Avant-propos

Cet ouvrage est le fruit de quinze années d'expérience de l'enseignement de l'acoustique, d'abord à l'École nationale supérieure des télécommunications, puis à l'École polytechnique dans le cadre de la majeure de mécanique. Son contenu, dont le champ a été volontairement limité, est conçu comme une introduction à l'étude de la propagation libre et guidée des ondes acoustiques, au rayonnement des structures vibrantes et à l'acoustique des salles. Le niveau de présentation correspond à celui dispensé dans les maîtrises de physique et de mécanique des universités, ou dans les écoles d'ingénieurs.

La présentation retenue consiste à faire alterner l'établissement des fondements théoriques de base (ondes libres et guidées, équations du rayonnement acoustique,...) avec l'étude détaillée d'applications concrètes sélectionnées : rayonnement de plaques, transmission du son à travers une double paroi, étude d'une flûte,... pour ne citer que ces quelques exemples.

L'auteur tient à remercier chaleureusement plusieurs collègues qui ont participé à la rédaction de ce livre. Les premières versions des chapitres sur les *ondes acoustiques planes* et sur *l'acoustique des salles*, notamment, ont été rédigées par Jean Laroche. Le chapitre traitant des *ondes guidées* doit beaucoup à l'aide de Denis Matignon et Jean Kergomard. Enfin, les textes de plusieurs exercices ont été élaborés par l'auteur en collaboration avec Christophe Lambourg.

Palaiseau, le 13 juillet 2001
Antoine Chaigne

Chapitre 1

Ondes acoustiques planes

1.1 Équations fondamentales de l'acoustique linéaire

Ce chapitre est inspiré des livres [1, 2] auxquels on pourra se référer pour plus de détails.

1.1.1 Grandeurs

Outre le temps, les deux grandeurs principales en acoustique sont la pression et la vitesse particulaire.

- La pression acoustique $p(\underline{x}, t)$ est une fonction scalaire du temps t et de la position $\underline{x}$. Elle est définie comme l'écart de pression avec la pression atmosphérique ambiante. On a donc $p(\underline{x}, t) = P(\underline{x}, t) - P_0$ où $P(\underline{x}, t)$ représente la pression totale (en Pa) en $\underline{x}$ et à l'instant t et P_0 représente la pression ambiante au repos. p s'exprime en Pascals, (c'est-à-dire en Newtons par mètre-carré).

- La vitesse $\underline{v}(\underline{x}, t)$ au point $\underline{x}$ à l'instant t est celle d'un volume élémentaire situé autour du point considéré. On supposera dans tout ce qui suit que $\underline{v}(\underline{x}, t) = 0$ au repos.

Une autre grandeur qui intervient est la densité du fluide, $\rho(\underline{x}, t)$, qui est aussi une fonction du temps et de la position.

1.1.2 Équations

Les grandeurs $p(\underline{x},t)$, $\underline{v}(\underline{x},t)$ et $\rho(\underline{x},t)$ sont liées par trois équations qui régissent le comportement du fluide. Pour abréger les notations, on utilisera p au lieu de $p(\underline{x},t)$ ainsi que pour $\underline{v}$ et ρ.

Conservation de la masse

La première équation liant $\underline{v}$ à ρ s'obtient en considérant un volume V délimité par une surface S fermée *immobile.* On écrit simplement que la variation de la masse contenue dans V est égale au flux massique vers l'intérieur du volume à travers S. Cela s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho\, dV\right) = -\oint\!\!\!\oint_S \rho\underline{v}\ \underline{n}\, dS \tag{1.1}$$

où $\underline{n}$ est un vecteur normal à la surface orienté vers l'extérieur de V. Le signe $-$ provient du fait qu'un flux sortant provoque une diminution de la masse.

En utilisant le théorème de Gauss, l'Éq. (1.1) peut se réécrire

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho\, dV\right) = -\iiint_V \underline{\nabla}.(\rho\underline{v})\, dV \tag{1.2}$$

où $\underline{\nabla}.\underline{u}$ est la divergence du vecteur $\underline{u}$. En coordonnées cartésiennes,

$$\underline{\nabla}.\underline{u} \triangleq \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Comme l'Éq. (1.2) est vérifiée quel que soit le volume V, les deux intégrands sont partout égaux et l'on a

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\underline{\nabla}.(\rho\underline{v})} \tag{1.3}$$

C'est ce que l'on appelle l'équation de conservation de la masse.

Équation d'Euler

La seconde équation, qui lie p, $\underline{v}$ et ρ provient de l'application de la relation fondamentale de la dynamique. On considère un volume V délimité par une surface S fermée *se déplaçant avec le fluide* (c'est-à-dire tel que les molécules contenues dans

V à l'instant t' sont celles qui occupaient V à un instant t précédent). La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire

$$\frac{D}{Dt}\left(\iiint_{V(t)} \rho\underline{v}\, dV\right) = -\oiint_S p\underline{n}\, dS + \iiint_V \underline{f}\, dV \tag{1.4}$$

où le terme $-p\underline{n}$ est la force exercée par la pression extérieure par unité de surface, et $\underline{f}$ est une densité volumique de force ; nous pouvons faire deux remarques :

- la force exercée par la pression extérieure est supposée normale à la surface : on a négligé les effets de viscosité.
- en acoustique, on néglige très généralement l'influence des forces volumiques (en particulier de la gravité), et on posera donc $\underline{f} = \underline{0}$.

La notation D/Dt désigne la *dérivée particulaire*, ou encore dérivée temporelle en suivant les particules dans leur mouvement. La dérivée de l'intégrale volumique pose un problème car la surface $S(t)$ suit le fluide et donc varie au cours du temps. Pour calculer cette dérivée temporelle, on fait appel au théorème de transport de Reynolds [3] :

$$\frac{D}{Dt}\left(\iiint_{V(t)} \rho\underline{Q}\, dV\right) = \iiint_V \rho\frac{D\underline{Q}}{Dt}\, dV$$

où $V(t)$ est un volume se déplaçant avec le fluide, $\underline{Q}$ est une quantité quelconque, dépendant du temps et de la position. On remarque que la dérivation de l'intégrand ne concerne pas la densité, ce qui ne serait pas le cas si le volume V était figé[1].

La dérivée droite qui apparaît dans le terme de droite est la dérivée totale par rapport au temps appelée dérivée particulaire (car on suit le mouvement des particules). Comme la grandeur $\underline{Q}$ dépend du temps et de la position, la dérivée particulaire s'obtient simplement par la règle de dérivation chaînée :

$$\frac{D\underline{Q}}{Dt} = \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + (\underline{v}.\underline{\nabla})\,\underline{Q} \qquad \text{avec} \qquad (\underline{v}.\underline{\nabla})\,\underline{Q} \triangleq v_x\frac{\partial \underline{Q}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \underline{Q}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \underline{Q}}{\partial z}$$

Si on applique ce théorème à l'équation (1.4), on obtient

$$\iiint_V \rho\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho\,(\underline{v}.\underline{\nabla})\,\underline{v}\, dV = -\oiint_S p\underline{n}\, dS \tag{1.5}$$

Le second membre peut être réécrit par l'utilisation du théorème de Gauss (en projetant l'Éq. (1.5) sur les trois coordonnées)

$$\iiint_V \rho\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho\,(\underline{v}.\underline{\nabla})\,\underline{v}\, dV = -\iiint_V \underline{\nabla} p\, dV \tag{1.6}$$

[1]Pour comprendre d'où vient ce résultat, on peut représenter l'intégrale volumique comme une somme discrète sur des volumes infinitésimaux se déplaçant avec le fluide : $\iiint_V \rho\underline{Q}\, dV \approx \sum_i \rho\underline{Q}V_i$. On peut alors dériver chaque terme par rapport au temps, et $\frac{D}{Dt}\left(\rho\underline{Q}V_i\right) = \underline{Q}\frac{D(\rho V_i)}{Dt} + \rho V_i\frac{D\underline{Q}}{Dt}$ car D/Dt est un opérateur différentiel du premier ordre. Mais $\frac{D(\rho V_i)}{Dt} = \frac{Dm_i}{Dt} = 0$ car les volumes V_i se déplacent avec le fluide, et donc englobent une masse constante. Le résultat en découle.

où $\underline{\nabla} p$ représente le gradient de la pression.

Comme l'Éq. (1.6) est vérifiée quel que soit le volume V, les deux intégrands sont partout égaux et l'on a

$$\boxed{\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \left(\underline{v} . \underline{\nabla} \right) \underline{v} = -\underline{\nabla} p} \tag{1.7}$$

Cette équation est connue sous le nom d'**équation d'Euler**.

Équation de comportement du fluide

On se contente pour l'instant d'écrire que le comportement du fluide est régi par une loi générale liant la pression à la densité :

$$P = f(\rho) \tag{1.8}$$

On explicitera cette relation par la suite.

1.2 Équation des ondes

Il n'est pas possible à partir des trois équations (1.3) (1.7) et (1.8) d'éliminer deux des inconnues pour arriver à une équation ne faisant intervenir que la troisième. Cela devient possible si les équations sont linéarisées, c'est-à-dire si l'on ne s'intéresse qu'à des développement limités au premier ordre des grandeurs autour de leur valeur au repos. Par exemple, on peut considérer que $\underline{v}$ et ρ sont des fonctions de la pression p que l'on développe selon les puissances de p, en se contentant du premier ordre.

L'équation de conservation de la masse (1.3) développée au premier ordre permet d'obtenir

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \underline{\nabla} . \underline{v}} \tag{1.9}$$

car la vitesse est supposée nulle au repos. Ici, $\rho' = \rho - \rho_0$.

L'équation d'Euler (1.7) donne :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\underline{\nabla} p} \tag{1.10}$$

Et la loi de comportement du fluide (1.8) linéarisée s'écrit

$$\boxed{p = c^2 \rho' \qquad \text{avec} \qquad c^2 \triangleq \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0}} \tag{1.11}$$

où c, homogène à une vitesse est appelé vitesse de propagation des ondes[2].

La combinaison des trois dernières équations permet d'obtenir l'équation des ondes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = 0} \tag{1.12}$$

$$\boxed{\underline{\nabla} p = -\rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \underline{\nabla} . \underline{v}} \tag{1.13}$$

où par définition

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

Cet opérateur est appelé le Laplacien. Les deux équations 1.12 et 1.13 sont les équations fondamentales de la propagation des ondes, dans l'hypothèse des petites perturbations (hypothèse d'élasticité linéaire), et lorsqu'on néglige les pertes visco-thermiques et la viscosité du milieu.

On vérifie facilement que les trois projections de $\underline{v}$ selon les axes x, y et z vérifient la même équation que la pression (Éq. (1.12)).

1.2.1 Vitesse de propagation des ondes

La vitesse de propagation des ondes c est fortement liée aux caractéristiques thermodynamiques du milieu :

$$c^2 \triangleq \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0}$$

Il faut maintenant expliciter la relation thermodynamique liant la pression à la densité. On va supposer ici que le fluide est un gaz vérifiant l'équation des gaz parfaits qui peut s'écrire

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0 + p}{\rho} = \frac{R_0 T}{M}$$

Ici, R_0 est la constante des gaz parfaits ($R_0 = 8314 J/kg/K$), M est le poids moléculaire ($M = 29$ pour l'air), et T est la température en degrés Kelvin. Dans le cas général, la température est également une fonction du temps et de la position, on

[2]Le fait que $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}$ soit nécessairement positif n'est pas immédiat mais peut être montré à partir des principes de la thermodynamique.

voit qu'il s'agit d'une inconnue supplémentaire. Pour permettre de donner une relation liant p et ρ ne faisant pas intervenir d'inconnue supplémentaire, il faut faire une hypothèse sur la nature des transformations subies par le gaz.

On peut proposer deux hypothèses classiques :

Transformations isothermes : T est supposé constante et l'on a

$$\frac{P}{\rho} = Cste \quad \text{soit} \quad \frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} \tag{1.14}$$

Transformations adiabatiques : on a alors

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = Cste \quad \text{soit} \quad \frac{dP}{P} = \gamma\frac{d\rho}{\rho} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{1.15}$$

$\gamma = 1.4$ pour l'air. Les quantités c_p et c_v sont les capacités calorifiques du fluide à pression (resp. volume) constant(e).

Ainsi, si l'on suppose les transformations isothermes,

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R_0 T}{M} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{R_0 T}{M}}$$

mais si on suppose les transformations adiabatiques,

$$\frac{dP}{P} = \gamma\frac{d\rho}{\rho} \quad \text{et} \quad \boxed{c = \sqrt{\gamma\frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma\frac{R_0 T}{M}}} \tag{1.16}$$

En acoustique, on convient de supposer que les transformations sont adiabatiques, car la célérité des ondes donnée par l'expression (1.16) est en bon accord avec les mesures. En toute rigueur, les transformations ne sont ni parfaitement adiabatiques, ni parfaitement isothermes.

La vitesse des ondes dans l'air à 20 degrés Celsius est d'environ 340 ms^{-1}. Cette vitesse dépend de la température, de la pression et de l'humidité. Si l'on écrit $T = 273 + \vartheta$ où ϑ est en degrés Celsius, on peut réécrire l'équation (1.16) sous la forme

$$c = \sqrt{\gamma\frac{R_0}{M}(273+\vartheta)} = c_0\sqrt{1+\frac{\vartheta}{273}} \approx 331.6 + 0.6\ \vartheta\ m/s \qquad \text{avec } \vartheta \text{ en } {}^o\text{C} \tag{1.17}$$

La théorie permettant d'obtenir la vitesse des ondes acoustiques dans un liquide est plus complexe que dans le cas d'un gaz. Il faut cependant retenir que la vitesse des ondes dans l'eau à 0 degré Celsius est d'environ $\boxed{1400\ \text{ms}^{-1}}$.

1.2.2 Impédance, intensité acoustique et énergie acoustique

Impédance acoustique spécifique Lorsqu'une onde acoustique est en contact avec une surface, on définit l'impédance acoustique spécifique Z par

$$\boxed{Z = \frac{p}{(\underline{v}.\underline{n})}} \tag{1.18}$$

où $\underline{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface et p et $\underline{v}$ sont évaluées en un point $\underline{x}$ de la surface. Z est a priori une fonction du temps t, et du point $\underline{x}$ choisi à la surface. Z s'exprime en $kg/m^2/s$ et peut être complexe (lorsque la pression est complexe).

Dans de nombreux cas on montre (ou on fait l'hypothèse) que l'impédance acoustique spécifique est une constante, indépendante de l'espace et qui ne dépend que de la fréquence de l'onde (à supposer que celle-ci soit une onde monochromatique). C'est l'hypothèse dite de **réaction locale** (par opposition à l'hypothèse dite de **réaction étendue**) selon laquelle la pression sur la surface en un point donné n'est fonction que de la vitesse au même point, (et en particulier est indépendante des points voisins) : on tient pour négligeable l'éventuelle propagation d'ondes sur la surface. Cette hypothèse est très souvent utilisée : par exemple, il est très courant de supposer qu'un mur est infiniment lourd et rigide, de sorte que sa vitesse est nulle, et l'impédance acoustique spécifique sur le mur est infinie.

Densité d'énergie En multipliant la première équation (1.13) par la vitesse, on obtient

$$\underline{v}\underline{\nabla p} = -\rho_0 \underline{v}\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \quad \text{ou encore} \quad \underline{v}.\underline{\nabla p} = -\frac{\rho_0}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t}$$

Mais on vérifie aisément que $\underline{\nabla}(p\underline{v}) = \underline{v}.\underline{\nabla p} + p\underline{\nabla}.\underline{v}$ ($\underline{\nabla}.\underline{v}$ est la divergence de $\underline{v}$ et $\underline{\nabla p}$ est le gradient de p). On a donc

$$\underline{v}.\underline{\nabla p} = \underline{\nabla}(p\underline{v}) - p\underline{\nabla}.\underline{v} \quad , \quad \underline{v}.\underline{\nabla p} = \underline{\nabla}(p\underline{v}) + \frac{1}{\rho_0 c^2} p \frac{\partial p}{\partial t}$$

et

$$-\frac{\rho_0}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t} = \underline{\nabla}(p\underline{v}) + \frac{1}{2\rho_0 c^2}\frac{\partial p^2}{\partial t}$$

où l'on a utilisé la deuxième équation de (1.13). En intégrant cette expression dans un volume fixe V délimité par une surface fermée S, on obtient

$$-\iiint_V \underline{\nabla}(p\underline{v})\, dV = \iiint_V \frac{\rho_0}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{1}{2\rho_0 c^2}\frac{\partial p^2}{\partial t}\, dV \quad \text{soit}$$

$$-\oint\!\!\!\!\!\iint_S p\underline{v}\underline{n}\, dV = \frac{d}{dt}\left(\iiint_V \frac{\rho_0}{2} v^2 + \frac{1}{2\rho_0 c^2} p^2\, dV\right) \tag{1.19}$$

où l'on a utilisé le théorème de Gauss pour transformer l'intégration volumique en intégration surfacique.

Cette importante équation exprime un bilan énergétique, car les deux termes peuvent s'interpréter en terme de puissance :

- L'expression $\frac{\rho_0}{2}v^2 + \frac{1}{2\rho_0 c^2}p^2$ s'interprète comme une densité d'énergie, et le membre de droite de l'équation (1.19) correspond donc à la variation temporelle de l'énergie stockée dans le volume V.
- Le terme $-p\underline{v}\underline{n}$ représente une puissance par unité de surface : c'est la puissance des forces de pression exercées par l'extérieur du volume V (car $-p\underline{n}\,dS$ est la force de pression).

Ainsi l'équation (1.19) montre que la puissance des forces de pressions exercées par l'extérieur sur la surface S est égale à la variation d'énergie stockée dans le volume V. Cela conduit à définir deux grandeurs importantes :

- La densité d'énergie w représente l'énergie emmagasinée par les molécules du fluide, par unité de volume. Elle vaut

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c^2} = E_c + E_p} \tag{1.20}$$

  Elle se répartit sous la forme d'une énergie cinétique E_c et d'une énergie potentielle E_p. L'énergie cinétique provient du fait que les molécules du fluide sont animées d'une vitesse $\underline{v}$. L'énergie potentielle représente le travail des forces de pression nécessaires pour amener les molécules considérées de leur état initial (densité ρ_0, pression $p = 0$) à leur état final (densité ρ, pression p)[3].
  La densité d'énergie w est a priori une fonction du temps t, et de la position $\underline{x}$. Elle s'exprime en J/m^3.
- L'intensité acoustique est définie par

$$\boxed{\underline{I} = p.\underline{v}} \tag{1.21}$$

  La puissance des forces de pression sur la surface S *quelconque* s'écrit

$$W_f = \iint_S p\underline{v}.\underline{n}\,dS = \iint_S \underline{I}\underline{n}\,dS \tag{1.22}$$

  On voit donc que W_f est donné par le flux du vecteur $\underline{I} = p\underline{v}$ à travers la surface S. $\underline{I}$ représente la puissance des forces de pression par unité de surface, et s'exprime en W/m^2.

La conservation de l'énergie (1.19) se réécrit donc

$$\boxed{\iint_S \underline{I}.\underline{n}\,dS + \frac{d}{dt}\left(\iiint_V w\,dV\right) = 0} \tag{1.23}$$

[3] On peut calculer directement ce travail à partir des équations de comportement du fluide, et montrer qu'il est bien, au premier ordre, égal E_p.

Les notions de densité d'énergie acoustique et d'intensité acoustique interviennent de façon essentielle en acoustique des salles, par exemple pour le calcul du temps de réverbération (temps caractéristique d'extinction d'une onde acoustique dans une salle).

1.3 Ondes planes

Lorsqu'on fait l'hypothèse que l'onde acoustique est plane (c'est-à-dire que que la pression est constante quels que soient y et z sur tout plan perpendiculaire à $\{O\underline{x}\}$), l'équation des ondes prend une forme particulièrement simple :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) p = 0 \tag{1.24}$$

Cette dernière écriture suggère le changement de variable $(t, x) \rightarrow (u_1 = t - x/c, u_2 = t + x/c)$. Puisque

$$\frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

l'équation des ondes se réécrit

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial u_2} p = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial u_2} p = f(u_2)$$

et donc

$$p(x, t) = \int f(u_2) du_2 + g(u_1)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{p(x, t) = F_+\left(t - \frac{x}{c}\right) + F_-\left(t + \frac{x}{c}\right)} \tag{1.25}$$

où $F_+(u)$ et $F_-(u)$ sont deux fonctions arbitraires dérivables.

F_+ représente une onde se déplaçant vers les « x positifs » et F_- représente une onde se déplaçant vers les « x négatifs ». En effet, considérons F_+ seulement, on voit que l'onde plane est formée d'un profil qui se déplace sans se déformer car pour deux instant t_0 et t_1 fixés, les profils de pression $p(x, t_0)$ et $p(x, t_1)$ sont liés par

$$p_+(x, t_1) = p_+(x - c(t_1 - t_0), t_0)$$

c'est-à-dire que le profil de pression à $t = t_1$ est celui à $t = t_0$ translaté vers la droite de $c(t_1 - t_0)$ (lorsque $t_1 > t_0$).

La vitesse s'exprime de façon très simple. En utilisant l'équation (1.13) on a pour l'onde se déplaçant vers les x positifs,

$$-\rho_0 \frac{\partial v_+}{\partial t} = \frac{\partial p_+}{\partial x} = -\frac{1}{c} F'_+ \left(t - \frac{x}{c} \right) \qquad \text{et}$$

$$v_+ = \frac{1}{\rho_0 c} F_+ \left(t - \frac{x}{c} \right) + cste$$

La constante peut être choisie nulle[4], de sorte que l'on a

$$v_+ = \frac{1}{\rho_0 c} p_+$$

On trouverait de même $v_- = -\frac{1}{\rho_0 c} p_-$ pour une onde se déplaçant vers les x négatifs.

1.3.1 Impédance acoustique spécifique d'une onde plane élémentaire

Si l'on se place sur un plan $\{x = x_0\}$, et si le vecteur $\underline{n}$ pointe vers les « x positifs », l'impédance acoustique spécifique est :

$$\boxed{Z = \pm \rho_0 c} \tag{1.26}$$

avec un signe positif pour l'onde se déplaçant vers les x positifs et négatif dans le cas contraire. On voit que pour l'onde plane, la pression et la vitesse sont *soit en phase soit en opposition de phase* à tout instant et en tout point de l'espace. Cette propriété très importante est caractéristique des ondes planes.

L'impédance acoustique spécifique $Z = \rho_0 c$ d'une onde plane élémentaire vaut, au signe près

$$Z = 415 kg/m^2/s \quad \text{dans l'air à} \quad 20^o C \tag{1.27}$$

$$Z = 1.48 \times 10^6 kg/m^2/s \quad \text{dans l'eau à} \quad 20^o C \tag{1.28}$$

1.3.2 Densité d'énergie et intensité acoustique pour une onde plane élémentaire

Puisque la pression et la vitesse sont reliées par

$$p = \pm \rho_0 c v$$

[4]Un champ acoustique solution de l'équation des ondes reste solution par addition d'un terme de pression ou de vitesse indépendant du temps et de l'espace. Un terme de vitesse constant indique que le fluide possède une vitesse d'ensemble non nulle, cas qui ne nous intéresse pas ici.

la densité d'énergie pour l'onde plane élémentaire est

$$\boxed{w = \rho_0 v^2 = \frac{p^2}{\rho_0 c^2}} \quad \text{et l'intensité acoustique} \quad \boxed{\underline{I} = \rho_0 c v^2 \underline{n} = \frac{p^2}{\rho_0 c}\underline{n} = cw\underline{n}} \tag{1.29}$$

Ainsi dans le cas des ondes planes élémentaires, l'intensité acoustique est simplement proportionnelle à la densité d'énergie.

L'onde plane est une abstraction car l'énergie totale qui lui est associée est infinie (la densité d'énergie est constante sur les plans $x = cste$). Cependant, si l'on considère un espace limité, l'onde plane représente souvent une bonne approximation de l'onde réelle. Ainsi, loin de la source une onde sphérique est approximativement plane. De même les ondes acoustiques basse-fréquence dans les tuyaux sont bien représentées par des ondes planes.

1.3.3 Onde plane harmonique, paquet d'ondes

Une onde plane élémentaire est dite harmonique si la pression s'exprime par (cas d'une onde se déplaçant vers les « x positifs »)

$$p(x,t) = P\exp(j\omega_0(t - \frac{x}{c})) = P\exp(j(\omega_0 t - kx))$$

avec

$$k = \frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

où λ est la longueur d'onde $\lambda = c/f_0$. k est appelé nombre d'onde (c'est le nombre de longueurs d'onde dans 2π mètres). L'intérêt de l'onde plane élémentaire harmonique provient du fait que toute onde plane élémentaire peut s'exprimer comme somme d'ondes planes élémentaires harmoniques, ou paquet d'ondes. Si l'on se rappelle qu'une onde plane aller s'écrit

$$p(x,t) = g(t - \frac{x}{c})$$

où l'on ne considère que l'onde se déplaçant vers les x croissants, et si la fonction g admet une transformée de Fourier G, on peut identifier le second terme comme la transformée de Fourier inverse de G :

$$p(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\exp j\omega(t - x/c)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\exp j(\omega t - kx)d\omega$$

avec toujours $k = \omega/c$. Et l'on voit que $p(x,t)$ est une somme continue d'ondes planes harmoniques de fréquence ω avec une densité $G(\omega)$. Dans ces conditions, une onde plane s'interprète comme un paquet d'ondes, i.e. une superposition d'ondes planes élémentaires harmoniques.

1.3.4 Onde réelle ? Onde complexe ?

En pratique, la pression n'est pas une grandeur complexe mais réelle. Classiquement, on représente une onde sinusoïdale comme la somme de deux ondes harmoniques de pulsations $\pm\omega$. Dans les calculs, on utilise la pression complexe $p(x,t) = P \exp j(\omega t - kx)$ où P est l'amplitude *complexe*, mais il faut se rappeler que la pression « réelle » (celle qui nous intéresse) est la partie réelle de $p(x,t)$

$$p_{re} = \Re e \left(P \exp(j(\omega_0 t - kx)) \right)$$

1.4 Mesures acoustiques

1.4.1 Pression efficace

Lorsqu'on veut mesurer le niveau d'une onde sonore en terme de pression, on utilise le niveau de pression efficace (Sound Pressure Level en anglais) qui s'exprime en déciBel.

La pression efficace vaut

$$P_{\text{eff}} \triangleq \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} p_{re}^2(u) du}$$

où l'on a indiqué que ce qui nous intéresse est la pression réelle ! Cette expression dépend a priori du temps t et du temps d'intégration T, mais en pratique (en particulier dans le cas d'un onde acoustique sinusoïdale), dès que T est supérieur à quelques périodes de l'onde, P_{eff} ne dépend plus de T ni de t. Pour une onde sinusoïdale (réelle !) de pression maximale P, on a $P_{\text{eff}} = P/\sqrt{2}$.

Le niveau de pression efficace est la valeur en dB de la pression efficace, par rapport à une pression de référence P_r.

$$\boxed{SPL = 20 \log_{10} \left(\frac{P_{\text{eff}}}{P_r} \right)} \tag{1.30}$$

où le logarithme est à base 10. La pression de référence dépend du milieu de propagation. Pour l'air, on choisit la pression correspondant au seuil limite d'audition à 1000Hz : $P_r = 2 \times 10^{-5} Pa$. Pour l'eau, on choisit une pression $P_r = 0.1 Pa$.

$$\boxed{P_r = \begin{cases} 2 \times 10^{-5} Pa & \text{dans l'air} \\ 0.1 Pa & \text{dans l'eau} \end{cases}} \tag{1.31}$$

1.4.2 Intensité acoustique

La mesure de l'intensité acoustique peut également être donnée en dB. Elle est alors mesurée en valeur moyenne

$$\boxed{\bar{I} \triangleq \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p_{re}(u)v_{re}(u)du} \quad \text{et} \quad \boxed{\bar{I}_{dB} \triangleq 10\log_{10}\left(\frac{\bar{I}}{P_r^2/\rho_0 c}\right)} \tag{1.32}$$

la référence étant l'intensité acoustique d'une onde plane dans l'air ou dans l'eau selon le cas $I_0 = P_r^2/\rho_0 c$. Ici aussi, bien noter que les grandeurs concernées sont la pression et la vitesse *réelles*.

Remarque Pour une onde plane élémentaire harmonique, il est possible de relier à l'intensité acoustique moyenne la vitesse (ou la pression) maximale de l'onde et son impédance acoustique spécifique. En effet, on a en un point donné de l'espace

$$p_{re}(t) = \Re e\left(ZV\exp(j\omega t)\right) \quad \text{et} \quad v_{re}(t) = \Re e\left(V\exp(j\omega t)\right)$$

où Z est l'impédance acoustique spécifique qui dépend (a priori) de ω. L'intensité acoustique moyenne vaut

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p_{re}(\tau)v_{re}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \Re e\left(ZV\exp(j\omega\tau)\right)\Re e\left(V\exp(j\omega\tau)\right)\,d\tau$$

et après un calcul simple (en supposant que $T >> 1/\omega$ et que V est réel), on aboutit à

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\Re e(Z)|V|^2$$

On voit que seule la partie réelle de l'impédance acoustique spécifique intervient dans cette formule. Cette partie réelle est appelée *résistance* acoustique, la partie imaginaire étant la *réactance*. Si l'on se souvient que I mesure le travail des forces de pression, on voit que ce travail n'est lié qu'à la résistance, et non à la réactance.

Cette expression peut s'exprimer en fonction de la pression p et de la vitesse v *complexes* associées aux pression et vitesse réelles grâce à la formule très simple :

$$\boxed{\bar{I} = \frac{1}{2}\Re e(pv^\star)} \tag{1.33}$$

où $v^\star$ représente la vitesse conjuguée.

1.5 Propagation à travers un dioptre acoustique

La propagation des ondes acoustiques possède des analogies avec celle des ondes électromagnétiques ou lumineuses. Il convient de se rappeler, cependant, que la pression acoustique est une quantité scalaire, contrairement au champ électrique ou au champ magnétique. En particulier, on retrouve le phénomène de réflexion partielle lors de la transition entre deux milieux de caractéristiques différentes. Ici, le milieu est caractérisé par son impédance acoustique spécifique Z, et l'on va étudier ce qui se passe lorsqu'une onde acoustique plane passe d'un milieu I vers un milieu II.

1.5.1 Incidence normale

On suppose l'onde plane, de direction de propagation perpendiculaire au plan du dioptre (c'est-à-dire à la surface de séparation des deux milieux). Le premier milieu possède une impédance acoustique spécifique $\rho_1 c_1$ et le deuxième une impédance acoustique spécifique $\rho_2 c_2$.

On fait à la surface de séparation les hypothèses de continuité suivantes

Continuité des vitesses : la vitesse des molécules à gauche du dioptre doit être égale à celle à droite du dioptre. Cela revient à supposer qu'il n'y a pas de « décollement » entre les deux milieux.

Continuité des pressions : On suppose que les pressions à droite et à gauche du dioptre sont égales. Si elles ne l'étaient pas, on pourrait trouver un volume arbitrairement petit centré sur le dioptre soumis à une force non nulle (pressions inégales) et de masse arbitrairement petite. Cela donnerait lieu à une accélération arbitrairement grande, hypothèse que l'on rejette.

Dans ces conditions, il n'est pas possible que l'onde incidente soit transmise sans réflexion a travers le dioptre (sauf si $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$) car les hypothèses de continuité ne peuvent pas être satisfaites. On va alors supposer qu'existe également une onde réfléchie.

On note p_i la pression de l'onde incidente, p_t la pression de l'onde transmise et p_r la pression de l'onde réfléchie.

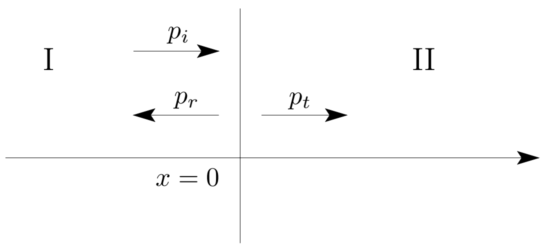

FIG. 1.1 : Dioptre acoustique

On prendra les mêmes notations pour les vitesses. On va chercher à calculer

Les coefficients de transmission et de réflexion en pression :

$$T = \frac{p_t}{p_i} \quad \text{et} \quad R = \frac{p_r}{p_i}$$

Les coefficients de transmission et de réflexion en intensité acoustique :

$$T_i = \frac{\bar{I}_t}{\bar{I}_i} \quad \text{et} \quad R_i = \frac{\bar{I}_r}{\bar{I}_i}$$

Les hypothèses de continuité s'écrivent (on oriente l'axe des x dans la direction de propagation) :

$$v_t = v_i + v_r \quad \text{et} \quad p_t = p_i + p_r$$

Sous l'hypothèse des ondes planes, on a

$$v_i = \frac{p_i}{\rho_1 c_1} \quad , \quad v_t = \frac{p_t}{\rho_2 c_2} \quad \text{et} \quad v_r = -\frac{p_r}{\rho_1 c_1}$$

le signe « - » vient du fait que l'onde réfléchie se déplace vers les x négatifs (Éq. (1.26)). On trouve alors sans difficulté

$$\boxed{T = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}} \qquad \boxed{R = \frac{p_r}{p_i} = T - 1 = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}} \tag{1.34}$$

$$\boxed{T_i = \frac{\bar{I}_t}{\bar{I}_i} = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}} \qquad \boxed{R_i = \frac{\bar{I}_r}{\bar{I}_i} = 1 - T_i = \frac{(\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2)^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}} \tag{1.35}$$

Exemple À titre d'exemple, on peut étudier la propagation d'une onde à l'interface air/eau.

Si $\rho_1 c_1 \gg \rho_2 c_2$ c'est le cas d'une onde se propageant de l'eau vers l'air ($\rho_1 c_1 = 1.5 \times 10^6 kg/m^2/s$ et $\rho_2 c_2 = 415 kg/m^2/s$). On a alors

$$T \approx 0 \quad , \quad R \approx -1 \quad , \quad T_i \approx 0 \quad \text{et} \quad R_i \approx 1$$

L'onde est simplement réfléchie avec un changement de signe.

Si $\rho_1 c_1 \ll \rho_2 c_2$ c'est le cas d'une onde se propageant de l'air vers l'eau. On a alors

$$R \approx 1 \quad , \quad T \approx 2 \quad , \quad T_i \approx 0 \quad \text{et} \quad R_i \approx 1$$

L'onde est réfléchie sans changement de signe. L'onde transmise a une pression deux fois supérieure à l'onde incidente, ce qui peut paraître surprenant. En fait, la valeur nulle du coefficient de transmission en intensité montre que du point de vue énergétique, la totalité de l'onde est réfléchie.

Autre exemple Certains mammifères ont une oreille très primitive qui ne possède pas de chaîne d'osselets, contrairement à l'oreille humaine. Les ondes sonores sont en contact avec une membrane qui sépare l'air du milieu liquide de l'oreille interne (cochlée). Si l'on suppose la membrane infiniment légère, on est dans le cas étudié plus haut de deux milieux d'impédances acoustiques spécifiques très différentes, et le calcul nous a montré que la transmission de l'onde en intensité acoustique est médiocre. Pour améliorer cette transmission, il faut rendre les deux impédances plus proches l'une de l'autre. C'est le rôle de l'oreille moyenne chez l'homme (et chez beaucoup de mammifères), qui réalise une adaptation d'impédance.

L'oreille moyenne comporte chez l'homme trois osselets mobiles, le marteau (en forme de marteau) l'enclume (en forme d'enclume) et l'étrier (en forme d'étrier[5]) formant un système de levier. Le marteau est en contact avec le tympan, l'étrier avec la cochlée par l'intermédiaire de la fenêtre ovale. L'oreille moyenne est schématisée ci-dessous.

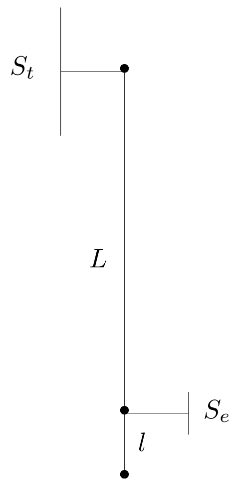

FIG. 1.2 : Schéma simpliste de l'oreille moyenne.

Le tympan a une surface S_t, l'étrier une surface S_e, et le rapport des leviers est L/l. Si l'on suppose que la chaîne des osselets a une masse négligeable, on a égalité des moments des forces à l'étrier et au tympan :

$$F_t L = p_t S_t L = F_e l = p_e S_e l$$

et la géométrie du système impose que $v_t = \frac{L}{l} v_e$. En divisant la première équation

[5]en hommage à Boby Lapointe

par la seconde, on obtient immédiatement

$$\frac{p_t}{v_t} S_t L = \frac{p_e}{v_e} S_e l \frac{l}{L} \quad \text{soit} \quad Z_t \frac{S_t}{S_e} \frac{L^2}{l^2} = Z_e$$

L'impédance au niveau du tympan Z_t est donc multipliée par le facteur $\frac{S_t}{S_e}\frac{L^2}{l^2}$. Ce facteur est supérieur à l'unité chez l'homme ($\frac{S_t}{S_e} \approx 20.3$ et $\frac{L^2}{l^2} \approx 1.7$).

Comme on est dans le cas où $\rho_1 c_1 \ll \rho_2 c_2$, le facteur de transmission en intensité acoustique se réécrit (en remplaçant $\rho_1 c_1$ par Z_e)

$$T_i = \frac{4\rho_2 c_2 Z_e}{(\rho_2 c_2 + Z_e)^2} \approx 4\frac{Z_e}{\rho_2 c_2}$$

Le coefficient de transmission en intensité acoustique (1.35) est donc proportionnel à Z_e. On voit donc qu'en l'absence d'adaptation d'impédance, $Z_e = Z_t$, la transmission est médiocre, mais l'adaptation d'impédance permet de gagner environ $10 \log_{10} \frac{S_t}{S_e}\frac{L^2}{l^2} \approx 15.4dB$.

En fait, la masse de la chaîne des osselets n'est pas négligeable dès que la fréquence est élevée (au delà de $1000Hz$) et le facteur d'amplification devient plus faible.

1.5.2 Incidence oblique

Lorsque l'incidence n'est plus normale, le phénomène de réflexion existe toujours, mais la direction de propagation de l'onde transmise n'est plus nécessairement la même que celle de l'onde incidente.

On conserve l'hypothèse de continuité de la pression, et on suppose que la vitesse *normale* est continue :

$$v_i \cos\alpha_i + v_r \cos\alpha_r = v_t \cos\alpha_t$$

où α_i, α_r, α_t sont les angles d'incidence de l'onde incidente, réfléchie et transmise.

On montre alors que l'onde réfléchie a une direction de propagation faisant un angle égal à l'angle d'incidence (par rapport à la normale à la surface). C'est ce que l'on appelle une réflexion spéculaire. De plus, l'onde transmise a une direction de propagation définie par un angle α_t tel que

$$\frac{\sin\alpha_t}{c_2} = \frac{\sin\alpha_i}{c_1} \tag{1.36}$$

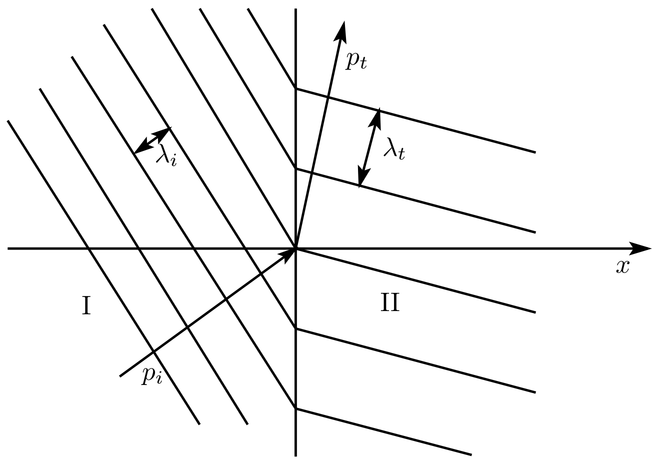

FIG. 1.3 : Dioptre optique en incidence oblique. La vitesse de propagation des ondes dans le deuxième milieu est supérieure à celle du premier milieu : $\lambda_t > \lambda_i$

Une onde passant d'un milieu dans un milieu où la vitesse de propagation est plus faible voit sa direction de propagation déviée vers la normale (lois classiques de Descartes). Il peut aussi exister un angle limite d'incidence au delà duquel la réflexion est totale (lorsque $c_2/c_1 > 1$).

Le reste des calculs est très similaire à celui du paragraphe précédent. La seule différence réside dans la continuité des vitesses qui fait intervenir les angles $\alpha_i = \alpha_r$ et α_t. On vérifie aisément que tout se passe alors comme si les impédances étaient divisées par $\cos\alpha$. On obtient :

$$\boxed{T_i = \frac{\bar{I}_t}{\bar{I}_i} = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 \cos\alpha_i \cos\alpha_t}{(\rho_1 c_1 \cos\alpha_t + \rho_2 c_2 \cos\alpha_i)^2}} \quad \text{et} \tag{1.37}$$

$$\boxed{R_i = \frac{\bar{I}_r}{\bar{I}_i} = 1 - T_i = \frac{(\rho_1 c_1 \cos\alpha_t - \rho_2 c_2 \cos\alpha_i)^2}{(\rho_1 c_1 \cos\alpha_t + \rho_2 c_2 \cos\alpha_i)^2}} \tag{1.38}$$

1.6 Exercices

1.6.1 Propagation à travers un mur rigide

On étudie la propagation à travers une surface rigide (par exemple un mur), conformément à la Fig. 1.4. On fait l'hypothèse que le mur est infiniment rigide, c'est-à-dire qu'il ne subit pas de vibration de compression. Dans ces conditions, il peut être assimilé à une structure rigide à laquelle il est possible d'appliquer le théorème fondamental de la dynamique. Dénotant $x(t)$ l'abscisse du mur, et μ est la masse surfacique du mur,

- Écrire les équations de continuité de la vitesse, et l'équation fondamentale de la dynamique appliquée au mur.
- Exprimer le coefficient de transmission en pression et montrer que le coefficient de transmission en intensité acoustique est

$$T_i = \frac{\bar{I}_t}{\bar{I}_i} = \frac{1}{1 + \omega^2\mu^2/4(\rho_1 c_1)^2} \approx \frac{4(\rho_1 c_1)^2}{\omega^2\mu^2}$$

- Comment varie l'atténuation en fonction de la fréquence ? Cela correspond-il avec votre expérience ?
- Application numérique : Que vaut en dB le facteur d'atténuation à 100Hz pour un mur de béton d'épaisseur 10cm et de densité $2600kg/m^3$?

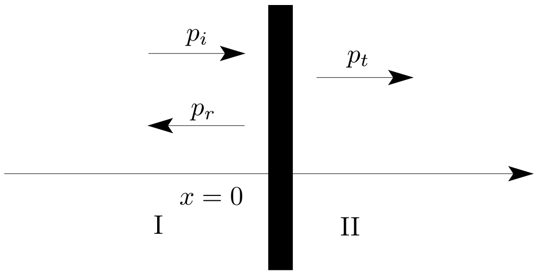

FIG. 1.4 : Propagation à travers un mur

1.6.2 Propagation à travers un bidioptre

On envisage maintenant la situation où l'onde acoustique traverse deux dioptres consécutifs, conformément à la Fig. 1.5 : Les milieux 1, 2 et 3 sont caractérisés par leur impédance acoustique spécifique $\rho_1 c_1$, $\rho_2 c_2$, et $\rho_3 c_3$. La transmission à travers le premier dioptre donne lieu à une onde transmise notée p_a. La transmission à travers le deuxième dioptre donne lieu à une onde réfléchie dans le milieu II notée p_b. On se place dans le cas d'une onde harmonique de pulsation ω.

- Écrire les conditions de continuité de la vitesse et de la pression aux deux interfaces.

- On en déduit l'expression du coefficient de transmission en intensité acoustique

$$T_i = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_3 c_3}{(\rho_1 c_1 + \rho_3 c_3)^2 \cos^2 k_2 L + (\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1 \rho_3 c_3/\rho_2 c_2)^2 \sin^2 k_2 L}$$

où $k_2 = \omega/c_2$

- Montrer que si les deux milieux I et III sont identiques, et si de plus $\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$ et $\rho_2 c_2 \sin k_2 L \gg \rho_1 c_1 \cos k_2 L$, le coefficient de transmission est équivalent à celui du mur trouvé précédemment. Pourquoi ?
- Montrer que si $\rho_2 c_2 \gg \rho_3 c_3$, $\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$, mais L est très petit ($\rho_2 c_2 \sin k_2 L \approx 0$), le coefficient de transmission est celui du dioptre simple. Pourquoi ?
- Que se passe-t-il si la fréquence est telle que $\sin k_2 L = 0$?
- Montrer que pour une fréquence telle que $\cos k_2 L = 0$, on peut trouver une valeur de $\rho_2 c_2$ qui rende le facteur de transmission égal à 1 exactement. Quelle application cela suggère-t-il ?

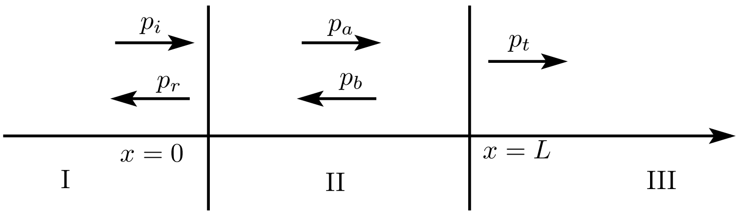

FIG. 1.5 : Bidioptre acoustique

1.6.3 Propagation à travers un double-vitrage

Un double vitrage est représenté par deux vitres verticales, séparées par un deuxième milieu. On cherche à étudier comment se propage une onde plane en incidence normale à travers la vitre. On notera x et y les déplacements horizontaux des deux vitres considérées comme infiniment rigides (pas d'onde de flexion, pas d'onde de compression). On se place à une pulsation ω.

- Écrire les équations de continuité de la vitesse et l'équation fondamentale de la dynamique aux niveau des deux vitres.
- Après quelques manipulations, on obtient :

$$T_i = \frac{(Z_2 Z_1)^2}{(Z_1^2 + m^2\omega^2)\, Z_2^2 \cos^2 k_2 L + \sin^2 k_2 L\, ((Z_2^2 + Z_1^2 - m^2\omega^2)^2/4 + m^2\omega^2 Z_1^2)}$$

où $Z_i = \rho_i c_i$.

- Que se passe-t-il si on fait le vide entre les deux vitres ? La vitesse de propagation c_2 et la densité ρ_2 varient-elles ? Que devient le coefficient de transmission ?
- Que se passe-t-il si l'on rapproche les deux vitres jusqu'à ce qu'elles se touchent ? Retrouve-t-on le coefficient de transmission d'une vitre simple ?

- Que se passe-t-il si la masse surfacique de la vitre tend vers 0 ?
- Que se passe-t-il si l'on ne fait pas le vide entre les deux vitres ($Z_2 = Z_1$) ? L'atténuation est-elle importante ?
- Application numérique : Un double-vitrage d'épaisseur $L = 1cm$, avec une pression $P_0 = 0.1$ atmosphère dans le deuxième milieu, et deux vitres de masse surfacique $\mu = 2kg/m^2$. Calculer l'atténuation à 100Hz puis à 1000Hz.

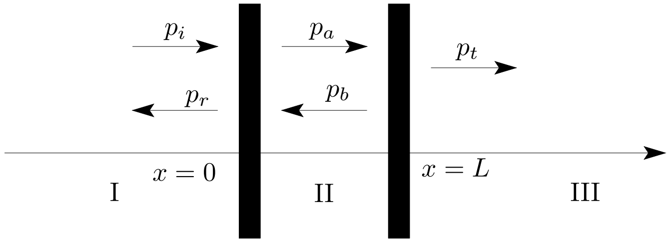

FIG. 1.6 : Propagation à travers un double vitrage

1.7 Corrigés des exercices

1.7.1 Propagation à travers un mur rigide

L'hypothèse de continuité des vitesse s'écrit

$$v_i + v_r = \frac{1}{\rho_1 c_1}(p_i - p_r) = \dot{x} = v_t = \frac{1}{\rho_2 c_2} p_t$$

et l'équation fondamentale de la dynamique appliquée au mur rigide nous donne

$$p_i + p_r - p_t = \mu \ddot{x}$$

où μ est la masse surfacique du mur. Supposant que l'onde incidente est sinusoïdale de pulsation ω, $\dot{x} = j\omega x$. On peut alors éliminer p_r et x pour obtenir (en supposant que $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$)

$$T = \frac{p_t}{p_i} = \frac{1}{1 + j\omega\mu/2\rho_1 c_1} \tag{1.39}$$

On obtient alors :

$$T_i = \frac{\bar{I}_t}{\bar{I}_i} = \frac{1/2\Re e(p_t v_t^\star)}{1/2\Re e(p_i v_i^\star)} = \frac{|p_t|^2}{|p_i|^2} = \frac{1}{1 + \omega^2\mu^2/(2\rho_1 c_1)^2} \approx \frac{4(\rho_1 c_1)^2}{\omega^2\mu^2} \tag{1.40}$$

Ainsi, pour un mur de $10cm$ d'épaisseur, la densité du béton valant $\approx 2600kg/m^3$, $\mu \approx 260kg/m^2$, et $T_i \approx 25 \times 10^{-6}$ à 100Hz, soit une atténuation d'environ $46dB$. On remarque que la transmission est d'autant plus forte que la fréquence est basse (un mur arrête bien les fréquences élevées, mais n'apporte que peu d'atténuation aux fréquences basses).

1.7.2 Propagation à travers un bidioptre

Les équations de continuité sont :

À l'interface I/II,

$$p_i + p_r = p_a + p_b \quad \text{et} \quad v_i + v_r = v_a + v_b$$

à l'interface II/III

$$p_a \exp(-k_2 L) + p_b \exp(k_2 L) = p_t \quad \text{et} \quad v_a \exp(-k_2 L) + v_b \exp(k_2 L) = v_t$$

où $k_2 = \omega/c_2$. Le terme $\exp(k_2 L)$ exprime le déphasage de l'onde entre le premier et le deuxième dioptre.

En notant que $p_i = \rho_1 c_1 v_i$, $p_r = -\rho_1 c_1 v_r$, $p_a = \rho_2 c_2 v_a$, $p_b = -\rho_2 c_2 v_b$ et $p_t = \rho_3 c_3 v_t$, et après quelques manipulations, on obtient :

$$\boxed{T_i = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_3 c_3}{(\rho_1 c_1 + \rho_3 c_3)^2 \cos^2 k_2 L + (\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1 \rho_3 c_3/\rho_2 c_2)^2 \sin^2 k_2 L}} \tag{1.41}$$

Cas particuliers :

- Cas où $\rho_1 c_1 = \rho_3 c_3$ (le bidioptre sépare deux milieux identiques). On a alors
$$T_i = \frac{4}{4\cos^2 k_2 L + (\rho_2 c_2/\rho_1 c_1 + \rho_1 c_1/\rho_2 c_2)^2 \sin^2 k_2 L}$$
et si de plus $\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$ et $\rho_2 c_2 \sin k_2 L \gg \rho_1 c_1 \cos k_2 L$, on a
$$T_i \approx \frac{4(\rho_1 c_1)^2}{(\rho_2 c_2)^2 \sin^2 k_2 L} \tag{1.42}$$
C'est par exemple le cas d'un mur pour lequel $c_2 \approx 3100m/s$ et $\rho_2 \approx 2600kg/m^3$. Si l'on écrit que $\sin^2 k_2 L \approx \omega^2 L^2/c_2^2$, la formule ci-dessus se réduit exactement à celle trouvée dans le cas du mur rigide (équation (1.40)) :
$$T_i \approx \frac{4(\rho_1 c_1)^2}{\omega^2 \mu^2}$$
car $\rho_2 L = \mu$ masse surfacique.
- Cas où $\rho_2 c_2 \gg \rho_3 c_3$ et $\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$, mais où L est très petit ($\rho_2 c_2 \sin k_2 L \approx 0$). On a alors
$$T_i \approx \frac{4\rho_1 c_1 \rho_3 c_3}{(\rho_1 c_1 + \rho_3 c_3)^2} \tag{1.43}$$
équation similaire à celle obtenue dans le cas du dioptre simple (voir cours). La membrane est alors acoustiquement transparente, tout se passe comme si les deux milieux I et III étaient en contact l'un avec l'autre.
- On remarque que ceci est vrai sans approximation si $\sin k_2 L = 0$ (l'équation Éq. (1.41) se ramène alors à l'équation Éq. (1.43)). La membrane est alors parfaitement transparente, mais seulement pour quelques fréquences $\omega = nc_2/2L$.
- Cas où $\cos k_2 L = 0$, (L multiple impair de $\lambda/4$ « quart d'onde »). On a alors
$$T_i = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_3 c_3}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1 \rho_3 c_3/\rho_2 c_2)^2}$$
Si l'on choisit de plus $\rho_2 c_2 = \sqrt{\rho_1 c_1 \rho_3 c_3}$, le coefficient de transmission vaut exactement 1 pour la fréquence considérée : la transmission est parfaite[6]. Cette condition est recherchée lorsqu'on veut adapter les impédances de deux milieux par exemple en échographie où l'on cherche à optimiser la transmission d'ultrasons à travers la peau.

1.7.3 Propagation à travers un double-vitrage

Les équations de continuité de la vitesse, et l'équation fondamentale de la dynamique appliquée aux deux vitres (déplacement x et y) donnent 6 équations :
$$\left\{\begin{array}{lcl} p_i + p_r - p_a - p_b & = & -m\omega^2 X \\ pi - pr & = & j\omega\rho_1 c_1 X \\ p_a - p_b & = & j\omega\rho_2 c_2 X \\ p_a \exp(-jk_2 L) + p_b \exp(jk_2 L) - p_t & = & -m\omega^2 Y \\ p_a \exp(-jk_2 L) - p_b \exp(jk_2 L) & = & j\omega Y \rho_2 c_2 \\ pt & = & j\omega\rho_3 c_3 Y \end{array}\right. \tag{1.44}$$

[6] L'équivalent optique de ce dispositif est utilisé pour la conception des verres anti-reflets.

où m est la masse surfacique de la vitre. Il est possible à partir de ces 6 équations d'exprimer p_t en fonction de p_i et des données du problème. Au terme d'un calcul fastidieux, en notant que $\rho_1 c_1 = \rho_3 c_3$ on obtient :

$$T = \frac{Z_2 Z_1}{(Z_1 + jm\omega)\, Z_2 \cos k_2 L + j \sin k_2 L\, ((Z_2^2 + Z_1^2 - m^2\omega^2)/2 + jm\omega Z_1)} \tag{1.45}$$

et

$$T_i = |T|^2$$

où $Z_i = \rho_i c_i$. Cette lourde expression permet d'expliquer un certain nombre de phénomènes :

- Double vitrage parfait : C'est le cas où existe un vide poussé entre les deux vitres. La vitesse de propagation du son est $c = \sqrt{\gamma \frac{R_0 T}{M}}$ et reste constante même en atmosphère raréifiée (si la température reste constante !). La densité ρ_2 en revanche tend vers 0, et le coefficient de transmission tend également vers 0. L'isolation est d'autant meilleure que l'air est plus raréfié entre les deux vitres.
- Lorsque L tend vers 0, le double vitrage se réduit à un simple vitrage de masse surfacique double pour lequel

$$T_i = \frac{1}{1 + m^2\omega^2/Z_1^2}$$

- Lorsque la masse surfacique m tend vers 0, on se retrouve dans le cas d'un bidioptre acoustique (les vitres ne servent plus qu'à séparer les deux milieux). Le coefficient de transmission est celui du bidioptre acoustique.
- Si on ne fait pas le vide entre les deux vitres, $Z_2 = Z_1$ et le coefficient de transmission devient

$$T_i = \frac{1}{1 + \frac{m^2\omega^2}{Z_1^2}\left(\cos k_2 L - \frac{m\omega}{2Z_1} \sin k_2 L\right)^2}$$

  On voit que pour les fréquences basses, le facteur d'atténuation est similaire à celui d'un simple vitrage. En revanche, pour une fréquence de 1000 Hz, l'atténuation est un peu plus importante : pour un double-vitrage d'épaisseur L=1cm et avec $\mu = 2kg/m^2$, on gagne environ $5dB$ par rapport à un simple vitrage. Mais la véritable efficacité du double vitrage est obtenue lorsqu'un vide partiel est fait entre les vitres.
- Exemple numérique : Un double-vitrage d'épaisseur L=1cm, avec une pression $P_0 =$ 0.1 atmosphère dans le deuxième milieu, et deux vitres de masse surfacique $\mu = 2kg/m^2$. Comme la pression est 10 fois plus faible que la normale, la densité ρ_2 est également 10 fois plus faible, et $\rho_2 c_2 = 41.5kg/m^2/s$. Pour une fréquence de 100Hz, $k_2 L \approx 0.018$ et le facteur de transmission vaut $T_i \approx 0.017$ soit environ -17.6dB. Cette atténuation ne serait que de -9dB si les deux vitres n'étaient pas séparées. À 1000Hz, le double vitrage procure une atténuation de -58dB contre -30dB pour un simple vitrage de même épaisseur.