation thermodynamique et au bilan de masse. En dérivant temporellement et en injectant la relation issue de la loi de la quantité de mouvement :

$$S \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{dS}{dx} \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{S}{\rho_0} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = 0 \quad (2.119)$$

conduisant à l'équation :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} \quad (2.120)$$

en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$.

- On injecte l'expression de $S(x)$, sachant que $\frac{dS}{dx} = S_0 m e^{mx} = mS(x)$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + m \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} \quad (2.121)$$

On a donc un terme spatial d'ordre 1 que l'on n'a pas dans l'équation de d'Alembert usuelle.

- (a) Si on injecte la forme de solution dans l'équation précédente, il vient :

$$(-j\underline{k})^2 + m(-j\underline{k}) = \frac{1}{c^2} (j\omega)^2 \iff \underline{k}^2 + jm\underline{k} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (2.122)$$

- En décomposant \underline{k} , il vient $\underline{P}_1(x, t) = p_0 e^{k_i x} e^{j(\omega t - k_r x)}$. La partie réelle correspond à la propagation, tandis que la partie imaginaire tend à modifier l'amplitude de l'onde (à la hausse ou à la baisse). Si on cherche les solutions possibles de la relation de dispersion, en calculant le discriminant :

$$\Delta = -m^2 + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.123)$$

on constate donc qu'il existe des solutions purement réelles lorsque $\Delta > 0$, c'est-à-dire pour $\omega > \omega_c = \frac{mc}{2}$. En-dessous de cette valeur, la solution sera purement imaginaire :

$$\underline{k} = \frac{-jm \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (2.124)$$

ce qui implique qu'il n'y aura aucune propagation (on parle d'onde évanescente).

(c) Dans le cas où il y a propagation, les solutions s'écrivent :

$$\underline{k} = \frac{-jm \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (2.125)$$

donc $\Re(\underline{k}) = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega^2/c^2 - m^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$, d'où :

$$v_\varphi = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} = \boxed{\frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}} \quad (2.126)$$

5. Il faut en réalité commencer par déterminer la valeur de m qui est limite :

$$\omega > \frac{mc}{2} \iff m < \frac{2\omega}{c} = \frac{4\pi f}{c} \quad (2.127)$$

D'où une section maximale de sortie de :

$$S_{\max} = S_0 e^{m_{\max} x_0} = 19 \text{ cm}^2 \quad (2.128)$$

Ondes électromagnétiques dans le vide

Sommaire

3.1 Propagation d'ondes électromagnétiques	2
3.1.1 Équations de Maxwell dans le vide	2
3.1.2 Équations de d'Alembert des ondes électromagnétiques	2
3.1.3 Domaines de fréquences des ondes électromagnétiques	3
3.1.4 Bilan énergétique	3
3.2 Ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques (OEMPPH)	4
3.2.1 Ondes planes	4
3.2.2 Structure d'une onde plane progressive harmonique	4
3.2.3 Conséquences	5
3.2.4 Énergie transportée	5
3.3 Polarisation des OEMPPH	7
3.3.1 Présentation	7
3.3.2 Cas de la polarisation rectiligne	7
3.3.3 Obtention d'une onde polarisée rectilignement	8
3.3.4 Complément : loi de Malus (MPSI)	9
3.4 Réflexion sur un conducteur parfait	9
3.4.1 Position du problème	9
3.4.2 Modélisation	10
3.4.3 État surfacique d'un conducteur parfait	11

Questions de cours :

- Démonstration de l'équation de d'Alembert à 3D vérifiée par les champs électromagnétiques. Célérité des ondes EM dans le vide.
- Conduire un bilan énergétique, en faisant apparaître le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie. Interpréter.
- Structure d'une onde plane progressive harmonique. Conséquences : ondes transversales, structure d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique. Vecteur de Poynting et densité volumique d'énergie.
- Présentation de la polarisation, cas de la polarisation rectiligne. Présenter deux exemples d'obtention d'une onde polarisée rectilignement. Loi de Malus.
- Réflexion d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique sur un conducteur parfait. Structure de l'onde réfléchie.

Capacités exigibles du BO :

- Identifier les différents termes de l'équation locale de Poynting.
- Interpréter le vecteur de Poynting comme le vecteur densité de flux de puissance électromagnétique.
- Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
- Établir les équations de propagation.
- Utiliser la notation complexe. Représenter le trièdre $\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}$. Établir la relation entre les amplitudes des champs.
- Associer la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde. Associer le flux du vecteur de Poynting à un flux de photons en utilisant la relation d'Einstein-Planck.
- Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens (laser hélium-néon, flux solaire, téléphonie...) et les relier aux ordres de grandeur des champs électriques associés.
- Utiliser le principe de superposition d'ondes planes progressives harmoniques.
- Identifier l'expression d'une onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement.

Il est connu qu'à des champs électromagnétiques est associé le concept d'onde : on utilise le vocabulaire courant (longueur d'onde, fréquence, célérité). Nous allons nous appuyer sur les équations de Maxwell pour justifier que le champ électrique comme le champ magnétique sont solutions d'une équation de d'Alembert. Au travers de la structure d'onde plane progressive, nous verrons également comment le couplage s'opère entre les deux champs. Enfin nous étudierons certains aspects énergétiques lors d'une propagation libre comme lors d'une réflexion sur un milieu conducteur.

I. Propagation d'ondes électromagnétiques

I.1 Équations de Maxwell dans le vide

Rappelons les quatre équations de Maxwell particularisées au cas du vide, c'est-à-dire un milieu sans charges ni courants :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.1)$$

Remarquons que, comme dans le cas du câble coaxial, les deux équations avec des rotationnels couplent une dérivée temporelle d'un champ avec la dérivée spatiale de l'autre champ.

I.2 Équations de d'Alembert des ondes électromagnétiques

Pour obtenir les équations de d'Alembert associées aux ondes électromagnétiques, il est nécessaire de découpler les équations associées à chaque champ. On utilise alors une propriété fort utile des opérateurs vectoriels : $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$.

- Équation de propagation sur \vec{E} : on prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, en permutant les opérateurs de dérivées temporelle et spatiale :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \iff \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (3.3)$$

en utilisant $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ et l'équation de Maxwell-Ampère. Cela conduit à :

*

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E} \quad (3.4)$$

où l'on reconnaît une équation de d'Alembert à 3D, en introduisant la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

- équation de propagation sur \vec{B} :



Exercice

Obtenir de la même manière l'équation de propagation sur le champ magnétique.

On part de l'équation de Maxwell-Ampère, où l'on applique également l'opérateur rotationnel :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{B}) = +\varepsilon_0 \mu_0 \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \iff \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (3.5)$$

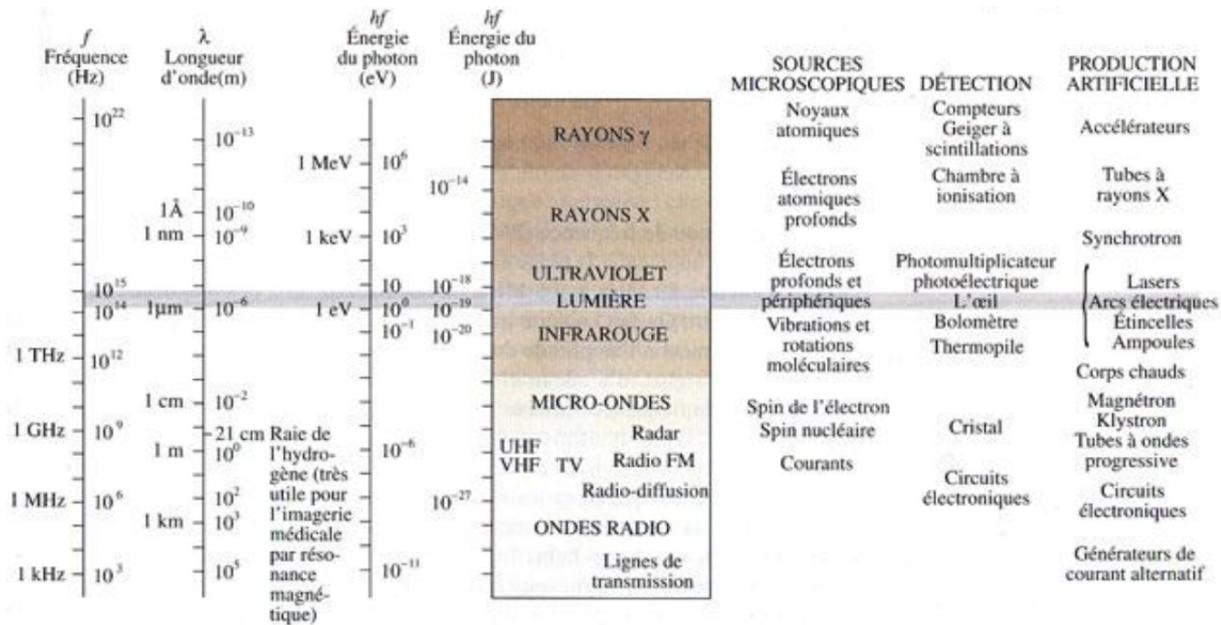
en utilisant $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ et l'équation de Maxwell-Faraday. Cela conduit également à :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B} \quad (3.6)$$

Contrairement aux ondes matérielles, cette propagation peut se faire dans le vide.

I.3 Domaines de fréquences des ondes électromagnétiques

Les sources des ondes électromagnétiques sont des charges oscillantes. Leur spectre est très large, et les applications évidemment variées :



I.4 Bilan énergétique

On veut réaliser un bilan énergétique associé au champ électromagnétique. Nous avons déjà vu, à travers d'exemples, l'expression des densités d'énergie associées aux champs électriques et magnétiques. On va généraliser l'étude, en partant des équations de Maxwell et de l'information que la puissance volumique cédée aux porteurs de charges vaut $\vec{j} \cdot \vec{E}$. Exprimons donc \vec{j} que l'on multiplie scalairement par \vec{E} :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (3.7)$$

* Le dernier terme se réécrit $-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \right)$ correspondant à la dérivée temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique. Conformément à l'allure du bilan énergétique pour des ondes acoustiques, on cherche alors à faire apparaître la divergence d'un vecteur de Poynting, mais également la dérivée temporelle de la densité volumique d'énergie magnétique : il faut donc introduire l'équation de Maxwell-Faraday. Pour y parvenir, aidons-nous d'une formule (non exigible) d'analyse vectorielle :

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{C}) = (\text{rot} \vec{A}) \cdot \vec{C} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{C} \quad (3.8)$$

soit :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \left(\text{div}(\vec{B} \wedge \vec{E}) + \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \right) = -\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \right) \quad (3.9)$$

* soit finalement :

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad w_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (3.10)$$

On obtient ainsi une équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique où w_{em} est la densité volumique d'énergie électromagnétique et $\vec{\Pi}$ est le vecteur de Poynting associé à la propagation d'énergie. Sa signification est identique à ce que l'on a rencontré pour les ondes acoustiques, la quantité d'énergie électromagnétique qui traverse une surface élémentaire $d\vec{S}$ pendant dt vaut $\delta^2 \mathcal{E} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt$. Il s'agit donc d'un **vecteur densité de flux de puissance électromagnétique**.

On peut évidemment faire un parallèle avec les équations usuelles de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (3.11)$$

en reliant $\vec{\Pi}$ à un vecteur densité de courant \vec{j} . Il y a un second membre traduisant que l'énergie électromagnétique varie de deux manières dans un volume donné de l'espace :

- soit du fait du flux sortant d'énergie électromagnétique associé au vecteur de Poynting ;
- soit du fait de l'énergie cédée à la matière par les champs.

Dans le vide, on a donc :

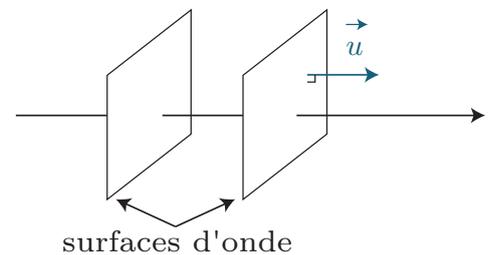
$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0 \quad (3.12)$$

traduisant l'absence de dissipation d'énergie dans l'espace.

II. Ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques (OEMPPH)

II.1 Ondes planes

Lorsqu'une onde se propage, une **surface d'onde** est un ensemble de points où le champ \vec{E} ou \vec{B} est uniforme à un instant t donné. On a déjà rencontré le cas des ondes sphériques et des ondes planes. Une onde est plane si ses surfaces d'onde sont des plans, perpendiculaires à la direction de propagation associée au vecteur \vec{u} . Dans ce cas, deux plans d'ondes différents sont nécessairement parallèles, car s'ils se coupaient, on aurait deux valeurs différentes de \vec{E} au même point.



Si on définit une base orthonormée directe avec $\vec{e}_x = \vec{u}$, \vec{E} et \vec{B} ne dépendent que de la coordonnée x . Dans ce cas $\vec{E} = E_x(x, t)\vec{e}_x + E_y(x, t)\vec{e}_y + E_z(x, t)\vec{e}_z$ (de même pour \vec{B}) et chaque composante vérifie une équation de d'Alembert 1D :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (3.13)$$

avec $s = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$. La solution générale est $s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$. En notant que $x = \vec{r} \cdot \vec{e}_x = \vec{r} \cdot \vec{u}$, on peut généraliser pour une direction \vec{u} quelconque :

$$s(\vec{r}, t) = f\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c}\right) \quad (3.14)$$

correspondant à la superposition de deux ondes planes progressives se propageant dans des directions opposées $\pm \vec{u}$. La solution générale de l'équation de d'Alembert à 3D est alors une superposition d'OPP se propageant dans toutes les directions \vec{u} .

Dans la suite, on étudie une onde électromagnétique plane progressive harmonique, qui modélise localement une onde électromagnétique vue à grande distance de la source, c'est-à-dire à une distance $D \gg \lambda$.

II.2 Structure d'une onde plane progressive harmonique

a) Expression

Toutes les composantes du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) sont, dans le cadre d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique (OEMPPH) se propageant dans la direction \vec{u} , de la forme :

$$s(M, t) = s_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c}\right) + \varphi\right) = s_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right) \quad (3.15)$$

avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$ le vecteur d'onde, et des amplitudes et déphasages différents pour chaque composante. En particulier, en notation complexe, on a alors :

$$\vec{E} = E_{0x} e^{j\varphi(E_x)} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_x + \dots = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (3.16)$$

où $\underline{\vec{E}}_0$ correspond à l'amplitude complexe (vectorielle) du champ électrique.

b) Action des opérateurs

On s'intéresse à l'action des opérateurs usuels sur une OEMPPH. On note $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$, ainsi :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad (3.17)$$

La dérivation temporelle conduit trivialement à $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E}$. L'opérateur divergence quant à lui :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} (E_{0x} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) + \frac{\partial}{\partial y} (E_{0y} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) + \frac{\partial}{\partial z} (E_{0z} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) \quad (3.18)$$

$$* \quad = (-jk_x E_{0x} - jk_y E_{0y} - jk_z E_{0z}) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -j \vec{k} \cdot \vec{E} \quad (3.19)$$

Par la même méthode, on peut montrer que :

$$\text{rot } \vec{E} = -j \vec{k} \wedge \vec{E} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad (3.20)$$



Ces relations ne sont valables que pour une OEMPPH, et non pour une onde progressive quelconque ET à la condition de choisir la convention en $+j\omega t$!

II.3 Conséquences

i) Ondes transversales

Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux conduisent alors pour une OEMPPH à :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \implies \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.21)$$

Comme une OEMPP se décompose avec Fourier en somme d'OEMPPH, les résultats précédents sont toujours valables. Cela justifie que les ondes électromagnétiques sont des ondes **transversales** (ou transversales), car de direction perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{k} = k \vec{u}$.

ii) Structure d'une OEMPPH

On peut même aller plus loin en se servant de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff -j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \iff \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (3.22)$$

* Or le vecteur \vec{k} étant réel, comme ω , cette relation est aussi vérifiée pour les champs réels. Retenons que pour une OEMPPH :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \quad \text{et} \quad \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \quad (3.23)$$

Via l'équation de Maxwell-Ampère, on peut également montrer de manière équivalente que $\vec{E} = c \vec{u} \wedge \vec{B}$.

Structure d'une OEMPPH

Pour une onde électromagnétique plane progressive et harmonique, se propageant dans le vide dans la direction \vec{u} , les champs électriques et magnétiques sont perpendiculaires entre eux, et perpendiculaires à la direction de propagation, et $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct vérifiant :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \quad (3.24)$$

Par décomposition en série de Fourier, une OEMPPH vérifie les mêmes propriétés.

II.4 Énergie transportée

a) Densité volumique d'énergie

Calculons la densité volumique associée au champ magnétique pour une OEMPPH :

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\left(\frac{E}{c}\right)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = w_E \quad (3.25)$$

On constate ainsi l'équipartition de l'énergie entre les formes électriques et magnétiques.



Lorsqu'on manipule les grandeurs énergétiques telle que l'énergie, il faut IMPÉRATIVEMENT utiliser les représentations réelles des champs !

Ainsi au total, la densité volumique d'énergie électromagnétique vaut :

$$w_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 \quad (3.26)$$

dans le cas d'une OEMPPH.

b) Vecteur de Poynting et vitesse de transport de l'énergie électromagnétique

Exprimons le vecteur de Poynting pour l'OEMPPH considérée :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c} \left((\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{u} - (\vec{E} \cdot \vec{u}) \vec{E} \right) = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u} \quad (3.27)$$

* On constate ainsi que le vecteur de Poynting est dirigé selon \vec{u} , la direction de propagation de l'onde est la même que la direction de propagation de l'énergie, tandis que l'on peut identifier une propriété supplémentaire, en rappelant que $w_{em} = \varepsilon_0 E^2$:

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u} = w_{em} c \vec{u} \quad (3.28)$$

à rapprocher de la structure générale $\vec{j} = \rho \vec{v}$ avec ρ une densité de grandeur physique (masse volumique, densité de charge, densité énergétique) et \vec{v} la vitesse de propagation associée : l'énergie électromagnétique se propage à la célérité c de l'onde.

c) Ordres de grandeur

Pour quelques exemples courants, il est exigible de connaître certains ordres de grandeur. On se sert pour cela en particulier de la puissance moyenne transportée par une OEMPPH :

$$P = \iint_{(S)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \langle \vec{\Pi} \rangle S = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle S \quad (3.29)$$

soit en notant E_0 l'amplitude du champ électrique, $\langle E^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2}$, d'où

$$E_0 = \sqrt{\frac{2P}{\varepsilon_0 c S}} = \sqrt{2\mu_0 c \frac{P}{S}} \quad (3.30)$$

tandis que l'amplitude du champ magnétique associé est $B_0 = \frac{E_0}{c}$. Prenons quelques exemples :

- laser hélium néon de laboratoire de puissance $P = 1 \text{ mW}$ de rayon typique 1 mm $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{P}{S} \sim 10^3 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, d'où $E_0 \sim 9 \cdot 10^2 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ et $B_0 \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ T}$;
- soleil : sur Terre, on reçoit une puissance surfacique de $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \simeq 1,3 \cdot 10^3 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ (imaginez la puissance émise sachant que l'on est distant de $150 \cdot 10^6 \text{ km}$...), ce qui conduit aux mêmes ordres de grandeur que le laser He-Ne ;
- un téléphone portable émet des ondes dont l'ordre de grandeur est de 1 W . Ainsi à 1 cm , $\Pi \simeq 800 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Notons que les antennes-relais ont une puissance de l'ordre de 10 à 50 W . À 10 m , $\pi \sim \frac{P}{\pi r^2} \sim 0,16 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, bien plus faible qu'un téléphone collé à notre oreille...

On peut associer au flux d'énergie $\iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$ un flux de photons :

$$P = \Pi S = \frac{\delta N h \nu}{dt} \iff \frac{\delta N}{dt} = \frac{P}{h \nu} = \frac{P \lambda}{hc} \quad (3.31)$$

soit pour un laser Hélium-Néon où $\lambda = 632 \text{ nm}$, le débit de photons vaut :

$$\frac{\delta N}{dt} = 3,1 \cdot 10^{15} \text{ photons/s} \quad (3.32)$$

III. Polarisation des OEMPPH

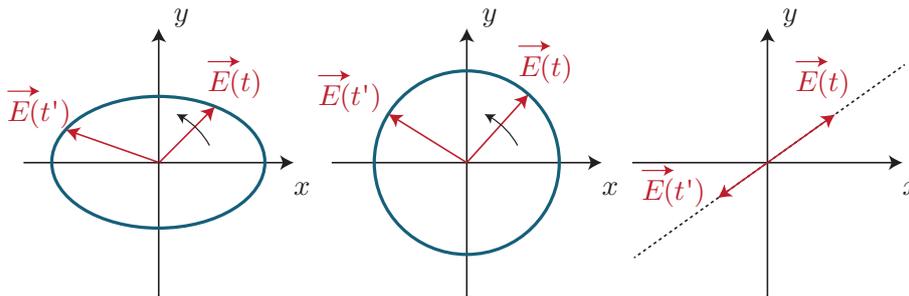
III.1 Présentation

On dit qu'une onde est **polarisée** si, dans un plan d'onde donné, l'extrémité de $\vec{E}(M, t)$ décrit une courbe fermée. Soit une OEMPPH se propageant selon $+\vec{e}_z$, on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \vec{e}_y \quad (3.33)$$

car $\vec{E} \cdot \vec{e}_z = 0$.

Dans le cas général, le vecteur \vec{E} décrit alors une polarisation elliptique (gauche ou droite selon que l'on a une rotation dans le sens trigonométrique ou horaire). Dans le cas où $\varphi_x = 0$ et $\varphi_y = \pm \frac{\pi}{2}$ ET $E_{0x} = E_{0y}$, on dit que la polarisation est circulaire. Et enfin dans le cas où $\varphi_x = 0$ et $\varphi_y = 0$ ou π , la polarisation est rectiligne, comme illustré sur les schémas ci-dessous :



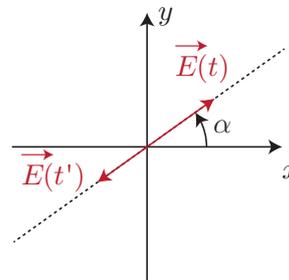
III.2 Cas de la polarisation rectiligne

Intéressons-nous plus particulièrement au cas de la polarisation rectiligne, la plus simple et une de celle qui intervient énormément en physique (écrans à cristaux liquides, polarisation de certaines ondes réfléchies, première technologie de lunettes 3D, ...)

Le champ électrique s'écrit alors :

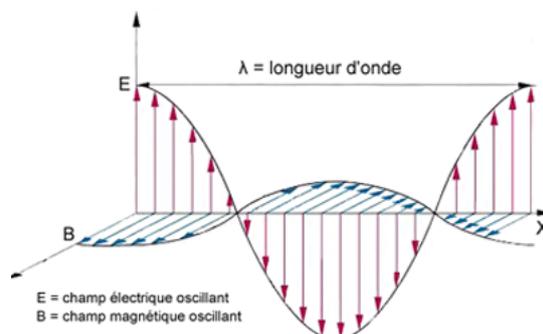
$$\vec{E} = \cos(\omega t - kz) (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y) \quad (3.34)$$

La direction d'oscillation du champ électrique dans un plan d'onde est donc fixée avec un angle α vérifiant $\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$.



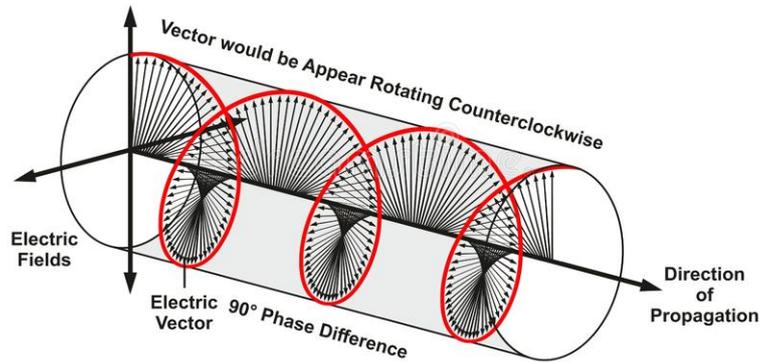
Ne pas confondre la direction de propagation, ici \vec{e}_z , avec la direction de la polarisation.

Si on représente l'onde électromagnétique totale au cours du temps, elle fait apparaître deux directions bien définies pour le vecteur \vec{E} et \vec{B} :



Par opposition, représentons l'allure du champ électrique pour une onde polarisée circulairement :

Circular Polarization of an Electromagnetic Wave

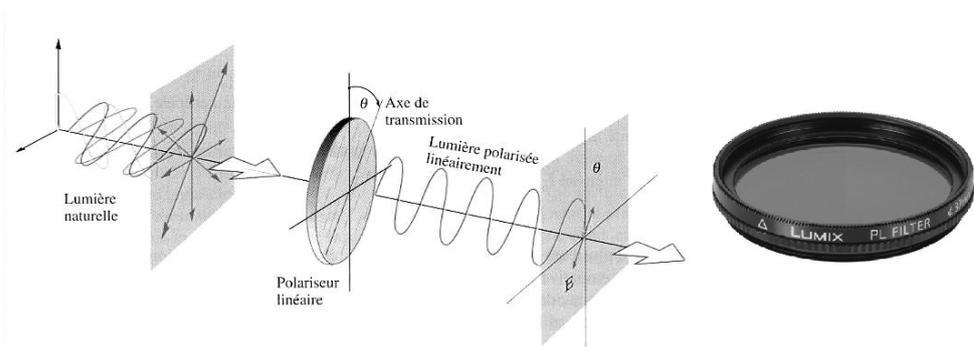


III.3 Obtention d'une onde polarisée rectilignement

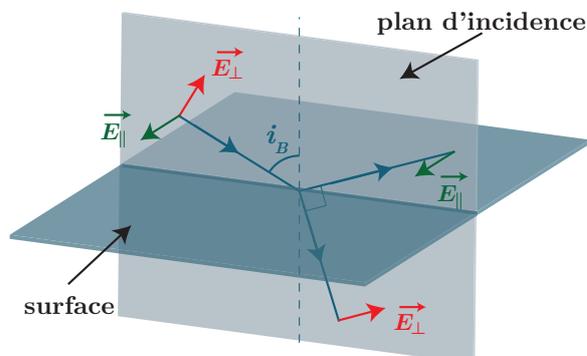
Naturellement, l'onde émise par le Soleil ou une lampe à incandescence, par exemple, n'est pas polarisée, ce qui signifie concrètement que le champ électrique, dans un plan d'onde, possède des déphasages φ_x et φ_y aléatoires. Néanmoins, il est possible de la polariser rectilignement grâce à différents dispositifs :

En pratique, il s'agit un film Polaroid, composé de polymères étirés dans une direction spécifique selon laquelle le champ électrique va être complètement absorbé : la direction perpendiculaire n'est alors pas affectée.

- polarisation par un **polariseur dichroïque** (le **dichroïsme est la propriété d'un corps d'absorber sélectivement une des deux composantes transverses d'un faisceau incident**) ; le fait d'en placer deux en série permet alors de moduler l'intensité transmise voire l'annuler si les directions sont orthogonales ;



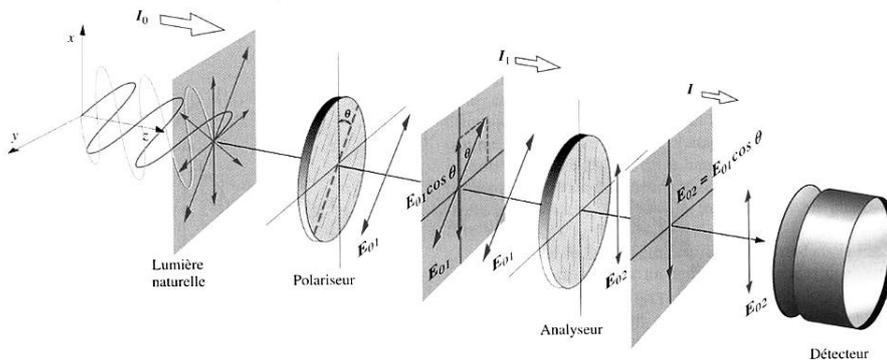
- polarisation par **réflexion vitreuse** : à l'interface entre deux milieux, la lumière transmise et réfléchi dépend de la polarisation (tangentielle ou orthogonale au plan d'incidence). Cela explique par exemple l'intérêt de porter des lunettes polarisées lorsqu'on pratique le ski ou des sports nautiques, afin d'atténuer les ondes lumineuses réfléchies. Pour un angle d'incidence i_B appelé angle de Brewster, l'onde réfléchi est polarisée rectilignement :



- polarisation par **diffusion** : lorsqu'une lumière non polarisée traverse un milieu diffusant (avec de petites particules qui réémettent de la lumière dans toutes les directions), l'onde réémise dans une direction perpendiculairement à la direction de propagation est polarisée rectilignement.

III.4 Complément : loi de Malus (MPSI)

Un polariseur peut permettre également de détecter si une onde est polarisée : on dit alors qu'il joue le rôle d'**analyseur**. Lorsqu'on change l'orientation de l'analyseur, il faut retenir que si l'on arrive à éteindre entièrement la lumière en sortie, on a affaire à une onde polarisée rectilignement.



On peut exprimer le champ électrique en sortie de l'analyseur assez simplement par projection. Considérons un polariseur qui polarise rectilignement le champ électrique, de norme E_{01} , avec une direction d'angle θ par rapport à la verticale. L'analyseur possédant une direction verticale, il ne laisse passer que la composante $E_{01} \cos \theta$ du champ incident. L'intensité lumineuse en sortie étant définie par $I = \langle \|\vec{E}^2\| \rangle$, en sortie de l'analyseur elle vaut :

$$I = \langle \|\vec{E}^2\| \rangle = E_{01}^2 \cos^2 \theta \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \rangle = \frac{E_{01}^2}{2} \cos^2 \theta = I_0 \cos^2 \theta \quad (3.35)$$

connue sous le nom de **loi de Malus**.

Propriété : loi de Malus

L'intensité I transmise par l'analyseur éclairé par une lumière polarisée rectilignement suit la **loi de Malus** :

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (3.36)$$

où θ est l'angle entre la direction de la polarisation rectiligne et le vecteur \vec{m} de l'analyseur, et I_0 l'intensité maximale transmise.

Dans le cas où $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, le polariseur et l'analyseur sont croisés, et l'intensité lumineuse s'annule (sous réserve de défauts du matériau).

La lumière polarisée rectilignement joue un rôle dans de nombreuses applications du quotidien. Citons entre autres :

- L'observation de films en 3D : deux polariseurs de directions propres perpendiculaires au niveau de chaque œil permet de capter deux images différentes qui seront interprétées comme une marque de profondeur ;
- certaines lunettes (en particulier les lunettes de soleil) ou filtres de photographes permettent de supprimer la lumière polarisée par réflexion ;
- Les écrans à cristaux liquides (calculatrices,...) : schématiquement on utilise un polariseur et un analyseur fixes partageant la même direction propre (apparence claire), mais dont l'angle de l'un d'entre eux peut être modifiée à l'aide d'une tension électrique (apparence sombre).

On utilise depuis d'autres types de matériaux pour ces lunettes, basées sur la polarisation circulaire, ce qui permet de ne pas être astreint à une direction particulière de la tête.

IV. Réflexion sur un conducteur parfait

IV.1 Position du problème

Dans cette section du cours, le milieu dans lequel se propage l'onde électromagnétique n'est plus illimité, car l'OEMPPH rencontre un objet métallique. On modélise la situation par un conducteur dit

« parfait » occupant le demi-espace $z > 0$, et on étudie ce qu'il se passe lorsqu'une OEMPPH se propage selon $+\vec{e}_z$ et est polarisée rectilignement selon \vec{e}_x :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \quad (3.37)$$

Le champ magnétique associé se calcule facilement avec la formule (valable pour une onde plane progressive, rappelons-le) :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \quad (3.38)$$

On étudie l'effet de la présence du plan conducteur sur l'onde électromagnétique.

IV.2 Modélisation

a) Notion de conducteur parfait

Définissons tout d'abord ce qu'on entend par « conducteur parfait ». Il s'agit d'un conducteur dont la conductivité γ tend vers $+\infty$. Cela a pour conséquences :

- * ■ d'après la loi d'Ohm, le vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ne reste borné que si \vec{E} tend vers 0 ;
- * ■ à partir de l'équation de Maxwell-Faraday, on trouve alors $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que le champ magnétique est indépendant du temps, ce qui ne peut représenter une onde. Donc $\vec{B} = \vec{0}$;
- * ■ enfin à partir de l'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ conduit donc à $\vec{j} = \vec{0}$.

Retenons donc que, dans un conducteur parfait défini par $\gamma \rightarrow +\infty$, \vec{j} , \vec{E} et \vec{B} sont nuls. Ainsi les charges électriques et les courants électriques, s'ils existent, sont nécessairement localisés à la surface du métal.

b) Relations de passage

Rappelons les relations de passage à l'interface entre deux milieux de propriétés différentes. En notant $\sigma(M, t)$ et $\vec{j}_s(M, t)$ les densités surfaciques de charge et de courant présentes sur une surface S , les champs vérifient les relations de passage :

$$\vec{E}(M_2 \approx M, t) - \vec{E}(M_1 \approx M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (3.39)$$

$$\text{et } \vec{B}(M_2 \approx M, t) - \vec{B}(M_1 \approx M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (3.40)$$

avec des points M_1 et M_2 infiniment proches d'un point M appartenant à la surface S et le vecteur $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur normal à S orienté de M_1 vers M_2 .

Cela a pour conséquence que la composante tangentielle du champ électrique est continue au passage de l'interface, tout comme la composante normale du champ magnétique.

c) Existence et calcul du champ électrique de l'onde réfléchi

D'après la relation de passage pour le champ électrique, la composante tangentielle du champ électrique est continue en $z = 0$. Or dans le conducteur, il est nul, ce qui implique $\vec{E}(z = 0^-, t) = \vec{0}$ incompatible avec l'écriture du champ initialement défini. Cela implique l'existence d'une onde réfléchi pour satisfaire à cette condition aux limites, que l'on peut supposer de même pulsation. On le recherche alors sous la forme :

$$\vec{E}_r = E_{rx} \cos(\omega t + kz + \varphi_x) \vec{e}_x + E_{ry} \cos(\omega t + kz + \varphi_y) \vec{e}_y \quad (3.41)$$

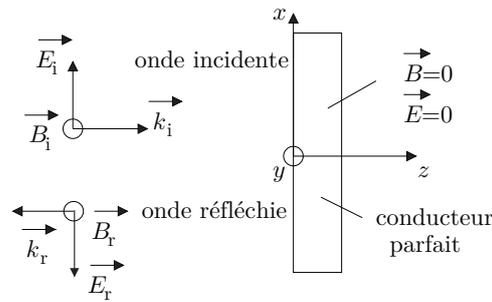
car l'onde est transverse et se propage dans le sens des z décroissants.

En écrivant que le champ électrique, tangentiel au plan, doit s'annuler en $z = 0$ à tout instant, il vient :

$$\begin{cases} E_{rx} \cos(\omega t + \varphi_x) + E_0 \cos \omega t = 0 & (3.42) \\ E_{ry} \cos(\omega t + \varphi_y) = 0 & (3.43) \end{cases}$$

- * conduisant à $E_{ry} = 0$ et $E_{rx} = E_0$ avec $\varphi_x = \pi$ ou de manière équivalente $\varphi_x = 0$ et $E_{rx} = -E_0$, donc le champ réfléchi vaut finalement :

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x \implies \vec{B}_r = \frac{-\vec{e}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y \quad (3.44)$$



On peut interpréter l'existence d'un champ électrique réfléchi partant du fait que le champ électrique incident met en vibration les électrons libres de la surface, qui réémettent à leur tour des ondes électromagnétiques à la même fréquence que l'onde incidente. On pourrait également supposer l'existence d'une onde transmise, du fait de cette interprétation microscopique, nous verrons qu'elle existe, mais sur une épaisseur très faible (cf. O4). Cette interprétation suggère donc l'existence de courants surfaciques.

Notons également que cette modélisation dépendra de la fréquence. En particulier pour des fréquences jusqu'aux UV, les conducteurs sont souvent de très bons miroirs, mais au-delà une onde transmise pourra exister.

d) Onde électromagnétique résultante

Si on somme les ondes incidentes et réfléchies :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \left(\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz) \right) \vec{e}_x = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x \quad (3.45)$$

et

$$\vec{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} \left(\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz) \right) \vec{e}_y = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y \quad (3.46)$$

La structure du champ résultant est celle d'une onde stationnaire, il n'y a pas de propagation. On observe qu'en un point donné, le champ magnétique et le champ électrique sont en quadrature, tandis que les nœuds du champ électrique ($z = -n\frac{\lambda}{2}, n \in \mathbb{N}$) correspondent aux ventres du champ magnétique et réciproquement.

e) Aspects énergétiques

En exprimant le vecteur de Poynting du champ résultant, il vient :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \cos(kz) \sin(kz) \vec{e}_z \quad (3.47)$$

En tout point, on a donc $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$, en accord avec le caractère stationnaire de l'onde.

Cela peut se confirmer en calculant le vecteur de Poynting des ondes incidentes et réfléchies :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \left\langle \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \quad (3.48)$$

et de même $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$. Le coefficient de réflexion en puissance vaut donc :

$$R = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle} = 1 \quad (3.49)$$

Cela traduit le fait que l'énergie de l'onde incidente est totalement réfléchi : le conducteur parfait est équivalent au modèle de miroir parfait.

IV.3 État surfacique d'un conducteur parfait

a) Courant surfacique

Comme le champ électrique est tangentiel à la surface du conducteur, il n'y a pas de charges surfaciques d'après la relation de passage. Néanmoins il subsiste un courant surfacique que l'on peut déterminer grâce à la relation de passage :

$$\vec{B}(0^+, t) - \vec{B}(0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s(0, t) \wedge \vec{e}_z = 0 - \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y \quad (3.50)$$

soit en posant $\vec{j}_s = j_{s,x} \vec{e}_x + j_{s,y} \vec{e}_y$, il vient :

$$-\mu_0 j_{s,x} \vec{e}_y + \mu_0 j_{s,y} \vec{e}_x = -\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y \quad (3.51)$$

donc $j_{s,y} = 0$ et il vient :

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_x \quad (3.52)$$

cohérent avec l'interprétation physique initiale : les électrons libres à la surface du matériau sont mis en mouvement par le champ électrique incident, de direction \vec{e}_x et de pulsation ω .

b) Pression de radiation

Le fait qu'une onde électromagnétique se réfléchisse à la surface du conducteur implique l'existence d'une force appelée **pression de radiation**. Bien que d'intensité très faible, cette force intervient régulièrement dans des systèmes micro-métriques où un faisceau laser se réfléchit. Pour la déterminer, adoptons un point de vue corpusculaire, où des photons de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{h}{\lambda} \vec{e}_z = \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z$ (avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$) se réfléchit à l'interface en $z = 0$. Après réflexion, leur quantité de mouvement devient alors $\vec{p}' = -\frac{h\nu}{c} \vec{e}_z$.

Réalisons un bilan de quantité de mouvement dans un volume de contrôle de longueur $dz = c dt$ entourant une surface dS du conducteur entre $z = -dz$ et $z = 0^+$. On a vu que le débit de photons s'écrivait $\frac{\delta N}{dt} = \frac{P}{h\nu}$ avec $P = \Pi dS$.



Exercice

À partir des éléments introduits, déterminer la pression exercée par les photons à la surface du conducteur en fonction de $\Pi = \langle \vec{\Pi}_i \rangle$ et c .

À l'instant t , la quantité de mouvement du système vaut :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{\text{paroi}}(t) + \vec{p}_{\text{photons}}(t) \quad (3.53)$$

et l'instant $t + dt$, l'ensemble des photons qui vont entrer dans le volume de contrôle entre t et $t + dt$ sont réfléchis et voient leur quantité de mouvement varier de $\frac{2h\nu}{c}$ selon $-\vec{e}_z$

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{\text{paroi}}(t + dt) + \left(\vec{p}_{\text{photons}}(t) - \delta N \times 2 \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z \right) \quad (3.54)$$

Donc en écrivant la loi de la quantité de mouvement à ce système, isolé, et en passant à la limite :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} = \frac{\partial \vec{p}_{\text{paroi}}}{\partial d} - \frac{\delta N}{dt} 2 \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z \quad (3.55)$$

conduisant à :

$$\frac{\partial \vec{p}_{\text{paroi}}}{\partial d} = \frac{\delta N}{dt} 2 \frac{h\nu}{c} \vec{e}_z = P_{\text{rad}} dS \vec{e}_z \quad (3.56)$$

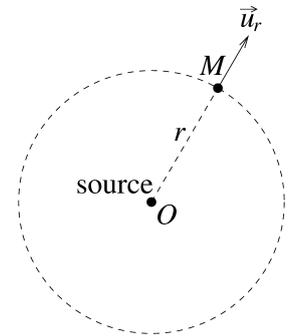
$$\text{avec } P_{\text{rad}} = \frac{\delta N}{dS dt} \frac{h\nu}{c} = \frac{P}{h\nu dS} \frac{2h\nu}{c} = \frac{2\Pi}{c}$$

Pour un faisceau laser de puissance surfacique $\Pi \simeq 10^3 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, la pression équivalente est très faible et vaut $P_{\text{rad}} \simeq 10^{-5} \text{ Pa}$.

Exercices

3. 1 Source isotrope

Une source située à l'origine de l'espace crée un champ électromagnétique, de telle sorte qu'en coordonnées sphériques (cf. figure), le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ soit radial et ne dépende spatialement que de r : $\vec{\Pi}(M) = \Pi(r) \vec{e}_r$. Il n'y a pas de matière en dehors de la source.



1. Exprimer la puissance rayonnée P_r à travers la sphère de centre O et de rayon r en fonction de la norme Π du vecteur de Poynting.
2. (a) On considère le volume situé entre deux sphères de centre O et de rayon respectifs r_1 et r_2 . En admettant que l'énergie électromagnétique dans ce volume reste constante, à l'aide d'un bilan d'énergie électromagnétique, montrer que la puissance rayonnée est la même à travers les deux sphères.
(b) En déduire, à une constante multiplicative près, la loi de dépendance spatiale de Π .
(c) L'énergie que la terre reçoit du soleil est sous forme de rayonnement électromagnétique. Si la distance terre-soleil variait d'un facteur 2, comment varierait l'énergie reçue par la terre ?
3. On suppose que les champs électriques et magnétiques sont orthogonaux et de norme telle que $B = E/c$ où c est la vitesse de la lumière. Comment décroissent les normes des champs électrique et magnétique en fonction de r ?
4. On considère une ampoule électrique de puissance $P = 20$ W (puissance électrique reçue par l'ampoule). Cette puissance est quasiment intégralement rayonnée sous forme d'ondes électromagnétiques. On suppose que le champ rayonné suit les hypothèses décrites précédemment.
 - (a) Calculer la norme du vecteur de Poynting à 1 m de l'ampoule.
 - (b) En déduire la norme des champs électrique et magnétique.
 - (c) Comparer au champ magnétique terrestre et au champ électrique entre les deux bornes d'une prise électrique.

-
1. On a simplement $P_r = \iint_{(S)} \vec{\Pi}(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{S} = \Pi(r) \iint_{(S)} dS = \Pi(r) 4\pi r^2$.
 2. (a) Si on considère comme système la couche sphérique entre $r = r_1$ et $r = r_2$, son énergie est constante, donc avec un bilan d'énergie on a simplement $P_r(r = r_1) - P_r(r = r_2) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0$, d'où $\pi(r)r^2 = \text{cste}$.
 - (b) Donc $\pi(r) \propto \frac{1}{r^2}$.
 - (c) D'un facteur 4.
 3. Par définition $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, donc en norme $\Pi = \frac{EB}{\mu_0}$ car les deux vecteurs sont orthogonaux. Avec la relation donnée, il vient $\Pi(r) = \frac{E^2}{\mu_0 c}$, donc $E(r) \propto \frac{1}{r}$, et il en est de même pour $B(r)$.
 4. (a) On a $P = 4\pi r^2 \Pi(r)$, d'où à $r_1 = 1$ m, $\Pi(r_1) = 1,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.
(b) Ainsi la norme du champ électrique vaut $E(r_1) = \sqrt{\mu_0 c \Pi(r_1)} = 25 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, puis $B(r_1) = E(r_1)/c = 8 \cdot 10^{-8} \text{ T}$.
(c) En comparaison, le champ magnétique terrestre d'odg $3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ est donc approximativement 1000 fois plus important. Concernant le champ électrique entre les deux bornes d'une prise électrique, on a en odg $E = \frac{U}{d}$ où $U \sim 230 \text{ V}$ et $d \sim 3 \text{ cm}$, donc $E \sim 8 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, là aussi plus grand que ce que l'on a trouvé d'un facteur environ 100.

3.2 Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres C_1 et C_2 infinis d'épaisseur très faibles, de rayons a et $b > a$, parcourue par des intensités I et $-I$. On note V_1 et V_2 les potentiels des deux cylindres et on néglige toute chute de tension le long de la ligne. On se place dans le cadre de l'ARQS.

- Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ entre les deux conducteurs.
- On admet que le champ électrique est de la forme suivante : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$. Montrer que $E(r) = \frac{k}{r}$, où k est une constante.
- En déduire $\vec{E}(M)$ en fonction de V_1, V_2, a, b et r .
- Calculer le vecteur de Poynting entre les deux conducteurs.
- En déduire la puissance électromagnétique rayonnée à un travers une section du cylindre en fonction de V_1, V_2 et I .

- Théorème d'Ampère classique $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.
- Si on applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r et hauteur h quelconque, on peut alors écrire :

$$E(r)2\pi r h = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (3.57)$$

Donc $E(r) \propto \frac{1}{r}$.

- On utilise ensuite le fait que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ que l'on intègre :

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = V_2 - V_1 = \int_1^2 -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -k \int_a^b \frac{dr}{r} = -k \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (3.58)$$

d'où :

$$k = \frac{V_1 - V_2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (3.59)$$

- On applique la définition :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{(V_1 - V_2)I}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \vec{e}_z \quad (3.60)$$

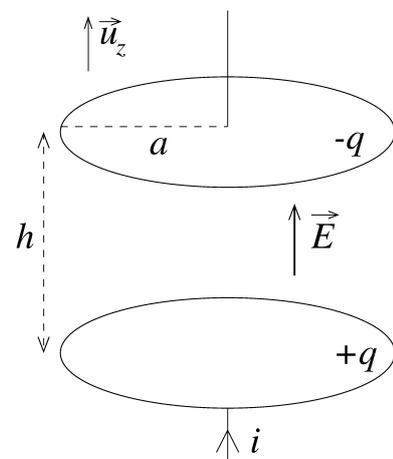
- On écrit alors le flux du vecteur de Poynting au travers la section du cylindre :

$$\mathcal{P} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot dS \vec{e}_z = \int_a^b \Pi 2\pi r dr = (V_1 - V_2)I \quad (3.61)$$

3.3 Condensateur dans l'ARQS

On considère un condensateur plan cylindrique, de rayon a et de hauteur h . Le vide règne entre les plaques. On note $q(t)$, sa charge, $U(t)$ sa tension, S sa section.

On néglige les effets de bord : entre les plaques, le champ est le même que si les plaques étaient infinies, soit $\vec{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$, où σ est la densité surfacique de charge.



- En étudiant les symétries et invariances, montrer que le champ magnétique est de la forme $\vec{B}(M) = B(r, z, t) \vec{e}_\theta$.
- (a) Pourquoi dans l'équation de Maxwell-Ampère, le terme en $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ne peut-il pas être négligé, bien que l'on soit dans le cadre de l'ARQS ?

- (b) En utilisant le théorème d'Ampère généralisé (forme intégrale de l'équation de Maxwell Ampère), déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B} .
3. (a) Calculer le vecteur de Poynting.
 (b) En déduire la puissance rayonnée à travers le cylindre dessiné par le condensateur.
4. (a) Calculer la densité d'énergie électrique u_e et en déduire l'énergie électrique \mathcal{E}_e comprise dans le cylindre.
 (b) Calculer la densité d'énergie magnétique u_m et en déduire l'énergie magnétique \mathcal{E}_m comprise dans le cylindre.
5. Montrer que le rapport $\frac{\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_e}$ est négligeable dans le cadre de l'ARQS et en déduire l'énergie électromagnétique \mathcal{E}_{em} comprise dans le cylindre.
6. Que vaut la puissance cédée par le champ électromagnétique entre les plaques ?
7. Vérifier le bilan de puissance électromagnétique.

1. Soit un point M quelconque à l'intérieur du condensateur. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie des distributions de charge et de courant. Par conséquent, le champ magnétique est orthogonal à ce plan, donc dirigé selon \vec{e}_θ . D'autre part du fait de l'invariance par rotation d'angle θ , \vec{B} n'en dépend pas, d'où $\vec{B} = B(r, z, t)\vec{e}_\theta$.
2. (a) Tout simplement car à l'intérieur du condensateur, $\vec{j} = \vec{0}$, donc la seule source de champ magnétique est liée à la variation temporelle de champ électrique.
 (b) Le théorème d'Ampère généralisé s'écrit, à l'aide du théorème de Stokes :

$$\int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_{(S)} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (3.62)$$

Plaçons-nous sur un contour circulaire de rayon r , à la cote z à l'intérieur du condensateur. On a alors $\vec{j} = \vec{0}$, mais l'autre terme dans le calcul du flux est non nul :

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \frac{d\sigma}{dt} \pi r^2 \implies B(r) = \mu_0 \frac{d\sigma}{dt} \frac{r}{2} = \frac{\mu_0 i r}{2S} \quad (3.63)$$

en notant $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma S}{dt}$.

3. (a)

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{d\sigma}{dt} \frac{r}{2} \vec{e}_r \quad (3.64)$$

- (b) Calculons alors la puissance rayonnée à travers le cylindre dessiné par le condensateur :

$$\mathcal{P} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = -\sigma \frac{d\sigma}{dt} \frac{a}{2\varepsilon_0} 2\pi a h = -\sigma \frac{d\sigma}{dt} \frac{\pi a^2 h}{\varepsilon_0} = -\frac{iq}{C} \quad (3.65)$$

en notant $C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$ et $q = \sigma S$.

4. (a) $u_e = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} = \frac{\sigma^2(t)}{2\varepsilon_0}$, donc l'énergie électrique, du fait d'une densité constante, vaut simplement :

$$\mathcal{E}_e = \frac{\sigma^2(t)}{2\varepsilon_0} \pi a^2 h = \frac{q^2}{2C} \quad (3.66)$$

- (b) On fait de même :

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 r^2}{8} \quad (3.67)$$

que l'on intègre ensuite :

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2}{8} 2\pi h \int_0^a r^2 \times r dr = \frac{\mu_0 \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 r^2}{16} \pi r^2 h = \frac{\mu_0 h i^2}{16\pi} \quad (3.68)$$

5. On compare les deux énergies :

$$\frac{\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_e} = \frac{1}{8\pi} \frac{i^2}{q^2} \mu_0 \varepsilon_0 S = \frac{\dot{q}^2 S}{8\pi q^2 c^2} \sim \frac{\tau^2}{T^2} \quad (3.69)$$

en écrivant $\dot{q} \sim \frac{q}{T}$ où T est le temps caractéristique de variation de la charge $q = \sigma(t)S$ et $\tau = \frac{a}{c}$ le temps caractéristique de propagation. Dans l'ARQS, on a donc $\tau \ll T$, d'où le résultat.

- Entre les plaques, $\vec{j} = \vec{0}$, donc la puissance cédée est nulle.
- On peut enfin vérifier le bilan de puissance électromagnétique :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_e}{\partial t} = \frac{1}{2C} \frac{dq^2}{dt} = \frac{iq}{C} = -\mathcal{P} \quad (3.70)$$

3.4 Caractéristiques d'une OPPH

On étudie une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le vide et dont le champ électrique est $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$, avec $E_x = E_0 \cos(\omega t - a(x + y + z))$, avec $a = 10^6$ u.SI.

- Quel est l'unité SI de a ?
- Déterminer le vecteur d'onde \vec{k} de cette onde.
- En déduire la longueur d'onde λ . Dans quel domaine du spectre se situe cette onde ? Calculer sa fréquence et sa pulsation.
- Exprimer E_y en fonction de E_x .
- Calculer le champ magnétique \vec{B} .

-
- a est en m^{-1} .
 - On identifie la phase à $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$, donc $\vec{k} = a(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$.
 - On en déduit la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|} = \frac{2\pi}{a\sqrt{3}} = 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (3.71)$$

On est dans la gamme des infrarouges. On en déduit $f = \frac{c}{\lambda} = 8,3 \cdot 10^{13}$ Hz et $\omega = 2\pi f = 5,2 \cdot 10^{14}$ rad·s⁻¹.

- L'onde électromagnétique étant transverse, $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 = (E_x + E_y)a$. Donc $E_y = -E_x$.
- On a bien une onde plane progressive harmonique, donc on peut utiliser la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{c}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \wedge (E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y) = \frac{1}{c}(-E_y \vec{e}_x + E_x \vec{e}_y + (E_y - E_x) \vec{e}_z) = \frac{-E_y \vec{e}_x + E_x \vec{e}_y}{c} \quad (3.72)$$

3.5 Onde électromagnétique cylindrique guidée par un fil

Un courant électrique $i(z, t)$ se propage le long d'un fil cylindrique infini de rayon a et d'axe (Oz), supposé parfaitement conducteur. On utilise la base cylindrique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) et les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On cherche le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) à l'extérieur du fil.

On admet que celui-ci est transverse ($E_z = 0$ et $B_z = 0$) et ne dépend pas de θ :

$$\vec{E} = E_r(r, z, t) \vec{e}_r + E_\theta(r, z, t) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_r(r, z, t) \vec{e}_r + B_\theta(r, z, t) \vec{e}_\theta \quad (3.73)$$

- Que peut-on dire des charges et courants ?
- Montrer que l'on peut écrire

$$(a) \quad E_r(r, z, t) = \frac{e_r(z, t)}{r} \quad \text{et} \quad B_r(r, z, t) = \frac{b_r(z, t)}{r}.$$

$$(b) \quad E_\theta(r, z, t) = \frac{e_\theta(z, t)}{r} \quad \text{et} \quad B_\theta(r, z, t) = \frac{b_\theta(z, t)}{r}$$

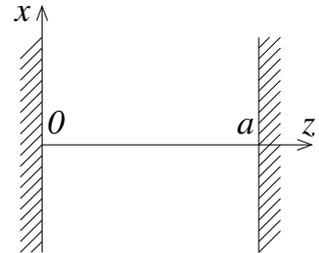
- quatre équations aux dérivées partielles reliant e_r ou e_θ à b_r ou b_θ . En déduire quatre équations portant chacune sur une seule de ces quatre fonctions.

- Montrer que $E_\theta = 0$ et $B_r = 0$.
- Relier $b_\theta(z, t)$ à $i(z, t)$ et en déduire une équation aux dérivées partielles sur $I(z, t)$.
- On cherche une solution ayant une évolution temporelle sinusoïdale. On prend donc une intensité complexe $\underline{i}(z, t) = I(z)e^{j\omega t}$.
 - En déduire une équation différentielle vérifiée par $I(z)$.
 - La résoudre et en déduire $\underline{i}(z, t)$. On ne conservera que l'onde se propageant dans le sens des z croissant.

- En déduire les champs complexes \vec{B} et \vec{E} .
- (a) En déduire la densité surfacique de charge $\sigma(z, t)$ et la densité de courant surfacique $\vec{j}_s(z, t)$.
(b) Vérifier qu'on a $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial j_s}{\partial z} = 0$. Que traduit cette équation ?

3. 6 Cavity résonante

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur parfait entre $z = 0$ et $z = a$. On considère un champ électromagnétique \vec{E} existant dans cette cavité et qui est la superposition de deux OPPM de pulsation ω polarisées rectilignement selon \vec{e}_x et de sens de propagation opposés $\pm \vec{e}_z$: $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$.



- Donner l'expression des champs \vec{E}_+ et \vec{E}_- (on pourra prendre une phase nulle en $t = 0$ et $z = 0$ pour \vec{E}_+).
- Que doit valoir le champ \vec{E} en $z = 0$? En déduire une relation entre les amplitudes complexes de \vec{E}_+ et \vec{E}_- .
- Montrer que seuls certains vecteurs d'onde discrets k_n peuvent exister. En déduire les longueurs d'onde λ_n et les fréquences f_n correspondantes. Commenter le titre de l'exercice.
- Donner l'expression du champ \vec{E} réel.
- Tracer sur un même graphe l'allure de \vec{E} pour les 3 plus basses fréquences possibles, en un instant t fixé correspondant à la plus forte amplitude. Combien de nœuds et de ventres possède le mode numéro n ?

- Pour le champ électrique dans le sens $+\vec{e}_z$: $\vec{E}_+ = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$, et par suite $\vec{E}_- = E_1 \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{e}_x$ où l'amplitude est *a priori* différente, et avec un déphasage.
- Les conducteurs parfaits imposent la nullité du champ électrique en $z = 0$ et $z = a$. En $z = 0$ cela impose :

$$E_1 \cos(\omega t + \varphi) + E_0 \cos(\omega t) = 0 \forall t \implies E_1 \cos \varphi = -E_0 \quad (3.74)$$

donc on peut prendre $E_1 = -E_0$ et $\varphi = 0$ (ou de manière équivalente $E_1 = E_0$ et $\varphi = \pi$).

- En $z = a$:

$$E_0 (\cos(\omega t - ka) - \cos(\omega t + ka)) = 0 \forall t \implies \sin(ka) = 0 \iff ka = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (3.75)$$

conduisant à la quantification du vecteur d'onde $k_n = \frac{n\pi}{a}$, donc $f_n = \frac{nc}{2a}$ et $\lambda_n = \frac{2a}{n}$. On observe alors des modes propres à cette cavité, en particulier si on arrive à exciter cette cavité avec une onde de cette fréquence particulièrement, l'amplitude de l'onde dans la cavité va tendre vers l'infini (puis modélisation non linéaire à conduire).

- On écrit le champ résultant $\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \vec{e}_x$.
- Graphe classique. Pour le mode n , il y a n ventres et $n + 1$ nœuds.

3. 7 Réflexion en incidence oblique

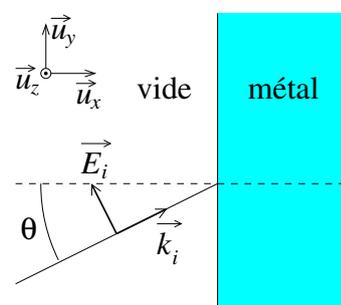
Un métal modélisé par un conducteur parfait occupe le demi-espace $x > 0$, l'autre demi-espace étant vide. Une onde incidente plane progressive monochromatique se propage dans le vide. Son champ électrique \vec{E}_i est donné dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par :

$$\vec{E}_i : \begin{pmatrix} -E_0 \sin \theta \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \\ E_0 \cos \theta \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Son vecteur d'onde est $\vec{k}_i = k \cos \theta \vec{e}_x + k \sin \theta \vec{e}_y$.

L'onde réfléchie est également une OPPM de pulsation ω donc on peut écrire son champ électrique \vec{E}_r dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sous la forme

$$\vec{E}_r : \begin{pmatrix} E_{r0x} \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varphi_x) \\ E_{r0y} \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varphi_y) \\ E_{r0z} \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varphi_z) \end{pmatrix}$$



On pose $\vec{k}_r = k_{rx} \vec{e}_x + k_{ry} \vec{e}_y + k_{rz} \vec{e}_z$.

1. Vérifier le caractère transverse de l'onde incidente.
2. (a) Montrer que $k_{rz} = 0$.
 (b) Écrire la relation de passage à la surface du métal et en déduire E_{r0z} , E_{r0y} , φ_y et k_{ry} .
 (c) Que doit valoir la norme k_r de \vec{k}_r ? En déduire k_{rx} .
 (d) Déterminer E_{r0x} et conclure : donner entièrement \vec{E}_r .
 (e) En déduire le champ électrique \vec{E} de l'onde résultante.
3. En déduire la densité surfacique de charge à la surface du métal.
4. Déterminer les champs magnétiques \vec{B}_i , \vec{B}_r et \vec{B} de l'onde incidente, de l'onde réfléchie et de l'onde résultante respectivement.
5. (a) En déduire le vecteur densité de courant surfacique \vec{j}_s à la surface du métal.
 (b) Vérifier l'équation de conservation de la charge surfacique : $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_s = 0$.
 (c) Donner la longueur d'onde λ_j de l'onde progressive de courant surfacique en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique et de θ .
6. (a) Calculer le vecteur de Poynting puis sa moyenne temporelle. Commenter.
 (b) Déterminer la distance i entre deux maxima successifs de $\|\langle \vec{\Pi} \rangle\|$ en fonction de λ et de θ .

1. Le calcul de $\vec{E}_i \cdot \vec{k}_i$ conduit bien à 0, traduisant bien le caractère transverse.
2. (a) La situation est invariante par translation selon z , donc le champ électrique ne dépend pas de cette coordonnée, par conséquent $k_{rz} = 0$.
 (b) On a nécessairement $(\vec{E}_i + \vec{E}_r) \wedge \vec{e}_x = \vec{0}$ car le métal parfait impose la nullité du champ électrique et la composante tangentielle du champ est continue (pour la composante normale, ne pas oublier qu'il peut y avoir une charge surfacique). On aboutit donc à

$$\begin{cases} E_0 \cos \theta \cos(\omega t - k \sin \theta y) + E_{r0y} \cos(\omega t - k_{ry} y + \varphi_y) = 0 & \forall y, t \\ E_{r0z} \cos(\omega t + \varphi_z) \end{cases} \quad (3.76)$$

$$= 0 \implies E_{r0z} = 0 \quad (3.77)$$

La première équation conduit à $E_{r0y} = -E_0 \cos \theta$, $\varphi_y = 0$ et $k_{ry} = k \sin \theta$.

- (c) On a nécessairement $k_r = k_i = \frac{\omega}{c} = k$. Donc $k_{rx}^2 = k^2 - k_{ry}^2 = k^2 - k^2 \sin^2 \theta$, donc $k_{rx} = \pm k \cos \theta$, avec nécessairement un signe $-$ pour traduire le sens de l'onde réfléchie : $k_{rx} = -k \cos \theta$.
- (d) On se sert du caractère transverse de l'onde réfléchie, à savoir :

$$\vec{E}_r \cdot \vec{k}_r = 0 \implies -E_{r0x} \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varphi_x) \cos \theta - \sin \theta E_0 \cos \theta \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) = 0 \quad (3.78)$$

conduisant à $E_{r0x} = -E_0 \sin \theta$ et $\varphi_x = 0$.

On aboutit ainsi au champ réfléchi complet :

$$\vec{E}_r = -E_0 (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \cos(\omega t + k(x \cos \theta - y \sin \theta)) \quad (3.79)$$

Le champ complet vaut alors

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 \begin{pmatrix} -\sin \theta (\cos(\omega t - ky \sin \theta - kx \cos \theta) + \cos(\omega t - ky \sin \theta + kx \cos \theta)) \\ \cos \theta (\cos(\omega t - ky \sin \theta - kx \cos \theta) - \cos(\omega t - ky \sin \theta + kx \cos \theta)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

$$= 2E_0 \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos(\omega t - ky \sin \theta) \cos(kx \cos \theta) \\ \cos \theta \sin(\omega t - ky \sin \theta) \sin(kx \cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

3. En utilisant la relation de passage :

$$\vec{E}(x = 0^+) - \vec{E}(x = 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \implies \sigma = 2\epsilon_0 E_0 \sin \theta \cos(\omega t - ky \sin \theta) \quad (3.82)$$

4. On a à chaque fois des ondes planes progressives harmoniques, donc on peut utiliser la relation de structure :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \wedge \vec{E}_i}{c} \quad (3.83)$$

$$= \frac{E_0}{c} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \vec{e}_z \cos(\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta) \vec{e}_z \quad (3.84)$$

et le champ réfléchi :

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx \cos \theta - ky \sin \theta) \vec{e}_z \quad (3.85)$$

d'où un champ total :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} (\cos(\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta) + \cos(\omega t + kx \cos \theta - ky \sin \theta)) \vec{e}_z = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t - ky \sin \theta) \cos(kx \cos \theta) \vec{e}_z \quad (3.86)$$

5. (a) On utilise à nouveau la relation de passage mais pour le champ magnétique :

$$\vec{B}(x = 0^+) - \vec{B}(x = 0^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \quad (3.87)$$

soit avec $\vec{B}(x = 0^+) = \vec{0}$, il vient :

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t - ky \sin \theta) \vec{e}_y \quad (3.88)$$

(b) Calculons chaque terme séparément :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -2\varepsilon_0 E_0 \sin \theta \omega \sin(\omega t - ky \sin \theta) \quad (3.89)$$

et d'autre part :

$$\text{div } \vec{j}_s = \frac{\partial j_{s,y}}{\partial y} = + \frac{2E_0}{\mu_0 c} k \sin \theta \sin(\omega t - ky \sin \theta) \quad (3.90)$$

soit avec $\varepsilon_0 \omega = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{\omega}{c} = \frac{k}{\mu_0 c}$, on vérifie bien l'équation demandée.

(c) Comme $k_j = \frac{2\pi}{\lambda_j} = k \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$, il vient $\lambda_j = \frac{\lambda}{\sin \theta}$

6. (a)

$$\vec{\Pi} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos(\omega t - ky \sin \theta) \cos(kx \cos \theta) \\ \cos \theta \sin(\omega t - ky \sin \theta) \sin(kx \cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\omega t - ky \sin \theta) \cos(kx \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

$$= \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin(\omega t - ky \sin \theta) \cos(\omega t - ky \sin \theta) \sin(kx \cos \theta) \cos(kx \cos \theta) \\ \sin \theta \cos^2(\omega t - ky \sin \theta) \cos^2(kx \cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

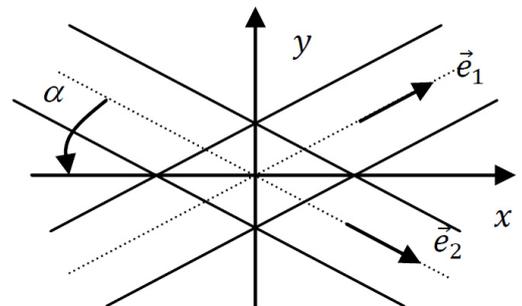
soit en moyenne (temporelle) :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c} \sin \theta \cos^2(kx \cos \theta) \vec{e}_y \quad (3.93)$$

(b) En développant le \cos^2 la périodicité est divisée par deux, on a $i = \frac{\lambda_j}{2} = \frac{\lambda}{2 \cos \theta}$.

3. 8 Vélométrie

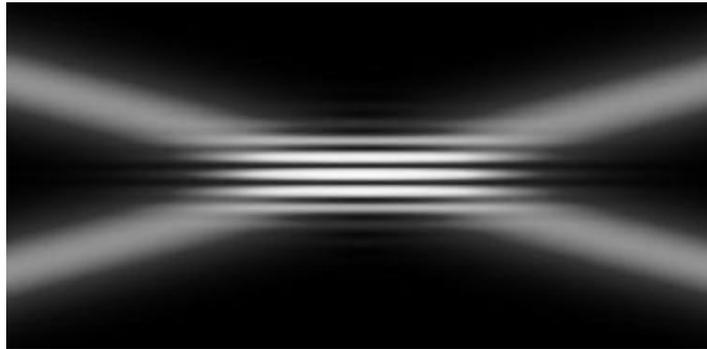
La vélocimétrie laser à franges (VLF) est une technique de mesure de la vitesse d'écoulement de fluide n'utilisant qu'un laser et un aérosol dispersé dans le courant de fluide qu'on cherche à étudier. Cette technique de mesure fournit des mesures locales et instantanées de la vitesse du fluide. Un laser produit un faisceau monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 514,5 \text{ nm}$ séparé en deux faisceaux cohérents par un ensemble de séparatrices et miroirs. Un montage réfracte ces faisceaux (sous un angle $\alpha = 1,7^\circ$ qui se superposent dans une zone où l'on voit apparaître des franges d'interférences rectilignes. Le fluide d'étude circule parallèle à l'axe (Oy).



On modélise chaque faisceau ($i = 1$ ou 2) par une onde plane polarisée rectilignement selon (Oz) de champ électrique en notation complexe $\vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{e}_z$ de même amplitude. Les vecteurs d'onde \vec{k}_i sont orienté par les vecteurs de base unitaire \vec{e}_i .

1. Exprimer dans le repère ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) les vecteurs d'onde en fonction de λ_0 et de l'angle α .
2. Exprimer le champ électrique total \vec{E} dans la zone de recouvrement.

3. L'intensité lumineuse dans cette zone s'écrit $I(M) = |\vec{E}(M)|^2$. Exprimer $I(M)$ en fonction de E_0 , α , y et λ_0 et expliquer l'allure de la figure d'interférences suivantes que l'on obtiendrait si on plaçait un écran dans le plan xOy :



4. Montrer que la période spatiale i de la figure d'interférences (que l'on nomme l'interfrange de cette figure) s'exprime sous la forme $i = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha}$. AN ?
5. Les particules passant dans le champ d'interférences émettent un scintillement de fréquence $f = 1,153$ MHz. En déduire la vitesse de l'écoulement.

1. On a en norme $k_i = k_r = \frac{2\pi}{\lambda_0} = k$. Puis d'après les directions des faisceaux :

$$\vec{k}_i = k(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = k(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y) \quad (3.94)$$

2. Écrivons la somme vectorielle des deux champs dans la zone de recouvrement :

$$\vec{E}(M) = E_0 e^{j(\omega t - k \cos \alpha x)} (e^{-jk \sin \alpha y} + e^{+jk \sin \alpha y}) \vec{e}_z = 2E_0 e^{j(\omega t - k \cos \alpha x)} \cos(k \sin \alpha y) \vec{e}_z \quad (3.95)$$

3. L'intensité lumineuse vaut alors :

$$I(M) = 4E_0^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \alpha y \right) \quad (3.96)$$

On a donc une figure d'interférences selon \vec{e}_y car $I(M)$ s'annule et est maximale périodiquement.

4. La période spatiale i de la figure d'interférence correspond à la périodicité de la fonction $\cos^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \alpha y \right)$. En linéarisant, on a donc un signal périodique de période $\frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha} = i = 8,7 \cdot 10^{-6}$ m.
5. Le fait qu'elles scintillent est lié au fait qu'elles passent successivement des zones éclairées aux zones sombres. Par conséquent, la fréquence de scintillement nous renseigne sur le temps du passage d'une particule entre deux zones sombres, c'est-à-dire lorsqu'elles parcourent i . D'où $v = i \times f = 10,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.9 Lampe !

Le héros d'un film de science-fiction se retrouve dans l'espace avec pour seul moyen de locomotion une lampe à dynamo, permettant de transformer le mouvement de rotation d'une manivelle en de la lumière émise par une lampe.



Pour répondre à la question qui suit, il appartient au candidat de modéliser la situation. Il est notamment attendu de sa part :

- qu'il schématise la situation expérimentale ;
- qu'il introduise les grandeurs physiques pertinentes et qu'il associe à chacune d'elles une notation ;
- qu'il précise les lois physiques qu'il est amené à utiliser ainsi que les hypothèses et approximations qu'il est amené à formuler ;
- que ses calculs soient menés littéralement mais qu'ils aient pour but final d'obtenir une valeur numérique typique pour des conditions expérimentales réalistes ;
- qu'il critique les résultats obtenus et propose des améliorations à la modélisation qu'il aura conduite.

Question : Estimer la distance que peut parcourir l'astronaute à l'aide de sa lampe en 24h.

Il faut évidemment se servir ici de la conservation de la quantité de mouvement d'un système fermé. On a l'équivalent d'une fusée, sauf que l'on n'émet pas un gaz mais des photons de quantité de mouvement $h\nu$, avec un débit de photons valant $D_N = \frac{P}{h\nu}$ où P est la puissance lumineuse totale. On montre alors que la quantité de mouvement de l'astronaute \vec{p}_a vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \vec{p}_a}{\partial t} = -D_N \frac{h}{\lambda} \vec{e}_x = -\frac{P}{h\nu} \times \frac{h\nu}{c} \vec{e}_x = -\frac{P}{c} \vec{e}_x \quad (3.97)$$

avec \vec{e}_x la direction du faisceau lumineux et $\frac{h}{\lambda}$ la quantité de mouvement d'un photon. Ainsi l'accélération de l'astronaute vaut $a_a = \frac{P}{mc}$ avec m la masse de l'astronaute et ses équipements. Il peut donc parcourir en une journée la distance :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{P \Delta t^2}{2mc} \quad (3.98)$$

Choisissons des ordg adaptés : $m \sim 200$ kg (humain + équipements), $P \sim 100$ W, car on peut supposer que c'est l'odg de la puissance mécanique que l'on fournit à la dynamo, possédant un rendement de conversion assez élevé. Numériquement, avec $\Delta t = 24 \times 3600 = 8,64 \cdot 10^4$ s :

$$\Delta x \sim 6,2 \text{ m} \quad (3.99)$$

Il aurait tout intérêt à jeter le plus vite possible la torche !!

3. 10 Polarisation des ondes

On étudie dans cet exercice la polarisation de la lumière. Un analyseur est placé dans le plan $z = 0$. On appelle \vec{u} le vecteur unitaire donnant la direction de transmission privilégiée de l'analyseur. On pose $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{u})$.

1. Toute lumière est-elle polarisée ? Donnez des exemples.
2. On considère une onde polarisée rectilignement selon \vec{e}_x . Donner l'expression du champ électrique.
3. Déterminer l'éclairement de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α . Comment est appelée cette loi ?
4. On considère une onde polarisée circulairement, s'écrivant $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$. Déterminer l'intensité de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur.
5. Peut-on distinguer une onde polarisée rectilignement d'une onde polarisée circulairement, juste à l'aide d'un analyseur que l'on peut tourner ? Justifier.

1. Non ! La lumière du Soleil ne l'est pas, tout comme celle issue des ampoules à incandescences. Celle en sortie de laser, ou après réflexion sur une vitre peut l'être.
2. $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$ car on prend une OEMPPH, de direction de propagation $+\vec{e}_z$, et polarisée rectilignement, donc la direction est constante selon \vec{e}_x .
3. La portion de champ électrique sortant de l'analyseur valant $\vec{E}_p = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \cdot \vec{u} \times \vec{u} = E_0 \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) \vec{u}$, l'intensité en sortie vaut $I = \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2} \cos^2(\alpha)$, loi de Malus.
4. D'après le cours, une onde polarisée circulairement s'écrit :

$$\vec{E}_c = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y \quad (3.100)$$

Donc en sortie de l'analyseur, on a :

$$\vec{E}_{c,p} = E_0 \cos(\omega t - kz) \cos \alpha + E_0 \sin(\omega t - kz) \sin \alpha = E_0 \cos(\omega t - kz - \alpha) \quad (3.101)$$

donc l'intensité lumineuse en sortie de l'analyseur ne dépendra pas de θ , on peut donc distinguer une onde polarisée circulairement ou linéairement.

Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion

Sommaire

4.1 Propagation d'une OEMPPH dans un plasma dilué	2
4.1.1 Modélisation d'un plasma	2
4.1.2 Mise en équation	2
4.2 Dispersion et absorption	3
4.2.1 Sens physique des OPPH à vecteur d'onde complexe	3
4.2.2 Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif non absorbant	4
4.2.3 Retour sur la propagation dans un plasma	8
4.2.4 Cas de l'onde évanescente : absence de propagation	9
4.2.5 Application aux télécommunications	9
4.3 Ondes électromagnétiques planes dans des milieux conducteurs	9
4.3.1 Présentation du modèle	9
4.3.2 Équation de propagation d'une OEMPPH à basse fréquence	10
4.3.3 Effets d'un conducteur sur la propagation d'une OEMPPH	11
4.3.4 Aspects énergétiques	12
4.3.5 Cas du métal parfait	12

Questions de cours :

- Modèle du plasma dilué : hypothèses, équation de propagation et relation de dispersion. Commenter physiquement.
- Présenter la pseudo-onde électromagnétique plane progressive harmonique, où \underline{k} est complexe. Donner le sens physique associé à la partie réelle et à la partie imaginaire.
- Présenter la notion de paquet d'onde, donner un exemple. Préciser le lien entre largeur spectrale et largeur temporelle. Présenter l'effet de la dispersion, en discutant de la notion de vitesse de phase et vitesse de groupe.
- À partir de la relation de dispersion du plasma dilué $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, discuter selon la valeur de ω de l'effet d'un plasma dilué sur la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique. Application.
- Établir l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu conducteur. En déduire la relation de dispersion et l'expression du champ électrique à l'intérieur du conducteur. Interpréter.

Capacités exigibles du BO :

- Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles de propagation.
- Établir la relation de dispersion.
- Lier la partie réelle de k à la vitesse de phase, la partie imaginaire de k à une dépendance spatiale de l'amplitude.
- Définir la notion de milieu dispersif.
- Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.
- Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.
- Effet de peau dans un conducteur ohmique : repérer une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion. Établir la relation de dispersion. Associer l'atténuation de l'onde à une dissipation d'énergie. Citer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz.
- Justifier que les champs électrique et magnétique sont nuls dans le conducteur.
- Décrire le modèle de la conduction électrique dans un plasma. Construire une conductivité complexe en justifiant les approximations.
- Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée entre le champ et les porteurs.
- Établir la relation de dispersion dans le plasma.
- Identifier une onde évanescente (onde stationnaire spatialement amortie).
- Expliquer la notion de fréquence de coupure et donner son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère.

Dans les chapitres précédents, on s'est attaché à décrire des milieux dans lesquels se propageaient des ondes, progressives ou stationnaires, sans déformation. Ce sont des modélisations physiques imparfaites que l'on va corriger dans ce chapitre. Ce sera également l'occasion d'étudier la propagation de vrais signaux physiques, les paquets d'onde, dont les caractéristiques évoluent lors de leur propagation dans des milieux réels. On va commencer par s'appuyer sur un exemple concret : le plasma dilué.

I. Propagation d'une OEMPPH dans un plasma dilué

I.1 Modélisation d'un plasma

Un plasma est un gaz ionisé **neutre**, c'est-à-dire constitué d'ions positifs qui résultent de la perte d'un ou plusieurs électrons par une molécule de gaz, et d'électrons qui leur ont été arrachés. Par exemple dans l'ionosphère, portion d'atmosphère terrestre entre 50 et 1000 km, la pression atmosphérique est inférieure à 2 Pa : le gaz est peu dense et est ionisé par le rayonnement du Soleil. La densité électronique résultante est autour de $n \sim 10^{10} - 10^{12} \text{ m}^{-3}$: on parle de **plasma peu dense**.

Pour obtenir un plasma, on peut le soumettre à un champ électrique intense, une température élevée ou encore un bombardement intense de particules.

* On envisage la propagation d'une OEMPPH transverse, de direction $+\vec{e}_x$, du type $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ où $\vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x = 0$. Dans ce cas, $\text{div } \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$: la propagation d'une OEMPPH transverse dans un plasma peu dense **laisse celui-ci localement neutre**.

Une charge quelconque du plasma (électron ou cation) subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \simeq q\vec{E} \quad (4.1)$$

* On ne **garde que la force électrique**, dans l'hypothèse où les électrons ne sont pas relativistes, car $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1$. De plus, la masse des cations étant beaucoup plus élevée que celle des électrons ($m_e/m_{\text{proton}} \sim 1840!$), on les suppose fixes dans notre étude.

Enfin, et c'est la grande différence avec la conduction dans les métaux, on **néglige ici toute interaction entre particules chargées**, le plasma étant peu dense, les collisions sont peu probables et ne permettent pas d'introduire par exemple une force de freinage.

I.2 Mise en équation

a) Conductivité du milieu

Pour calculer la conductivité, exprimons le vecteur vitesse en régime forcé grâce à la loi de la quantité de mouvement appliquée à un électron du plasma :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \iff j\omega m_e \vec{v} = -e\vec{E} \iff \vec{j} = n(-e)\vec{v} = \frac{ne^2}{j\omega m_e} \vec{E} \quad (4.2)$$

d'où une conductivité imaginaire pure $\underline{\gamma} = -j \frac{ne^2}{\omega m_e}$.

Le fait que la conductivité soit imaginaire permet d'en conclure que le champ électromagnétique ne cède pas d'énergie aux particules du plasma. En effet, la puissance volumique cédée s'exprimant $\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$, en passant aux notations réelles il vient :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \frac{ne^2}{\omega m_e} E_0^2 \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) \quad (4.3)$$

dont la valeur moyenne est nulle $\langle \mathcal{P}_{\text{vol}} \rangle = 0$.

b) Équation de propagation

Connaissant le vecteur densité de courant \vec{j} en fonction de la conductivité complexe, on peut exprimer les équations de Maxwell et les combiner pour obtenir l'équation sur le champ électrique :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \underline{\gamma} \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.4)$$

et l'on a toujours $\text{div } \vec{E} = 0$ et $\text{div } \vec{B} = 0$. D'où en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \iff \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (4.5)$$

conduisant avec $\text{div } \vec{E} = 0$ à :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.6)$$

c) Relation de dispersion

Exercice

Déterminer la relation de dispersion, relation entre ω et k , dans le cas d'un plasma peu dense.

On injecte la forme d'OEMPPH dans l'équation différentielle :

$$(-j\vec{k})^2 \vec{E} = \frac{(j\omega)^2}{c^2} \vec{E} - j\mu_0 \frac{ne^2}{\omega m_e} (j\omega) \vec{E} \iff k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \quad (4.7)$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (4.8)$$

appelée **pulsation plasma** et dont on va voir prochainement sa signification. Notons un ordre de grandeur, avec $n \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$, on trouve $\omega_p \simeq 6 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $f_p \sim 10 \text{ MHz}$ (le jour, car la nuit $f_p \sim 1 \text{ MHz}$).

La relation de dispersion obtenue n'est plus celle liée à une équation de d'Alembert, et fait plus intéressant encore, montre qu'il est indispensable de considérer k complexe. En effet, pour $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$, signe que k est dans ce cas imaginaire pur ! Voyons quel sens physique donner à une pulsation spatiale k complexe.

II. Dispersion et absorption

II.1 Sens physique des OPPH à vecteur d'onde complexe

a) Pseudo-OEMPPH

Considérons une OEMPPH se propageant dans la direction $+\vec{e}_x$, mais avec un vecteur d'onde complexe :

$$\underline{k} = k_r(\omega) + jk_i(\omega) \quad (4.9)$$

Le champ électrique prend alors la forme simplifiée suivante :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k_r x - jk_i x)} = \vec{E}_0 e^{k_i x} e^{j(\omega t - k_r x)} \quad (4.10)$$

* soit encore en notations réelles sous forme simplifiée :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{k_i(\omega)x} \cos(\omega t - k_r(\omega)x + \varphi_0) \quad (4.11)$$

on parle ici de pseudo-OEMPPH, d'une part car l'amplitude dépend de la position, et d'autre part car le vecteur d'onde dépend *a priori* de la pulsation ω .

b) Partie réelle et vitesse de phase

Sur l'expression du champ électrique précédent, le terme en cosinus traduit le caractère progressif de l'onde, identique à celui d'une véritable OPPH se propageant selon $+\vec{e}_x$ si $k_r > 0$, et selon $-\vec{e}_x$ si $k_r < 0$, à la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} \quad (4.12)$$

Cette vitesse est celle de propagation d'un plan équiphase d'équation $\omega t - k_r x + \varphi_0 = \text{cste}$. Par rapport au cas d'une onde vérifiant une équation de d'Alembert, cette vitesse dépend *a priori* de ω , on dit dans ce cas que le milieu est **dispersif** : en effet, chaque pseudo-OEMPPH se déplace donc à une vitesse différente, ce qui aura une incidence pour la propagation de signaux physiques réels (cf. plus loin).

Notons que parfois, la dispersion des ondes n'est pas liée à la relation de dispersion, pouvant être celle de l'équation de d'Alembert, mais du fait des conditions aux limites. Nous verrons un exemple en TD.

c) Partie imaginaire

Le terme en $e^{k_i x}$ traduit suivant le signe de k_i soit un amortissement, soit plus rarement une amplification de l'amplitude de l'onde dans l'espace. La situation la plus courante est celle d'un amortissement où $k_i < 0$, on parle de milieu **absorbant**. On introduit couramment une distance caractéristique d'absorption (ou d'amplification) :

$$\delta = \frac{1}{|k_i|} \quad (4.13)$$

* Au final, on obtient une forme d'onde dans le cas d'une absorption :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - k_r x + \varphi_0) = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right) + \varphi_0\right) \quad (4.14)$$

Notons que bien souvent, dans les milieux amplifiés, l'amplitude ne diverge pas car rapidement la modélisation linéaire n'est plus correcte pour de fortes amplitudes. Cela rend inopérant la recherche de solutions en pseudo-OPPH, car rappelons-le, cette technique est réservée aux EDP linéaires.

d) Indice optique

On introduit l'indice du milieu par $\underline{k} = \frac{n\omega}{c}$. En décomposant $\underline{n} = n' + jn''$, il vient que

$$n' = \frac{k_r c}{\omega} = \frac{c}{v_\varphi} \quad (4.15)$$

caractérise la vitesse de propagation. Si $n' = f(\omega)$, il y a dispersion, d'où l'appellation d'**indice de dispersion** pour n' . n'' traduit alors l'absorption d'une onde au passage dans le milieu.

II.2 Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif non absorbant

a) Première approche : superposition de deux ondes planes de fréquences voisines

Afin de dégager le sens physique de la dispersion, on envisage un court instant la propagation d'une pseudo-OEMPPH dans un milieu non absorbant mais dispersif, conduisant à $\underline{k} = k_r(\omega)$. Le cas d'une seule onde progressive harmonique est, comme on l'a déjà dit, pas un modèle physique réel car toute onde réellement émise est d'extension limitée en temps et en espace. Une première approche consiste à regarder la superposition de deux ondes planes de fréquences voisines et de même amplitude, et d'observer l'effet de la dispersion :

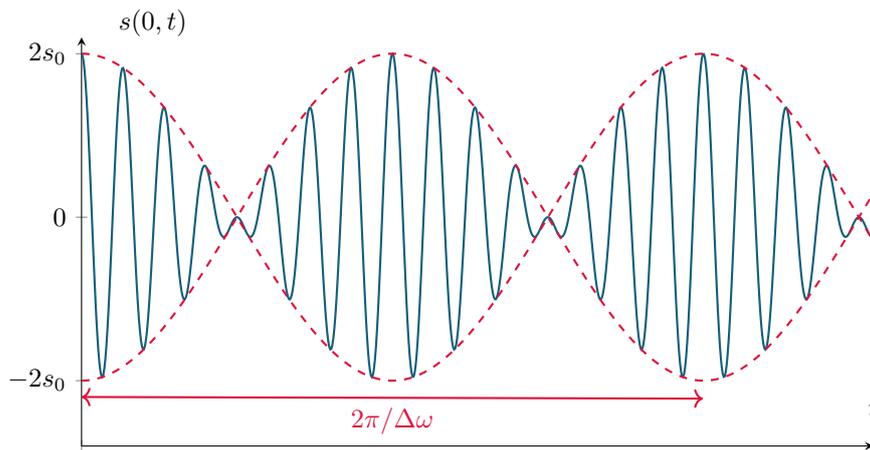
$$s_1(x, t) = s_0 \cos(\omega_1 t - k_r(\omega_1)x) \quad \text{et} \quad s_2(x, t) = s_0 \cos(\omega_2 t - k_r(\omega_2)x) \quad (4.16)$$

On introduit $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$, $\Delta k_r = |k_r(\omega_2) - k_r(\omega_1)|$, et les pulsations centrales $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ et $k_{r,0} = \frac{k_r(\omega_1) + k_r(\omega_2)}{2}$. On s'intéresse particulièrement au cas où $\omega_1, \omega_2 \gg \Delta\omega$ et $k_r(\omega_1), k_r(\omega_2) \gg \Delta k_r$.

La superposition de ces deux ondes conduit à :

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = 2s_0 \cos(\omega_0 t - k_{r,0}x) \times \cos(\Delta\omega t - \Delta k_r x) \quad (4.17)$$

dont l'allure temporelle est la suivante :



On observe ici un phénomène de **battements** à la fois temporellement et spatialement formés :

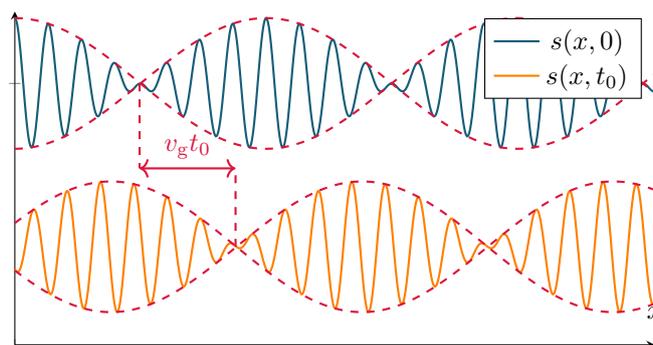
- d'une onde moyenne, appelée **porteuse**, associée à la pulsation ω_0 et de module du vecteur d'onde $k_{r,0}$;
- « enveloppée » (ou modulée) par une **enveloppe** de pulsation $\Delta\omega$, de vecteur d'onde Δk_r et de période spatiale $\Delta\lambda \gg \lambda_{r,0} = \frac{2\pi}{k_{r,0}}$

Manipulation

Simulation : <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/vitgroupe.html>

Si on regarde l'évolution spatiale à deux instants, on observe bien une propagation de l'onde, mais à des vitesses différentes :

- la porteuse se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_{r,0}}$;
- l'enveloppe se propage à une vitesse différente appelée **vitesse de groupe** $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_r}$.



Si la relation de dispersion n'est pas linéaire, en général $v_g \neq v_\varphi$, et la simulation montre bien un déplacement

Notons enfin que la superposition de deux ondes est partiellement localisée au niveau des ventres, avec une distance caractéristique $\Delta\lambda$, et est localisée dans le temps avec un temps caractéristique $\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, soit encore $\Delta t \Delta f \sim 1$, relation qui va nous être utile par la suite.

b) Notion de paquet d'onde

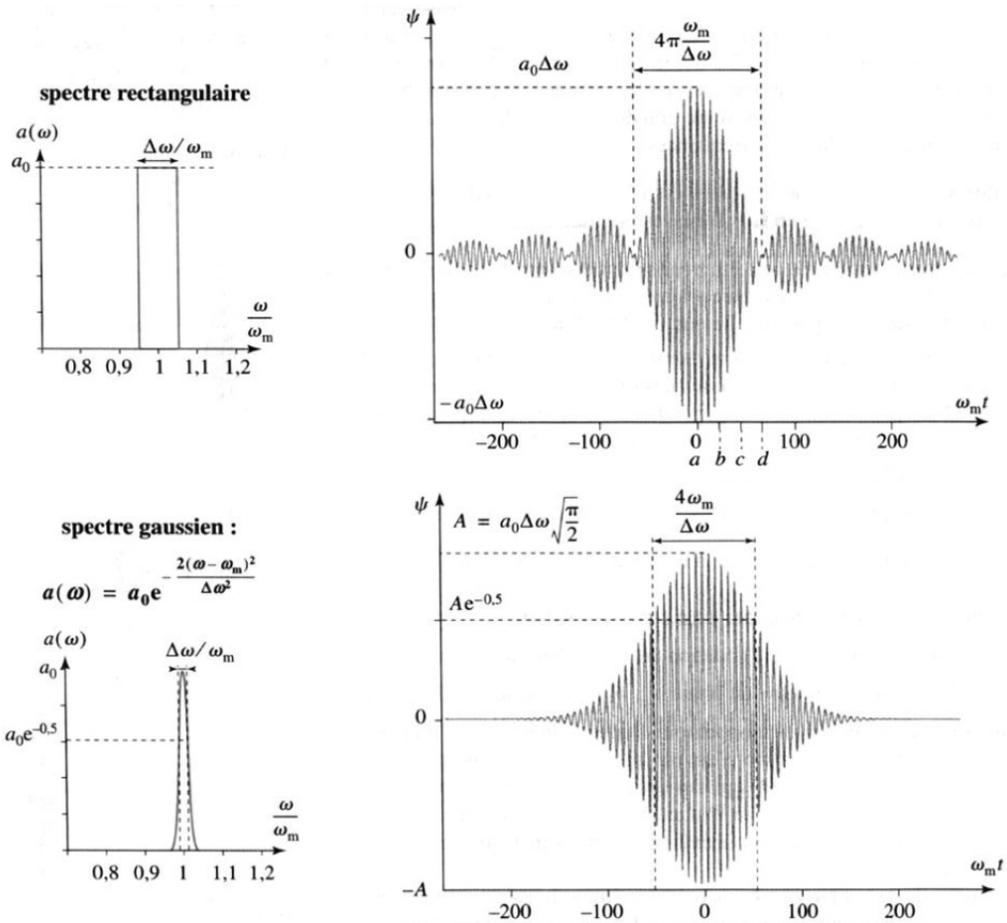
L'illustration précédente permet de définir les deux vitesses fondamentales à l'étude des ondes, mais la superposition de deux OPPH n'a toujours pas une vraie réalité physique.

On va alors introduire le **paquet d'onde**, onde plane de **durée finie** constituée d'une superposition continue d'OPPH de pulsations voisines comprises dans l'intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$. Il prend la forme mathématique suivante :

$$* \quad \underline{s}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega \quad (4.18)$$

avec $\underline{a}(\omega)$ l'amplitude spectrale de l'OPPH de pulsation ω . Le graphique de $|\underline{a}(\omega)|$ en fonction de ω est alors le spectre du signal. Ce paquet d'onde se présente comme une OPPH de pulsation ω_0 (et vecteur d'onde k_0) modulée par une enveloppe de **durée et d'extension spatiale finies**.

Sont présentés ci-dessous deux exemples de paquets d'ondes : l'un de spectre gaussien, avec la particularité que l'allure de l'enveloppe spatiale et temporelle sont des gaussiennes ; l'autre de spectre rectangulaire :



Propriété

La théorie de Fourier permet d'établir, pour un paquet d'onde, le lien entre la largeur spectrale $\Delta\omega$ et la largeur temporelle Δt est donné par la relation :

$$* \quad \Delta\omega \Delta t \sim 1 \quad (4.19)$$

Il en résulte que la largeur spectre est d'autant plus grande que le signal est bref, et inversement. De même que le paquet d'onde possède une extension temporelle finie, il possède également une extension spatiale finie de l'ordre de $\Delta x \sim c\Delta t$ avec c la célérité typique des ondes.

Cela peut se comprendre qualitativement : à $t = 0$ toutes les composantes sont en phase, le signal est maximal. Progressivement, les phases des composantes de pulsation différente se décalent à l'instant t de $\varphi_{\min} = \omega_{\min}t$ et $\varphi_{\max} = \omega_{\max}t$, d'où un décalage de phase $\Delta\varphi = \Delta\omega t$. Quand $\Delta\omega t = 2\pi$, les composantes se compensent deux à deux et le signal est alors quasiment nul.

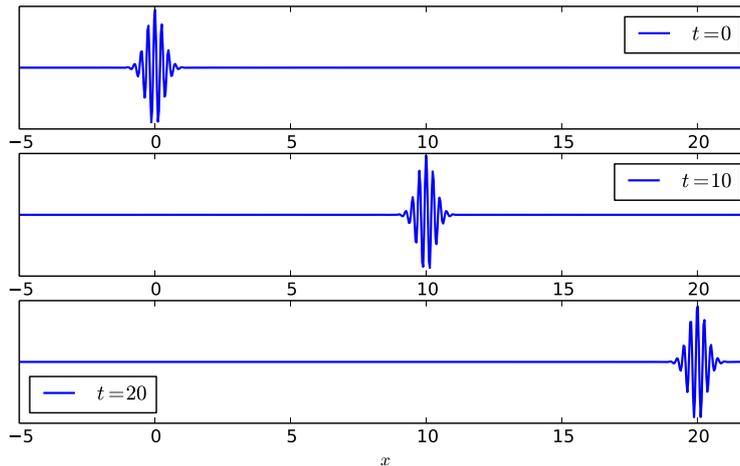
Par exemple, un signal sinusoïdal possède une étude spectrale nulle, d'où $\Delta t \Rightarrow +\infty$, ce qui est cohérent.

c) Effet de la dispersion

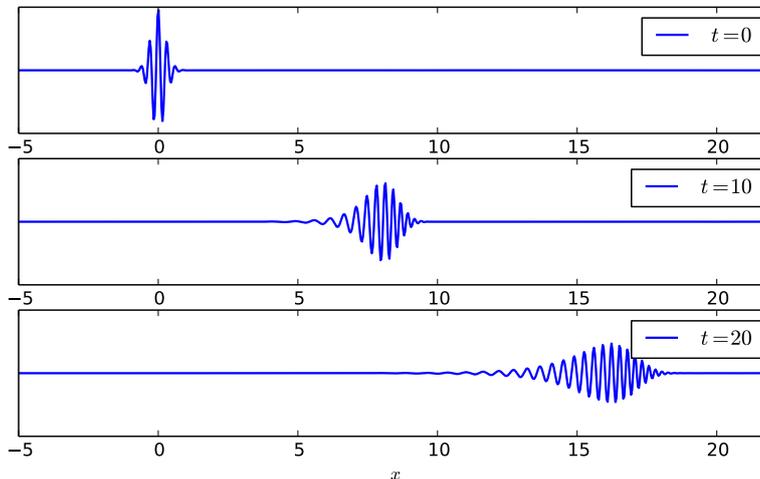
Manipulation

Simulation : <http://www.falstad.com/dispersion/> et <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html>

Dans un milieu non dispersif, on observe une propagation en bloc du paquet d'onde, sans aucune déformation. En effet, comme la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, toutes les composantes d'OPPH qui composent le paquet d'onde se propagent à la même vitesse et se déplacent à la vitesse de groupe qui vaut la vitesse de phase.



* Dans un milieu dispersif, comme chaque composante ne se déplace pas à la même vitesse, on observe une déformation du paquet d'onde au cours de sa propagation : en général on observe un étalement, et le paquet possède une vitesse de groupe a priori différente de celle de ces différentes composantes :



Démontrons ce résultat à partir d'un développement mathématique au premier ordre autour de la pulsation centrale ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0) \quad \text{et} \quad k_r(\omega) \simeq k_r(\omega_0) + \left(\frac{dk_r}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) = k_0 + \left(\frac{dk_r}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \quad (4.20)$$

On peut alors réécrire le paquet d'onde sous la forme suivante :

$$\underline{s}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \times e^{j((\omega - \omega_0)t + (\frac{dk_r}{d\omega})_{\omega_0} (\omega - \omega_0)x)} d\omega \quad (4.21)$$

$$= e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega - \omega_0) \left(t - (\frac{dk_r}{d\omega})_{\omega_0} x \right)} = e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \text{Env} \left(t - \frac{x}{\left(\frac{dk_r}{d\omega}\right)_{\omega_0}} \right) \quad (4.22)$$

correspondant au produit d'une onde « moyenne » de pulsation ω_0 et d'un terme d'enveloppe se déplaçant à la vitesse de groupe :

*

$$v_g \hat{=} \left(\frac{d\omega}{dk_r} \right)_{\omega_0} \quad (4.23)$$

Notons que pour expliquer la déformation du paquet d'onde, il est nécessaire de pousser à l'ordre 2 le développement de Taylor de $k(\omega)$.

II.3 Retour sur la propagation dans un plasma

Dans un plasma, on avait obtenu la relation de dispersion suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (4.24)$$

Selon la valeur de ω , k est soit réel, soit imaginaire pur.

a) Dispersion à haute fréquence

Étudions dans un premier temps le cas où $\omega > \omega_p$. Il n'y a alors pas d'absorption, comme k est réel. Par exemple il y a de la dispersion, car la vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c \quad (4.25)$$

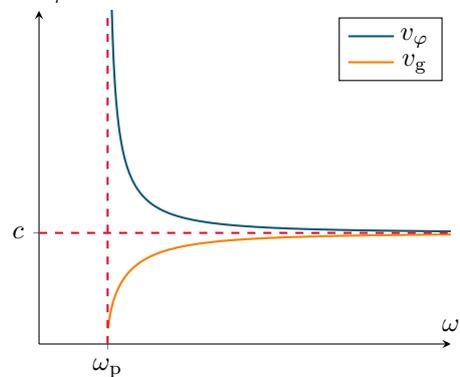
La vitesse de phase dépend donc de ω , d'où la dispersion. D'autre part, on observe qu'elle est toujours supérieure à la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide c . Cela ne pose aucun problème physique, étant donné qu'une OPPH est partout, à tout instant, et ne transmet pas d'information. Par contre la vitesse de groupe doit être inférieure à c , on l'obtient en différenciant la relation de dispersion :

*

$$2kdk = 2\omega \frac{d\omega}{c^2} \iff v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c \quad (4.26)$$

On observe bien que la vitesse de groupe, qui est rappelons-le la vitesse de propagation de l'énergie, est bien toujours inférieure à c .

Dans le cas où $\omega \gg \omega_p$, le plasma se comporte comme le vide, et est non dispersif $v_\varphi = v_g \simeq c$ (le plasma « ne suit plus » les perturbations de l'onde : il n'interagit plus avec l'onde qui se propage comme si le milieu était le vide.). Cependant l'hypothèse que $\rho = 0$ n'est plus forcément vérifiée à haute fréquence.



b) Structure de l'onde

Dans le cas où $\omega > \omega_p$, les champs électriques et magnétiques s'écrivent :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_r(\omega)x + \varphi) \quad (4.27)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{v_\varphi} \neq \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} \quad (4.28)$$

*

Une OEMPPH dans un plasma possède une relation de structure similaire à celle d'une OEMPPH dans le vide, mais du fait de la dispersion, cette relation n'est valable QUE pour une OPPH de pulsation donnée.

On peut alors calculer le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\omega \mu_0} \vec{E}_0 \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) \cos^2(\omega t - k_r(\omega)x + \varphi) \implies \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \vec{e}_x \neq \vec{0} \quad (4.29)$$

L'onde électromagnétique transporte bien de l'énergie dans le domaine spectral de transparence du plasma.

On peut montrer qu'à partir de la densité volumique d'énergie totale :

$$w_{em} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}nm_e v^2 \quad (4.30)$$

en prenant en compte l'énergie cinétique des électrons mis en mouvement par l'onde, la vitesse de propagation de l'énergie vaut

$$v_e = \frac{\langle \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_x \rangle dt dS}{\langle w_{em} S dt \rangle} = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g \quad (4.31)$$

II.4 Cas de l'onde évanescente : absence de propagation

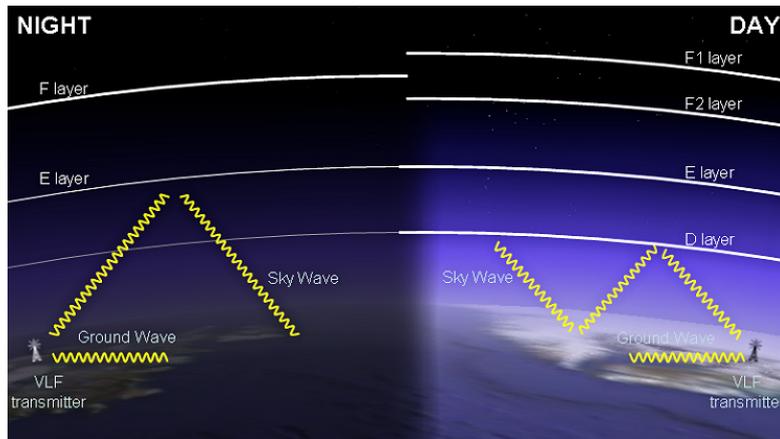
Étudions enfin le cas où $\omega < \omega_p$. Alors $k^2 < 0$ d'où $k_i = \pm \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$, et $k_r = 0$. L'onde résultante s'écrit alors, en ne conservant que la solution physiquement acceptable (non divergente) où $k_i = -\frac{1}{\delta}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t) e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (4.32)$$

* L'onde **ne se propage pas**, il s'agit d'une sorte d'onde stationnaire spatialement amortie. On parle d'**onde évanescente**, qui s'atténue sur une distance caractéristique δ . En calculant le vecteur de Poynting dans le plasma, on peut montrer que $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$! Cette onde évanescente ne transporte, ni ne dissipe, aucune énergie (en moyenne). L'interaction d'une OPPH arrivant sur ce type de milieu met donc en mouvement les particules du plasma qui vont donc générer une onde réfléchie, mais sans aucune perte ni transmission.

II.5 Application aux télécommunications

L'ionosphère se comporte alors comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure $f_p \sim 1$ MHz pour les ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques. Il faut évidemment en prendre compte lors des procédés de télécommunications avec les satellites ou engins spatiaux (à haute fréquence), mais cela permet également à basse fréquence d'émettre à grande distance en utilisant la réflexion parfaite des OEMPPH sur l'ionosphère.



Ce processus a été mis en évidence par G. Marconi en 1901, qui a réalisé les premières transmissions hertziennes transatlantiques. Notons que selon l'angle d'émission ou la période d'émission (jour / nuit), l'onde peut être transmise ou réfléchie, pour une même fréquence.

III. Ondes électromagnétiques planes dans des milieux conducteurs

III.1 Présentation du modèle

On cherche à décrire la propagation d'une onde électromagnétique dans des milieux conducteurs. On a vu que le modèle de Drüde nous permettait de relier le vecteur densité de courant à \vec{E} selon

$\vec{j} = \gamma \vec{E}$, où $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$, où n est la densité d'électrons libres, e la charge élémentaire, τ le temps de relaxation, interprété comme la durée moyenne entre deux collisions successives d'un électron sur les cations du réseau, et m la masse d'un électron.

On peut étendre cette notion en régime sinusoïdal forcé et l'on montre facilement à l'aide de la LQM que :

$$\underline{\vec{j}} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau} \underline{\vec{E}} \quad (4.33)$$

mais comme $\frac{1}{\tau} \sim 10^{14}$ Hz, tant que l'on ne considère pas des ondes dans le domaine optique, on peut approximer $\gamma = \gamma_0$.

Comme pour le plasma, on réalise quelques hypothèses :

- on néglige la force magnétique qui s'exerce sur un électron, tant que ce dernier n'atteint pas des vitesses relativistes ;
- pour pouvoir utiliser $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$, il faut que le champ électrique soit uniforme et quasi-permanent, ce qui n'est *a priori* pas le cas. Si le champ électrique ne varie pas trop dans le temps ni l'espace entre deux collisions, la loi d'Ohm locale sera toujours valable. Il faut donc $T \gg \tau \iff f \ll \frac{1}{\tau}$ et $\lambda \gg \ell$, où ℓ est le libre parcours moyen, distance moyenne parcourue par un électron entre deux collisions.

III.2 Équation de propagation d'une OEMPPH à basse fréquence

a) Simplification des équations de Maxwell

L'équation de conservation de la charge doit être vérifiée dans le métal, ce qui impose la relation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \text{div } \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \rho \quad (4.34)$$

*

L'intégration permet d'écrire $\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau'}}$ avec $\tau' = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} \simeq 10^{-18}$ s. Aux fréquences auxquelles on travaille, on a donc toujours $T \gg \tau \gg \tau'$, ce qui signifie que la relaxation de la densité volumique de charge est toujours plus rapide que ce qui lui pourrait être imposée par le champ électrique.

Propriété

En présence d'une onde électromagnétique de fréquence $f \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14}$ Hz, la densité volumique de charge est uniformément et constamment nulle :

$$\rho(M, t) = 0 \quad (4.35)$$

conduisant à la simplification de l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = 0$.

D'autre part, dans l'équation de Maxwell-Ampère, on peut négliger les courants de déplacement :

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{1}{\omega \tau'} \gg 1 \quad (4.36)$$

Donc l'équation de Maxwell-Ampère devient $\text{rot } \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}$.

b) Établissement de l'équation de propagation du champ électrique



Exercice

À partir des approximations précédentes, déterminer l'EDP vérifiée par \vec{E} dans un conducteur ohmique. On part de l'équation de Maxwell-Faraday, où on lui applique comme d'habitude l'opérateur rotationnel :

$$\text{rot } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) \iff 0 - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff \Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.37)$$

On reconnaît là une équation de diffusion !

c) Relation de dispersion

Cherchons une solution sous la forme d'une pseudo-OEMPPH, de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$:

$$(-j\underline{k})^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 (j\omega) \vec{E} \iff \underline{k}^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega \quad (4.38)$$

On peut alors déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\underline{k} = k_r + jk_i$ de deux manières :

- soit en écrivant astucieusement le nombre complexe :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega = e^{-j\frac{\pi}{2}} \mu_0 \gamma_0 \omega \implies \underline{k} = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \frac{1-j}{\delta} \quad (4.39)$$

en posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ homogène à une longueur, d'où on en déduit

$$k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} \quad (4.40)$$

- soit en écrivant l'égalité entre les parties réelles et imaginaire de l'équation complexe, sachant que $\underline{k}^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2jk_r k_i$:

$$k_r^2 - k_i^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2k_r k_i = -\mu_0 \gamma_0 \omega \quad (4.41)$$

soit $|k_r| = |k_i| = \frac{1}{\delta}$ et comme $k_r k_i < 0$, la partie réelle et imaginaire sont de signes opposés, d'où :

$$k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} \quad (4.42)$$

III.3 Effets d'un conducteur sur la propagation d'une OEMPPH

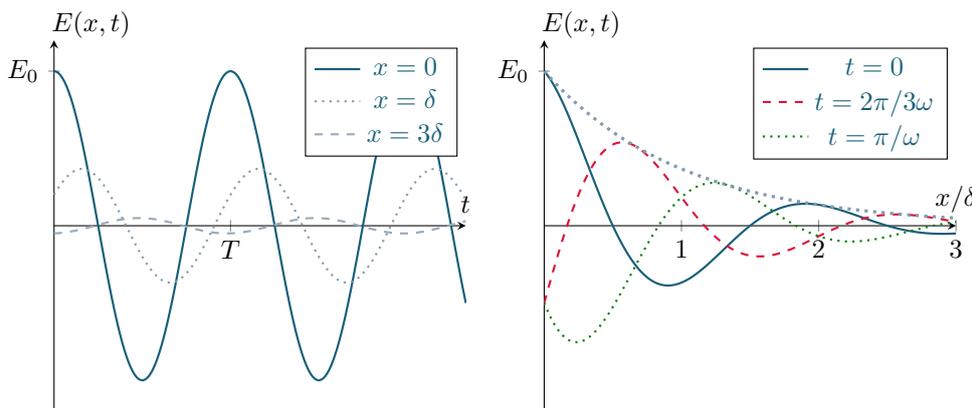
À partir de la relation de dispersion et des solutions obtenues, on peut réécrire le champ électrique résultant :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\mp \frac{x}{\delta}} e^{j\left(\omega t \mp \frac{x}{\delta}\right)} \quad (4.43)$$

La solution en exponentielle croissante diverge, on l'écarte des solutions physiques recherchées pour la propagation, le milieu n'étant pas amplificateur (pas d'apport d'énergie). Il vient donc, en repassant en réel :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right) \quad (4.44)$$

correspondant à de la propagation avec un terme d'atténuation (lié à l'effet Joule!).



Notons que la vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} \quad (4.45)$$

Elle dépend donc de ω : un **conducteur ohmique est donc un milieu dispersif et absorbant pour des OEMPPH**.

- * La distance δ est appelée « **épaisseur de peau** », et le phénomène physique **effet de peau** : une onde électromagnétique pénètre donc dans le conducteur sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ , en étant atténuée.

L'effet est d'autant plus visible à haute fréquence, car l'épaisseur de peau décroît avec ω . Cela a quelques conséquences :

- pour le transport électrique à $f = 50$ Hz, des câbles en cuivre ont une épaisseur de peau de $\delta = 9 \cdot 10^{-3}$ m : même s'il existe des champs électriques et magnétiques dans tout le volume, ils vont se concentrer sur la périphérie, d'où l'usage de câbles creux ;
- pour l'émission d'ondes radio pour des fréquences allant jusqu'au GHz, une antenne creuse fera parfaitement l'affaire ;
- lorsqu'on utilise les phénomènes inductifs pour chauffer le fond d'une casserole, la fréquence utilisée est de l'ordre du kHz : en effet, bien que la puissance dissipée par les courants de Foucault soit proportionnelle à ω^2 , l'épaisseur de peau limite la localisation des champs et un calcul complet montre alors qu'il n'est pas pertinent d'augmenter trop la fréquence.

III.4 Aspects énergétiques

Calculons le champ magnétique à partir de l'expression du champ électrique, considéré suivant \vec{e}_y :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1-j}{\delta\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y E_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta + \varphi)} \quad (4.46)$$

soit en notant que $1-j = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$, il vient en repassant aux notations réelles :

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}E_0}{\delta\omega} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_z \quad (4.47)$$

Calculons alors la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2}E_0^2}{\delta\omega\mu_0} e^{-2x/\delta} \langle \cos(\omega t - x/\delta + \varphi) \cos(\omega t - x/\delta + \varphi - \pi/4) \rangle \vec{e}_x \quad (4.48)$$

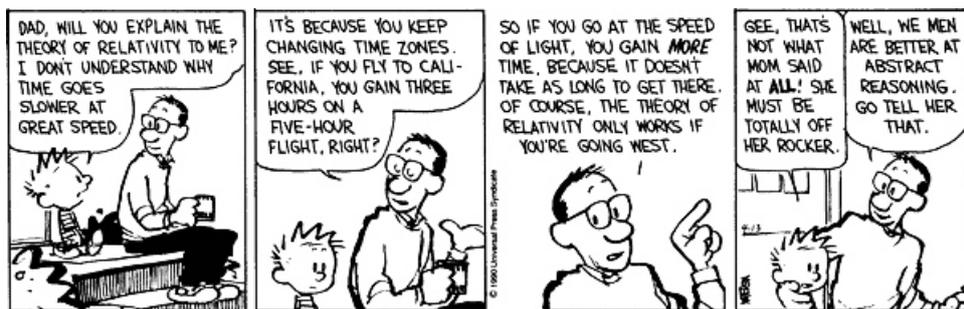
soit en développant le produit de cosinus, on montre que la valeur moyenne vaut $\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, d'où :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\delta\omega\mu_0} e^{-2x/\delta} \vec{e}_x \quad (4.49)$$

L'onde transporte donc de moins en moins d'énergie au fur et à mesure que l'on progresse dans le métal, ceci étant dû au fait que l'onde cède de l'énergie à la matière, dissipée ensuite par effet Joule.

III.5 Cas du métal parfait

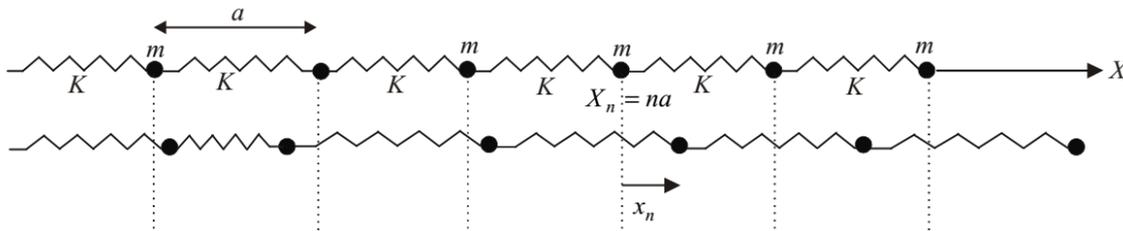
Dans le cas où le métal est parfait, on a par définition $\gamma_0 \rightarrow +\infty$. Par conséquent, dans un tel milieu l'épaisseur de peau tend vers zéro, et aucun champ électromagnétique ne peut y exister : tous les champs (\vec{E} , \vec{B} , \vec{j}) sont expulsés en surface.



Exercices

4.1 Dispersion dans une chaîne infinie d'atomes

On considère une chaîne infinie linéaire d'atomes ponctuels de masse m liés par des ressorts de raideur K . La chaîne est portée par l'axe OX ; à l'équilibre, les atomes occupent les positions $X = na$ avec $n \in \mathbb{Z}$ où a est la longueur à vide des ressorts.



- Établir les équations différentielles régissant la position x_n de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre.
- On cherche des solutions sous la forme $\underline{x}_n = Ae^{i(\omega t - kX_n)}$, avec A une constante réelle. Déterminer la relation de dispersion.
Montrer que la chaîne se comporte comme un filtre passe-bas dont on calculera la pulsation de coupure ω_c . Tracer le graphe $\omega(k)$.
- Calculer \underline{x}_n lorsque $\omega = \omega_c$. Commenter.
- Calculer \underline{x}_n lorsque $\omega \ll \omega_c$. Commenter. Déterminer alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde. Montrer que l'on peut déterminer dans ce cas une équation d'onde et retrouver les résultats précédents.

-
- Par la LQM appliquée à l'élément indicé n , on aboutit à :

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = \omega_0^2 (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \quad (4.50)$$

en notant $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$.

- On injecte la forme de solution dans l'équation précédente :

$$-\omega^2 \underline{x}_n = \omega_0^2 (e^{-ika} - 2 + e^{+ika}) \underline{x}_n \iff \omega^2 = \omega_0^2 (2 - 2\cos(ka)) = 2\omega_0^2 (1 - \cos(ka)) \quad (4.51)$$

soit en l'écrivant sous la forme d'un carré :

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \times 2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) \implies \boxed{\omega = 2\omega_0 \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|} \quad (4.52)$$

On note qu'il s'agit d'une relation de dispersion non linéaire, on a donc nécessairement de la dispersion. On constate également que l'on peut se limiter à $k \in \left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a} \right]$ pour couvrir toutes les valeurs de ω (en cristallographie, on parle de « première zone de Brillouin »). Le tracé graphique (arche de sinus), conduit à une valeur maximale de fréquence de $\omega_c = 2\omega_0 = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$. On a donc bien affaire à un filtrage passe-bas !

- Lorsque $\omega = \omega_c$, $k = \pm \frac{\pi}{a}$, donc $\underline{x}_n = Ae^{i(\omega t \pm n\pi)}$, c'est-à-dire encore, en réel : $x_n(t) = A \cos(\omega t \pm n\pi) = \pm A \cos(\omega t)$, c'est-à-dire qu'on a un oscillateur harmonique.
- Lorsque $\omega \ll \omega_c$, la relation de dispersion peut être approximée par $\omega \simeq \omega_c \frac{ka}{2} = \omega_0 ka$, c'est-à-dire la relation de dispersion associée à une équation de d'Alembert de célérité $\omega_0 a$. Les vitesses de phase et de groupe sont égales à $v_\varphi = v_g = \omega_0 a$. Si on reprend l'équation différentielle initiale, on peut conduire un DL en posant $x(u = na, t) = x_n$ et aboutir à :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \quad (4.53)$$

c'est-à-dire une équation de d'Alembert de célérité $c = \omega_0 a$.

4. 2 Corde vibrante verticale

Une corde vibrante verticale de masse linéique μ et de longueur $\ell \simeq 10$ m est suspendue par une de ses extrémités A , l'autre extrémité B étant libre. Au repos, A est fixe et la corde est verticale. Lorsqu'on impose à l'extrémité A un déplacement $x_A = a_M \cos(\omega t)$, on constate que la corde se déforme avec un déplacement $x(z, t)$ de pulsation ω dont l'amplitude augmente quand on s'éloigne de A . Le champ de pesanteur \vec{g} est supposé uniforme.

1. Établir l'expression de la tension $T(z)$ en tout point de la corde et montrer que :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(\ell - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (4.54)$$

2. On se place "au début" de la corde, ce qui permet de remplacer $\ell - z$ par ℓ dans le coefficient variable de l'équation précédente. Établir la relation de dispersion et interpréter l'observation.

1. On effectue la même démarche que lors de l'établissement de l'équation de propagation d'une onde transversale sur une corde, mais on prend en compte le poids, cette fois. La LQM appliquée à un élément de corde $d\ell \simeq dz$, avec $\alpha \simeq \tan \alpha = \frac{\partial x}{\partial z}$:

$$\mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{e}_x = \mu dz g \vec{e}_z + \vec{T}(z + dz) - \vec{T}(z) \quad (4.55)$$

soit en projection suivant \vec{e}_z :

$$0 = \mu g dz + T(z + dz, t) \cos \alpha(z + dz, t) - T(z, t) \cos \alpha(z, t) \simeq \mu g + \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (4.56)$$

dont l'intégration conduit à $T(z, t) = -\mu g z + f(t)$, sachant que les conditions aux limites (soit en $z = \ell$ où la tension s'annule, soit en $z = 0$ où la tension s'obtient par l'application de la loi des actions réciproques) conduit à $f(t) = \mu g \ell$ et $T(z) = \mu g(\ell - z)$. On projette ensuite selon \vec{e}_x :

$$\mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T(z + dz) \sin \alpha(z + dz) - T(z) \sin \alpha(z) \simeq \frac{\partial}{\partial z} (T(z) \alpha(z)) dz \iff \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} (\mu g(\ell - z) \frac{\partial x}{\partial z}) \quad (4.57)$$

soit en développant la dérivée :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(\ell - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (4.58)$$

2. Si on se place au début de la corde, en considérant $z \ll \ell$, on peut injecter une forme d'onde pour obtenir l'équation de dispersion, l'EDP étant alors linéaire :

$$-\omega^2 = -g(-jk) + g\ell(-k^2) \iff k^2 + j \frac{1}{\ell} k - \frac{\omega^2}{g\ell} = 0 \quad (4.59)$$

c'est une équation complexe, on peut calculer le discriminant $\Delta = -\frac{1}{\ell^2} + 4 \frac{\omega^2}{g\ell}$. Ainsi si $\Delta > 0$, $\omega > \sqrt{\frac{g}{4\ell}}$, on a une solution complexe, sinon imaginaire pure (et donc pas de propagation). On se place donc dans ce cadre :

$$k = \frac{1}{2} \left(-j \frac{1}{\ell} \pm \sqrt{\Delta} \right) \quad (4.60)$$

soit une propagation avec amplification sur une distance caractéristique $\delta = 2\ell$, ce qui permet d'expliquer l'observation.

4. 3 Propagation d'ondes longitudinales dans un plasma

On utilise le modèle du plasma peu dense et non relativiste mais on retire l'hypothèse localement neutre. On s'intéresse à la propagation d'ondes planes progressives harmoniques, de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ avec $\vec{k} = k \vec{e}_x$.

1. Montrer que la non neutralité du plasma permet l'existence d'ondes longitudinales. Par la suite, on étudiera exclusivement ces ondes, on posera donc $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$.
2. Déterminer le champ magnétique d'une telle onde.
3. Déterminer deux relations entre \vec{E} et \vec{j} et en déduire l'équation vérifiée par \vec{E} .
4. Déterminer la relation de dispersion et commenter.
5. Calculer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie électromagnétique. Commenter.

1. Si on reprend l'équation de Maxwell-Gauss en complexe, on a bien $\rho = -\varepsilon_0 j \vec{k} \cdot \vec{E}$. Donc un plasma localement non neutre permet l'existence d'ondes longitudinales, c'est-à-dire de direction \vec{k} .

2. On peut utiliser la relation de structure, car cette dernière est valable lorsqu'on prend une forme d'onde plane progressive harmonique, quelle que soit la direction du champ électrique. On aboutit alors à $\vec{B} = 0 = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.

3. À partir de l'équation de Maxwell-Ampère, on a donc $\text{rot} \vec{B} = \vec{0} \implies \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$. D'autre part, la LQM appliquée à un électron conduit à :

$$m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} \implies \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = n_e (-e) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{n_e e^2}{m_e} \vec{E} \quad (4.61)$$

On injecte alors la première équation dans la deuxième :

$$-\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{n_e e^2}{m_e} \vec{E} \iff \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{E} = \vec{0} \quad (4.62)$$

en introduisant la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$.

4. La relation de dispersion s'écrit alors $\omega^2 = \omega_p^2$ en remplaçant le champ dans l'équation. On a donc propagation d'ondes longitudinales dans le plasma quelle que soit la longueur d'onde, pourvu que l'on ait la bonne fréquence !

5. Comme le champ magnétique est nul, le vecteur de Poynting l'est aussi. Calculons la densité volumique d'énergie électromagnétique, en tenant compte de l'énergie cinétique des électrons ($\underline{v} = +j \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}$ avec $\omega = \omega_p$) :

$$w = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{2} n_e m_e v^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega_p t - kx) + \frac{1}{2} n_e m_e \left(\frac{e}{m_e \omega_p} E_0 \sin(\omega_p t - kx) \right)^2 \quad (4.63)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \left(\cos^2(\omega_p t - kx) + \sin^2(\omega_p t - kx) \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad (4.64)$$

L'énergie volumique est donc constante, avec un échange complémentaire entre l'énergie volumique du champ électrique et l'énergie volumique cinétique des électrons. C'est cohérent avec un vecteur de Poynting nul, il n'y a pas de transport d'énergie.

4. 4 Guide d'onde rectangulaire

On considère un guide d'onde métallique creux d'axe Oz , dont la section droite est le rectangle $0 < x < a$ et $0 < y < b$.

L'intérieur du guide est rempli d'air assimilé au vide. On adopte pour les parois le modèle du conducteur parfait.

On se propose d'étudier la propagation suivant Oz dans ce guide d'une onde électromagnétique progressive monochromatique de pulsation ω dont le champ électrique s'écrit :

$\vec{E} = f(x, y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x$ où $f(x, y)$ est une fonction réelle de x et y et k_g une constante positive.

On posera $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ (λ_g est la longueur d'onde guidée) et on notera $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$

A) Structure de l'onde

1. Montrer que $f(x, y)$ ne dépend pas de x .
2. Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $f(y)$.
3. Expliciter la fonction $f(y)$. Montrer qu'il intervient un nombre entier n non nul (supposé positif).
À chaque valeur de n correspond un mode de propagation. Décrire le type d'onde auquel on aboutit. Que laissent prévoir les conditions aux limites du champ électrique en $x = 0$ et $x = a$?
4. Écrire les composantes du champ magnétique. Commenter la structure des champs. Vérifier que le champ magnétique satisfait les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = b$? Que se passe-t-il en $x = 0$ et $x = a$?
5. Exprimer k_g en fonction de ω , c , n et b . En déduire λ_g en fonction de λ_0 , b et n . Montrer qu'il existe une fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle il n'y a plus de propagation. A.N : $f_c = 2,5$ GHz pour $n = 1$, calculer b .
6. Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g de l'onde en fonction de c , n et du rapport f/f_c . A.N : calculer v_g et v_φ pour $f = 2f_c$ et $n = 1$.

B) Transmission de l'énergie

1. Donner l'expression du vecteur de Poynting et sa valeur moyenne. Calculer la puissance moyenne transmise par une section droite.
2. Calculer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie.

3. À l'aide des résultats précédents, en déduire la vitesse de propagation v_e de l'énergie. Comparer à v_g .
4. Que se passe-t-il si les parois du guide ont une conductivité finie ?

A) Structure de l'onde

1. À l'intérieur du guide, on a du vide, donc $\rho = 0 = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x}$, conduisant à $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, d'où $f(y)$ uniquement.
2. Dans le vide, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert à 3D que l'on projette selon l'axe (Ox) :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E} \implies -\omega^2 f(y) \cos(\omega t - k_g z) = c^2 f''(y) \cos(\omega t - k_g z) \quad (4.65)$$

soit après simplification :

$$f''(y) + \frac{\omega^2}{c^2} f(y) = 0 \iff f''(y) + k_0^2 f(y) = 0 \quad (4.66)$$

de solution $f(y) = A \cos(k_0 y) + B \sin(k_0 y)$. Comme le champ électrique voit sa composante tangentielle continue à l'interface, et que le champ électrique est nul dans le conducteur parfait, on a donc $f(0) = 0$ et $f(b) = 0$. On a donc d'une part $A = 0$ et d'autre part $\sin(k_0 b) = 0$. On peut alors introduire un entier non nul n tel que :

$$k_0 b = n\pi \iff k_n = \frac{n\pi}{b} \implies f(y) = B \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.67)$$

donc le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \sin(k_n y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x \quad (4.68)$$

On aboutit donc, dans des plans $z = \text{cste}$ à des ondes stationnaires, comme pour une cavité. Concernant ce qu'il se passe en $x = 0$ et $x = a$, comme le champ électrique ne s'annule pas à l'intérieur, cela permet d'envisager *via* la relation de passage qu'il y a une densité surfacique de charge non nulle.

3. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{e}_z - \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y = E_0 k_n \cos(k_n y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_z - E_0 k_g \sin(k_n y) \sin(\omega t - k_g z) \vec{e}_y \quad (4.69)$$

soit après intégration temporelle (sachant que la constante d'intégration est nulle, car ne traduisant pas une onde) :

$$\vec{B} = E_0 \frac{k_g}{\omega} \sin(k_n y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_y + E_0 \frac{k_n}{\omega} \cos(k_n y) \sin(\omega t - k_g z) \vec{e}_z \quad (4.70)$$

Notons que les champs ne vérifient pas la relation de structure et ne sont pas transverses magnétiques (une composante étant selon z). La composante normale du champ magnétique est continue, et doit s'annuler sur les parois, ce que l'on observe en $y = 0$ et $y = b$, où la composante selon \vec{e}_y s'annule bien. En $x = 0$ et $x = a$, c'est pareil. Par contre on note que la composante tangentielle du champ magnétique est non nulle, signe qu'il y a un courant surfacique.

4. Les champs électriques et magnétiques doivent vérifier l'équation de d'Alembert. Si on injecte le champ électrique trouvé dans l'équation projetée selon \vec{e}_x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \Delta E_x = c^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) \implies -\omega^2 = c^2 (-k_n^2 - k_g^2) \iff k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (4.71)$$

conduisant à $k_{g,n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{b\omega} \right)^2}$. On en déduit la longueur d'onde associée :

$$\lambda_{g,n} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2b} \right)^2}} \quad (4.72)$$

Il n'y a plus de propagation à partir du moment où la racine n'est plus définie, c'est-à-dire pour $f < \frac{nc}{2b}$. Numériquement, on trouve donc $b = 6 \text{ cm}$.

5. La vitesse de phase s'exprime facilement par $v_\varphi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{b\omega} \right)^2}}$. D'autre part on a la relation $v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$.

B) Transmission de l'énergie

1. Calcul de produit vectoriel... En moyenne, la composante selon \vec{e}_y est nulle (produit d'un cos par un sin), et seule reste la composante selon \vec{e}_z :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k_g}{2\mu_0 \omega} \sin^2(k_n y) \vec{e}_z \quad (4.73)$$

La puissance moyenne transmise par une section droite vaut alors :

$$\mathcal{P} = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot dx dy \vec{e}_z = \frac{E_0^2 k_g}{2\mu_0 \omega} a \int_0^b \sin^2(k_n y) dy = \frac{E_0^2 k_g a b}{4\mu_0 \omega} \quad (4.74)$$

2. La densité volumique d'énergie vaut :

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.75)$$

On écrit directement le développement en moyennant les \cos^2 et \sin^2 temporels :

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(k_n y) + \frac{1}{4\mu_0} \left(\frac{E_0^2 k_g^2}{\omega^2} \sin^2(k_n y) + \frac{E_0^2 k_n^2}{\omega^2} \cos^2(k_n y) \right) \quad (4.76)$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left(\sin^2(k_n y) + \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \sin^2(k_n y) + \frac{c^2 k_n^2}{\omega^2} \cos^2(k_n y) \right) \quad (4.77)$$

puis en utilisant $\frac{\omega^2}{c^2} = k_g^2 + k_n^2$ obtenue précédemment :

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left(\sin^2(k_n y) \left(1 + \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \right) + \left(1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \right) \cos^2(k_n y) \right) \quad (4.78)$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left(1 + \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} (\sin^2(k_n y) - \cos^2(k_n y)) \right) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left(1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \cos(2k_n y) \right) \quad (4.79)$$

3. Calculons la densité linéique d'énergie électromagnétique :

$$\iint \langle w \rangle dx dy = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 ab \quad (4.80)$$

que l'on compare à la puissance moyenne transmise par une section droite :

$$\mathcal{P} = \frac{k_g}{\mu_0 \omega \varepsilon_0} \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 ab = \frac{c^2}{v_\varphi} \iint \langle w \rangle dx dy \quad (4.81)$$

conduisant à $v_e = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$.

4. Si les parois du guide ont une conductivité finie, les conditions aux limites édictées ne sont plus complètement vraies car on a une onde atténuée spatialement au sein du conducteur. On peut également imaginer que, du fait de la dissipation, l'onde perd en énergie lors de sa propagation selon \vec{e}_z .

Cependant l'épaisseur de peau pourra être suffisamment faible pour considérer que l'approximation de conducteur parfait est toujours valable.

Notons que cet exemple illustre un phénomène de dispersion, alors même que les champs vérifient une équation de d'Alembert !!

4.5 Ondes hertziennes dans l'eau de mer

On étudie la propagation des ondes hertziennes dans l'eau de mer. On admet que l'eau est localement neutre ($\rho = 0$). Sa permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 80$ et sa conductivité $\sigma = 6,23 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ sont supposées réelles.

1. Quel est le domaine de fréquence des ondes hertziennes ? Comparer la conductivité du cuivre à celle de l'eau de mer.
2. On admet que dans ce milieu, il suffit de remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0 \varepsilon_r$ dans les équations de Maxwell. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.
3. Établir la relation de dispersion.
4. Déterminer l'ordre de grandeur de la pulsation à laquelle l'absorption commence à être négligeable devant la propagation. Quelle est alors la vitesse de phase en absence d'absorption ?
5. On considère une onde de fréquence $f = 100 \text{ MHz}$. Déterminer la valeur de la pulsation spatiale k . Déterminer la distance caractéristique d'absorption de l'onde et sa vitesse de phase. Y a-t-il dispersion ? Pourquoi n'utilise-t-on pas d'ondes hertziennes pour les communications sous-marines ?

1. Autour de 100 kHz à 100 MHz (grandes ondes, FM). La conductivité de l'eau de mer est bien plus basse que celle du cuivre ($\sigma(\text{Cu}) \sim 6 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$).

2. On a alors, en conservant le courant de déplacement car la conductivité est beaucoup plus faible que celle du cuivre, et ε_r important (on n'a donc plus $\|\vec{j}\| \gg \|\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial E}{\partial t}\|$) :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.82)$$

3. La relation de dispersion est alors :

$$-k^2 = \frac{\varepsilon}{c^2}(-\omega^2) + j\omega\mu_0\sigma \iff k^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma \quad (4.83)$$

4. La relation de dispersion fait intervenir une partie réelle qui prédomine à haute fréquence (pas d'atténuation) et une partie imaginaire à plus basse fréquence ($\propto \omega$) traduisant l'atténuation. Lorsque les deux termes sont du même ordre de grandeur :

$$\varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \sim \mu_0\sigma\omega \iff \omega_c \sim \frac{\mu_0 c^2 \sigma}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (4.84)$$

On trouve numériquement $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 1,4 \text{ GHz}$. Pour $f \gg f_c$, on a alors $k^2 = \frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2}$ conduisant à $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 3,4 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

5. On peut bien évidemment conduire à une résolution numérique. Précisons néanmoins qu'il est possible d'effectuer un calcul complet ! On identifie partie réelle et partie imaginaire dans l'équation précédente :

$$\begin{cases} k_r^2 - k_i^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} & (4.85) \\ 2k_r k_i = -\omega\mu_0\sigma & (4.86) \end{cases}$$

permettant d'en conclure que la partie réelle et la partie imaginaire sont de signe opposé. Calculons donc k_i en injectant l'expression de k_r :

$$\left(\frac{\omega\mu_0\sigma}{2k_i}\right)^2 - k_i^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.87)$$

On pose $X = k_i^2$, on aboutit à l'équation polynomiale suivante :

$$X^2 + \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} X - \frac{\omega^2 \mu_0^2 \sigma^2}{4} = 0 \quad (4.88)$$

avec $\Delta = \varepsilon_r^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + \omega^2 \mu_0^2 \sigma^2 > 0$, d'où :

$$X = k_i^2 = -\frac{\varepsilon_r \omega^2}{2c^2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (4.89)$$

sachant que $X \geq 0$, seule la solution avec + est valide, d'où :

$$k_i = \pm \sqrt{\sqrt{\Delta}/2 - \frac{\varepsilon_r \omega^2}{2c^2}} \quad (4.90)$$

On choisit $k_i < 0$ pour avoir $k_r > 0$ (propagation dans le sens positif). Cela conduit bien à une atténuation de distance caractéristique $\delta = \frac{1}{|k_i|} = 21 \text{ mm}$. On connaît alors $k_r = k = \frac{\omega\mu_0\sigma}{2|k_i|} = 51,3 \text{ m}^{-1}$. Il y a dispersion car l'expression de k_i fait intervenir ω , donc la vitesse de phase dépend de ω . $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{2k_i}{\mu_0\sigma} = 1,2 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Il apparaît ainsi évident qu'on n'utilise pas ce type d'ondes pour les communications sous-marines, vu leur atténuation immédiate et la dispersion.

4. 6 Propagation dans un milieu diélectrique

Une onde plane monochromatique de pulsation ω se propage suivant Ox dans un milieu neutre. Dans chaque atome du milieu, les électrons (masse m , charge $-e$, densité volumique n), sont liés au noyau supposé immobile. La force rappelant les électrons vers leur position moyenne est modélisée par une force élastique $\vec{f}_r = -K \vec{r}$. Les électrons subissent également une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \dot{\vec{r}}$, modélisant les collisions et l'énergie perdue par rayonnement. On posera $\omega_0^2 = K/m$, $\omega_p^2 = ne^2/m\varepsilon_0$.

- Déterminer l'équation du mouvement d'un électron et en déduire le vecteur densité de courant \vec{j}_p en fonction du champ \vec{E} de l'onde.
- Déterminer la relation de dispersion. La simplifier dans le cas où l'absorption est négligeable, ce qu'on suppose par la suite.
- Montrer alors qu'il n'y a pas de propagation dans une bande de pulsation à déterminer.
- Dans le cas où la propagation est possible,

(a) Déterminer la vitesse de phase v_φ .

(b) Montrer que les vitesses de phase et de groupe sont reliées par $v_\varphi v_g = \frac{c^2}{1 + \frac{\omega_0^2 \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$

- (c) Déterminer la valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$ du vecteur de Poynting en fonction de E_0 , ε_0 , v_φ , c et \vec{e}_x .
- (d) Déterminer la valeur moyenne $\langle u_{em} \rangle$ de l'énergie électromagnétique volumique en fonction de E_0 , ε_0 , c et v_φ .
- (e) Déterminer les valeurs moyennes $\langle e_c \rangle$ et $\langle e_p \rangle$ de l'énergie cinétique volumique et de l'énergie potentielle volumique en fonction de E_0 , ε_0 , ω_p , ω_0 et ω .
- (f) Calculer l'énergie volumique moyenne $\langle u \rangle$ et en déduire la vitesse de propagation de l'énergie.

1. LQM à un électron dans le référentiel du noyau, supposé galiléen :

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = -e\vec{E} - K\vec{r} - \alpha \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.91)$$

soit en passant en notations complexes pour exprimer la vitesse :

$$\vec{v} \left(j\omega + \frac{\alpha}{m} + \frac{\omega_0^2}{j\omega} \right) = -\frac{e}{m} \vec{E} \quad (4.92)$$

d'où le vecteur densité de courant d'électrons :

$$\vec{j}_p = n(-e)\vec{v} = \frac{ne^2}{m(j\omega + \frac{\alpha}{m} + \frac{\omega_0^2}{j\omega})} \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} \vec{E} \quad (4.93)$$

en introduisant la pulsation plasma et $\tau = \frac{\alpha}{m}$ une constante de temps d'amortissement.

2. On utilise les équations de Maxwell pour aboutir à :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \implies -\underline{k}^2 = \mu_0 j\omega \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.94)$$

d'où la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} \right) \quad (4.95)$$

Pour qu'il n'y ait pas d'absorption, il faut que $\underline{k} \in \mathbb{R}$. Il faut donc que $\frac{\omega}{\tau} \ll \omega_0^2 - \omega^2$, d'où en simplifiant :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (4.96)$$

3. $k^2 > 0$ à la seule condition que $\omega_p^2 > \omega_0^2 - \omega^2 > 0$ conduisant à $\omega < \omega_0$ ou $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ et absence de propagation dans la bande $[\omega_0; \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}]$.

4. (a) On a alors $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}}$.

(b) On différencie la relation de dispersion pour connaître la relation entre les deux vitesses :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \times (2\omega d\omega) \quad (4.97)$$

conduisant après simplification à la relation demandée, avec $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

(c) On peut toujours utiliser, pour une onde plane, la relation $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. Ainsi le vecteur de Poynting se réécrit, en développant le double produit vectoriel :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\mu_0 \omega} \vec{E}^2 \vec{u} \quad (4.98)$$

avec \vec{u} le vecteur directeur de la propagation. En moyenne :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{c^2}{v_\varphi} E_0^2 \vec{u} \quad (4.99)$$

(d) De même :

$$\langle u_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0} \langle B^2 \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_0 c^2 \frac{k^2}{\omega^2} E_0^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_\varphi^2} \right) \quad (4.100)$$

(e) $e_c = n \frac{1}{2} m v^2$, soit avec $\vec{v} = -j \frac{e\omega \vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$:

$$v^2 = \frac{e^2 \omega^2 E^2}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} \implies \langle e_c \rangle = \frac{n e^2 \omega^2 E_0^2}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{\omega^2 \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.101)$$

tandis que l'énergie potentielle volumique :

$$e_p = n \times \frac{1}{2} K r^2 = n \frac{1}{2} K \left(\frac{\vec{v}}{j\omega} \right)^2 = \dots \implies \langle e_p \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{\omega_p^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (4.102)$$

(f) Au total, l'énergie volumique moyenne vaut :

$$\langle u \rangle = \langle u_{\text{em}} + e_c + e_p \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_\varphi^2} + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right) = \dots = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \frac{c^2}{v_g v_\varphi} \quad (4.103)$$

Puis la vitesse de propagation s'obtient en faisant le quotient :

$$\frac{\langle \|\vec{\pi}\| \rangle}{\langle u \rangle} = v_g \quad (4.104)$$

CQFD.